８．線形空間(ベクトル空間)

数ベクトルとは？

空間とは？

次元とは？

このようなことを厳密に扱いたい。

その前に、平面とベクトルの関係および、
空間とベクトルの関係を再考する。
まずは、座標を拡張する。

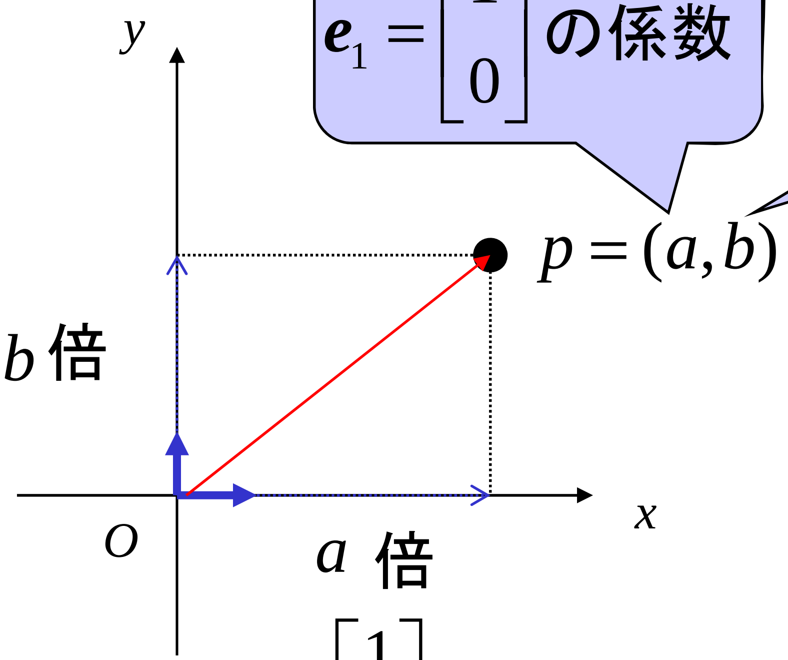
平面上のベクトル

基本ベクトルと座標

$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ の係数

$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ の係数

$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

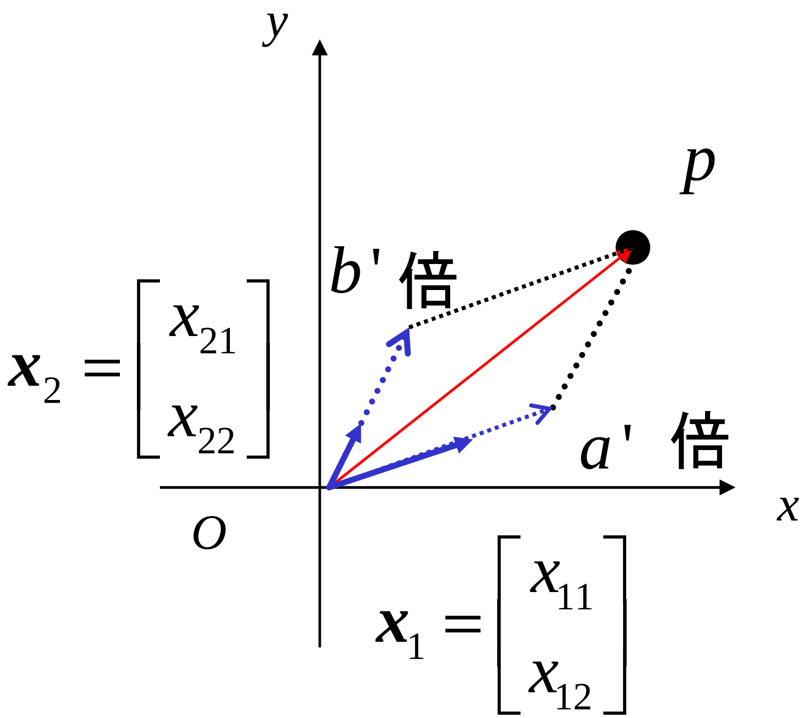


$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{p} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2$$

平面座標は、2本の基本ベクトルの係数の組とみなせる。

ベクトルと点の表現

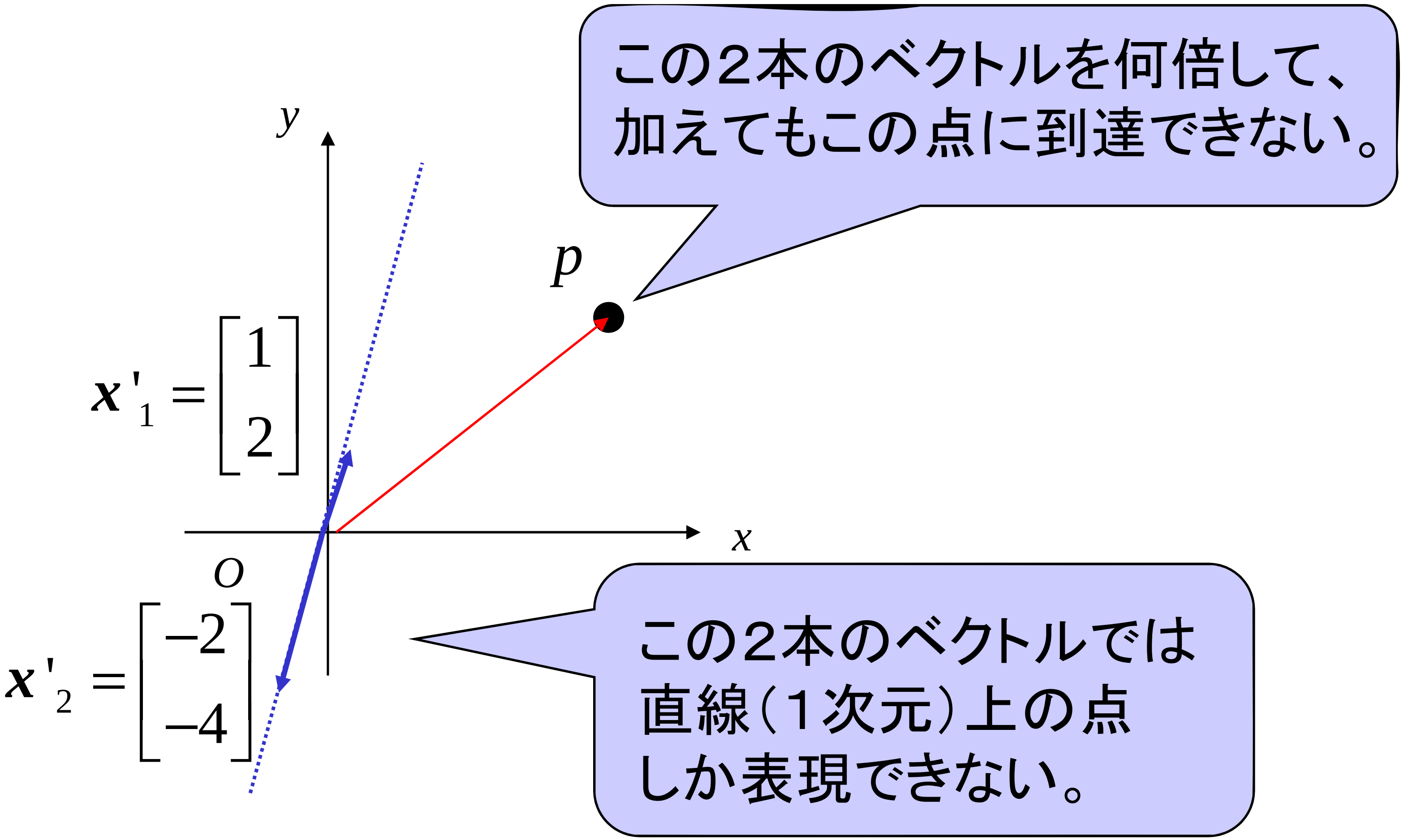


$$\boldsymbol{p} = a'\boldsymbol{x}_1 + b'\boldsymbol{x}_2$$

$\mathbb{R}^2$の点は、
2つのベクトルの係数として
表現できる。（別に、基本ベク
トルでなくてもよい。）

平面を表現できない2つのベクトル

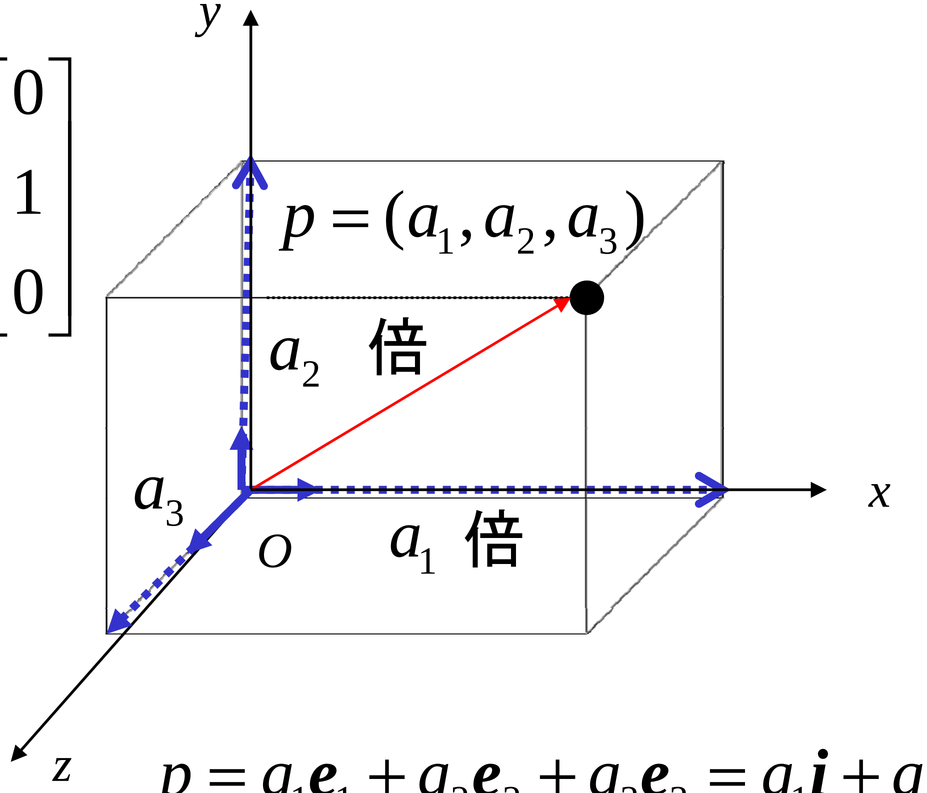
しかし、2本の 2×1 ベクトルで平面を表現できないときがある。



空間上のベクトル

基本ベクトルと空間座標

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

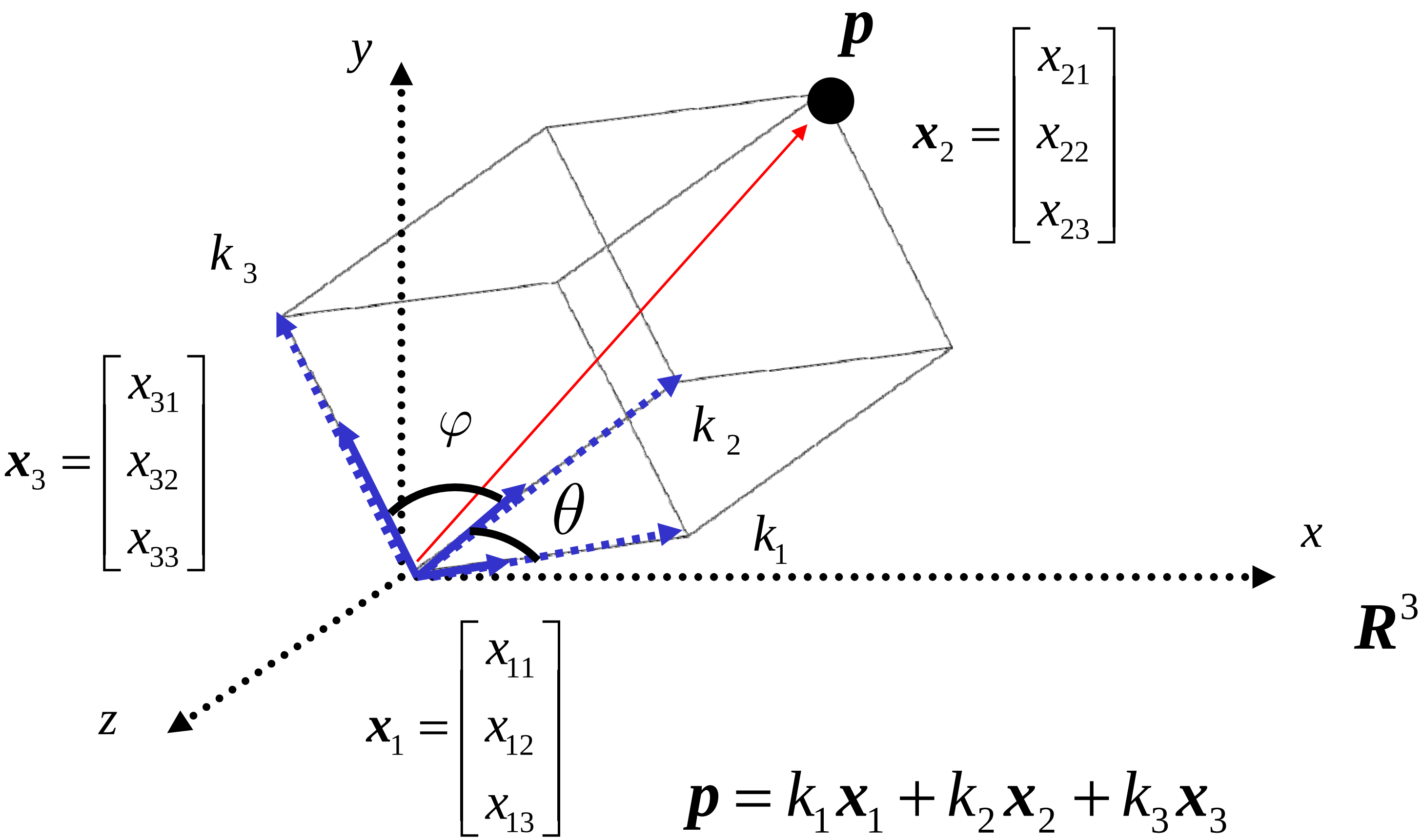
$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

空間座標は、3本の基本ベクトルの係数の組とみなせる。
（3つの基本ベクトルはお互いに直交するので、
直交座標系と呼ばれる。直交座標系では、次式が成り立つ。）

$$\boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \bullet \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \bullet \boldsymbol{e}_1 = 0$$

空間ベクトルと空間の点の表現

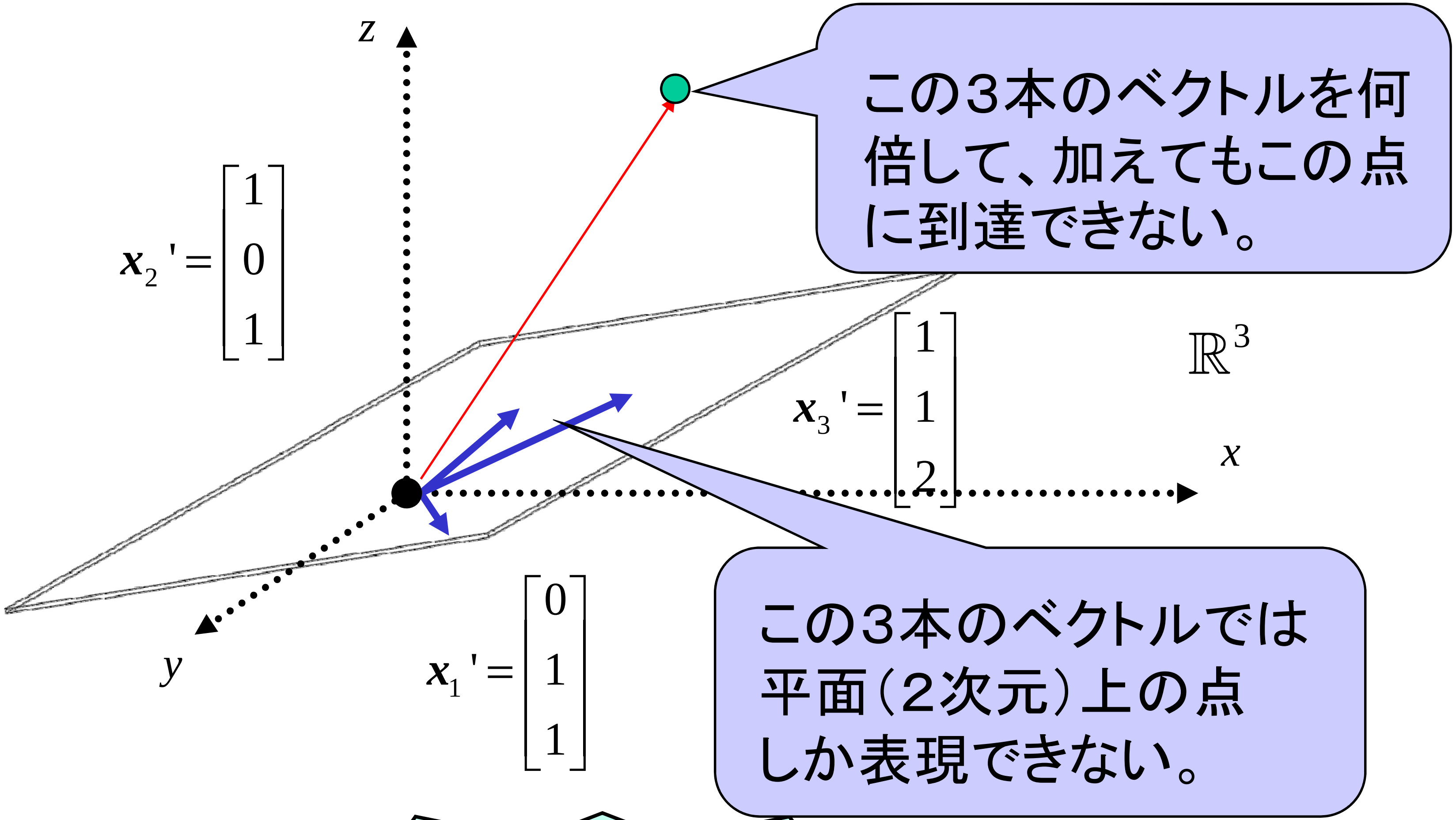


$$\boldsymbol{p} = k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3$$

空間 $\boldsymbol{R}^3$の点は、3つのベクトルの係数として表現できる。このように、直交しないベクトルを用いても、一意に位置が特定できる。（斜交座標系などと呼ばれる。）

空間を表現できない3つのベクトル

しかし、3本の 3×1 ベクトルで空間を表現できないものもある。



k本のベクトルが持つ表現能力を見分ける方法を学ぶ。

n次元列ベクトル

定義（n次元列ベクトル）

n 個の実数 $\mathbb{R}$ の成分 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を縦に並べた
$n \times 1$ 行列をn 項（実数）列ベクトルまたはn次元ベクトルという。
すなわち、

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

は n 次元ベクトル。

数ベクトル空間の定義

定義（n次元数ベクトル空間）

n 次元ベクトル全体から成る集合をn次元数ベクトル空間という。記号では、$\mathbb{R}^n$ と書く。すなわち、

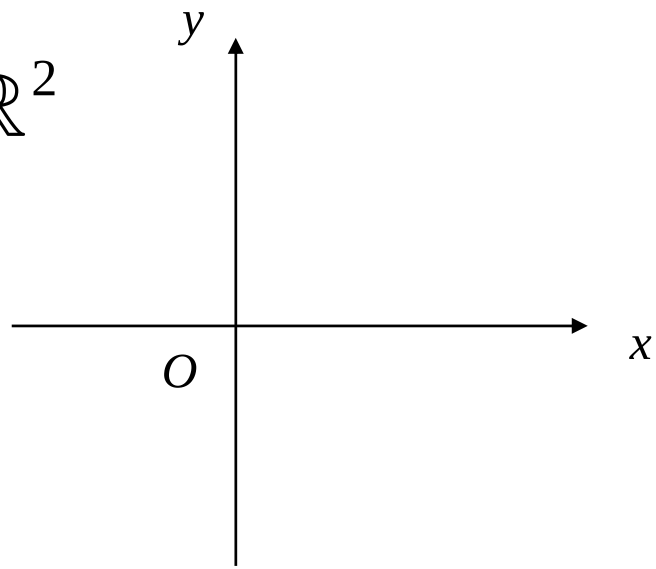
$$\mathbb{R}^n = \{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\text{は}n\text{次元ベクトル} \}$$

記号からもわかるが、n次元数ベクトル空間は、$\mathbb{R}$ の n 個の直積とみなすこともできる。

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$$

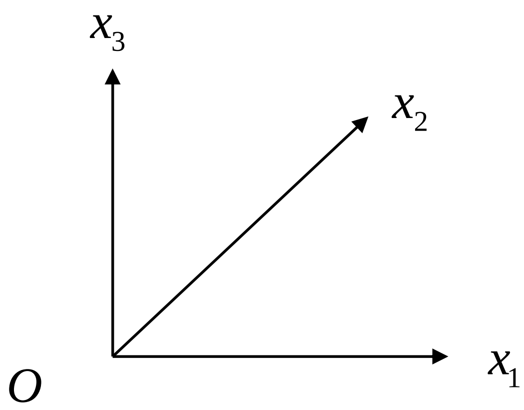
低次元の実数ベクトル空間の例

$\mathbb{R}^2$



平面:
2次元(実)ベクトル空間

$\mathbb{R}^3$



空間:
3次元(実)ベクトル空間

高次元の数ベクトル空間の例

$\mathbb{R}^4$ 　４次元（実）ベクトル空間

$\mathbb{R}^5$ 　５次元ベクトル空間

これらの空間は図示できないので、
記号で調べるしかない。
（しかし、例えば、５教科の点数は、５次元ベクトル空間
の１点をみなせる。他にも、一般に、n個のパラメータで
表されるデータはn次元空間の１点とみなせる。）

線形空間(ベクトル空間)

ベクトル空間

定義(ベクトル空間)

集合Vが(次ページの)

「和の公理」および

「スカラー倍の公理」

を満たすと、
集合Vを**線形空間**または**ベクトル空間**という。

数学では、空間は集合の別名で用いられる。
特に、ある特定の性質を満たす集合として、
いろいろな空間が考えだされている。

ベクトル空間における和の公理

定義（和の公理）

集合 $\boldsymbol{V}$ の任意の2つの元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}$ に対して、
和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

が定義され、次の性質を満たす。

（1） $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ （交換法則）

（2） $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ （結合法則）

（3）すべての $\boldsymbol{a} \in V$ について、

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

（零元の存在）

を満たす元 $\boldsymbol{0}$ が存在する。

（4）各 $\boldsymbol{a} \in V$ について、

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

（逆元の存在）

を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在する。
この $\boldsymbol{x}$ を $-\boldsymbol{a}$ と表記する。

ベクトル空間におけるスカラー倍の公理

定義(スカラー倍の公理)

集合 $\boldsymbol{V}$ の任意の元 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$ と、任意の実数 $k \in \boldsymbol{R}$ に対して、スカラー倍

$$k\boldsymbol{a}$$

が定義され、次の性質を満たす。

(5) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ (スカラーの分配法則)

(6) $(k+l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$ (ベクトルの分配法則)

(7) $(kl)\boldsymbol{a} = k(l\boldsymbol{a})$ (スカラーの交換法則)

(8) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (単位スカラー倍)

ベクトル空間例

（1）平面ベクトル全体

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

（2）空間ベクトル全体

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

（3）2次の正方行列全体

$$M_2 = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

（4）実数係数の n 次多項式全体

$$F = \{f \mid f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0, a_i \in \mathbb{R}\}$$

多項式とベクトル空間

簡単のために、2次式とする。

$$F_2 = \left\{ f \mid f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

和

$$f_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \in F_2$$

$$f_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \in F_2$$

$$\Downarrow$$

$$f_1(x) + f_2(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2) \in F_2$$

スカラー倍

$$k \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \in F_2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = (ka)x^2 + (kb)x + (kc) \in F_2$$

１次独立と１次従属

1次結合

定義（1次結合）

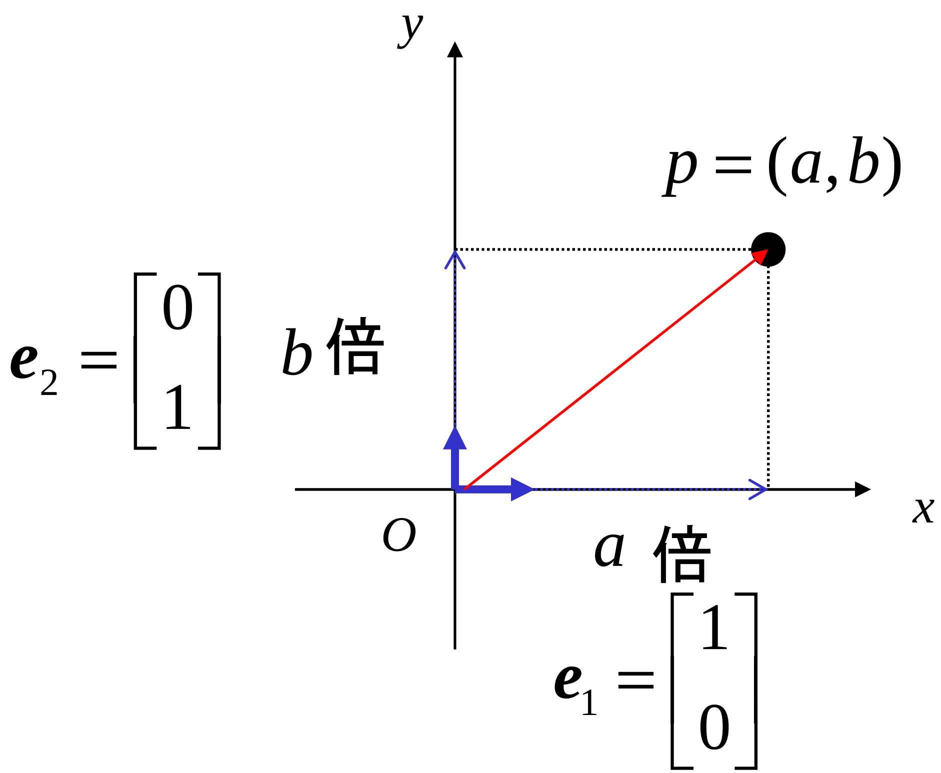
r 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$ と
r 個のスカラー $k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{R}$ に対して、

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x}_r$$

をベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ の一次結合という。
また、k_i を $\boldsymbol{x}_i$ の係数という。

座標の一種の拡張だと思えばよい。

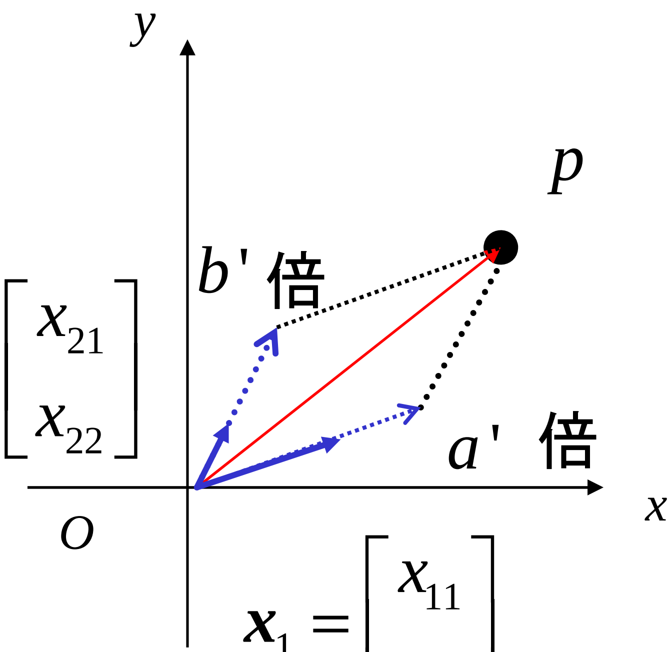
例１（基本ベクトルの一次結合）



$$p=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$$

平面の点 p は、a と b を係数とする
$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の一次結合で表現できる。

例2（一般のベクトルの一次結合）



$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = a'\boldsymbol{x}_1 + b'\boldsymbol{x}_2$$

平面の点 p は、a' と b'を係数とする
$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の一次結合で表現できる。

行列積による一次結合の表現

一次結合は、行列積を用いても表現可能。

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix}$$

すなわち、一次結合は、

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ x_{1n} & & & x_{kn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix}$$ として、

$\boldsymbol{Xk}$ と書ける。

座標系の拡張

座標の拡張

単位ベクトルによるn次元ベクトルの表現

単位ベクトルの一次結合によって、任意のn次元ベクトルを表現できる。すなわち、

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

単位ベクトルの一次結合は、
単なる座標とみなすことができる。
すなわち、各係数が座標値になる。

1次関係式

定義(一次関係式)

r 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$ に対して、
r 個のスカラー実数を係数とした次式

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$$

をベクトル集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ の一次関係式という。ここで、 $k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{R}$ である。

定義(自明な関係式)

係数がすべて0のとき、すなわち

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

のときには、明らかに1次関係式を満たす。
このときの1次関係式を自明な関係式という。

1次独立と1次従属(重要)

定義(1次独立と1次従属)

r 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$ に対して、

(1) 自明な1次関係式しか存在しないとき、それらのベクトル集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$は、

1次独立

という。

(2) 自明でない1次関係式が存在するとき、それらのベクトル集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ は、

1次従属

という。

１次独立の判定法1（定義に基づいた方法）

（1）１次独立かどうかを判定したい r 個のベクトル

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$$

に対して

線形関係式

$$k_1 \boldsymbol{x}_1 + k_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$$

を構成する。

（2）上の（1）の線形関係式を同次 n 元連立方程式とみなして解く。

（3）(I)連立方程式が自明な解しかなければ、

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$$

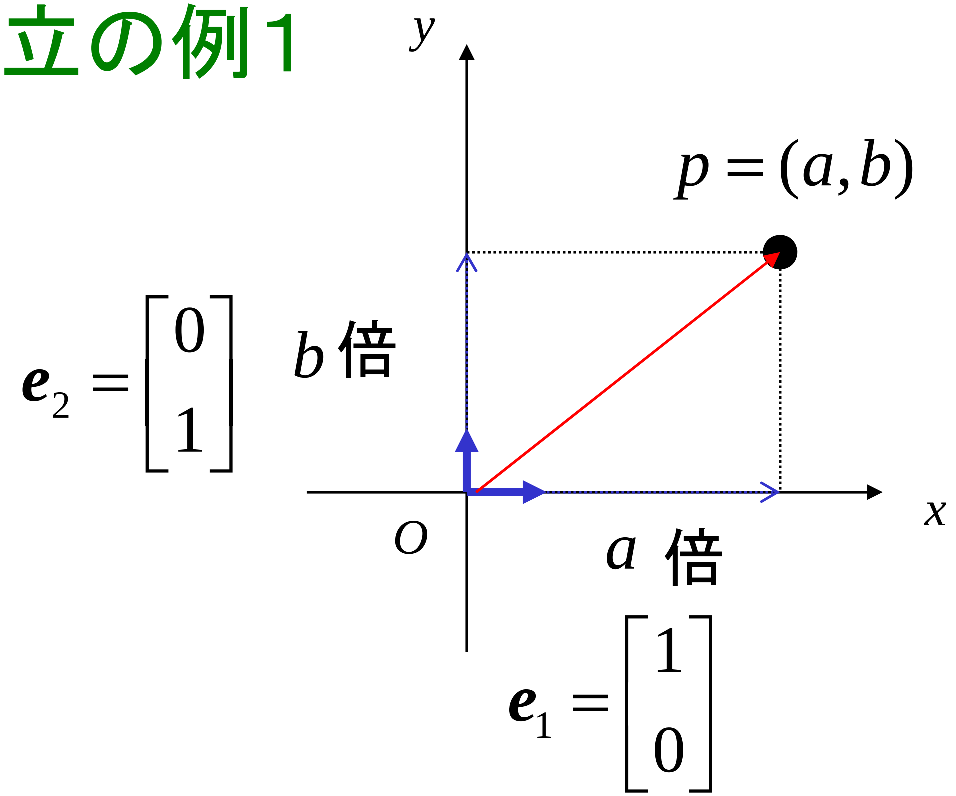
は一次独立である。

(II)連立方程式が自明でない解を持てば、

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$$

は一次従属である。

一次独立の例1



$$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow k_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow k_1=k_2=0$$

これ以外に可能性が無い。

よって、$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$は一次独立。

一次独立の例2

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

一次独立かを調べるために、任意のスカラーk_1, k_2, k_3を用いて、

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

とおく。このとき、

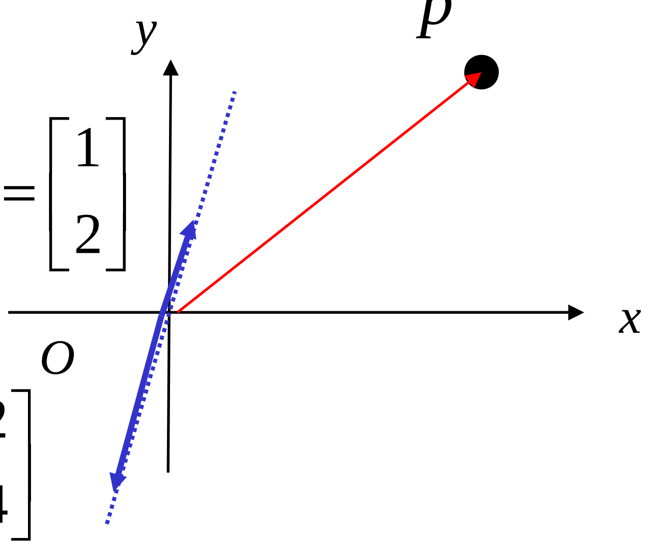
$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 \\ k_1 + k_3 \\ k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

なので、 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ だけしか上の式を満たせない。

よって、$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ は一次独立。

一次従属の例

平面を表現できない2個の2次元ベクトルは一次従属。



$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

連立方程式

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 - 2k_2 \\ 2k_1 - 4k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow k_1 = 2k_2$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

などが存在する。

よって、$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ は一次従属。

一次従属の例2

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3次元ベクトル3本が一次従属になるとき、それらは、同じ平面上かあるいは、同じ直線上にある。

一次独立かを調べるために、任意のスカラーk_1, k_2, k_3を用いて、

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

とおく。このとき、

$$k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + 2k_3 \\ k_1 + k_3 \\ k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

例えば、$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が存在するので一次従属。

一次独立と一次従属の直感的意味

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$ とする。

最後のベクトル $\boldsymbol{x}_r$ が他の $r-1$ 個のベクトル

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{r-1}$

で表現できるとき（一次結合で表されるとき）、
その表現能力はベクトル r 本未満分の表現能力
しか無い。 ⟶ 一次従属

どのベクトルも他のベクトルで表現できないとき、
その表現能力を維持するにはどのベクトルが
欠けてもいけない。 ⟶ 一次独立

練習

次のベクトルの組（ベクトルの集合）が、一次独立であるか、
一次従属であるかを求めよ。

（１）

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$$

（２）

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$$

（３）

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$$

（４）

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$$

1次独立の判定法2（正則性に基づく方法）

（正則行列と1次独立）

$\boldsymbol{A}$ を n 次正方行列とする。とする。

（1） $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$

が正則行列であるための必要十分条件は、

$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立。

（2）

$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$ が正則行列であるための必要十分条件は、

$\{{}^t\boldsymbol{b}_1, {}^t\boldsymbol{b}_2, \cdots, {}^t\boldsymbol{b}_n\}$ が一次独立。

証明

$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ に対して、1次関係式を考える。

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{k} = 0$$

この同時n元1次連立方程式が、自明な解以外を持つための必要十分条件は、係数行列が正則なことである。

すなわち、

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{A}| \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \right\}
\end{aligned}
$$

は1次独立。

また、同様の議論によって、

$$|\boldsymbol{A}| = 0 \Leftrightarrow \left\{ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \right\}$$ は1次従属。

$\mathcal{QED}$

例1

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して、$\left\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\right\}$ は、一次独立だった。よって、

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ は正則行列。

実際、

$$\left|\boldsymbol{A}\right| = 0 - (1+1) = -2 \neq 0$$

例2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ は正則行列である。(各自確かめよ。)

よって、$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は一次独立。

また、$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ も一次独立。

1次独立と1次従属の性質1

（ベクトルの部分集合に関する性質）

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_s \in \boldsymbol{R}^n$ とする。

このとき、以下が成り立つ。

（1）$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ が一次従属ならば、
$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_s\}$ も一次従属。

（2）$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_s\}$ が一次独立ならば、
$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ も一次独立。

証明略

例1

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{x}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$ とする。

（1） まず、$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\}$ を考える。

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}$ とおくと、

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1-1)-0=0$$

$\therefore\ \{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\}$ は1次従属。

$\therefore\ \{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4\}$ も1次従属。

（2） 次ぎに、$\{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$ を考える。

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 \end{bmatrix}$ とおくと、

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$\therefore \{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$ は1次独立。

$\therefore \{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}, \{\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}, \{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4\}$ も1次独立。

練習

次のベクトル集合に対して、1次独立でしかもベクトルの本数が最大となるようなベクトルの部分集合をもとめよ。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1次独立と1次従属の性質2

（ベクトル追加による1次独立から1次従属への変化）

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$ に対して、
$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ は一次独立とする。
このとき、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して以下が成り立つ。

（1）$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{b}\}$ が一次従属ならば、
係数を $k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{R}$ として、

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x}_r$$

と表せる。

（2）$\boldsymbol{b}$ が（1）のように表すことができるとき、
その表し方は唯一である。
すなわち、係数の組が一意に定まる。

証明

（1） $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{b}\}$ が一次従属なので、

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x}_r + k\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

を満たす $\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \\ k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が存在する。

このとき、 $k \neq 0$ を示す。

$k = 0$ とすると、

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$$

となるが、$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ は一次独立なので、

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

これは、すべての係数が0になり矛盾を生じる。

よって、 $k \neq 0$

したがって、

$$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{k_1}{k}\right)\boldsymbol{x}_1+\left(-\frac{k_2}{k}\right)\boldsymbol{x}_2+\cdots+\left(-\frac{k_r}{k}\right)\boldsymbol{x}_r$$

（2） 次のように2通り表せるとする。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}&=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r\\&=l_1\boldsymbol{x}_1+l_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{x}_r\end{aligned}$$

$$\therefore\left(k_1-l_1\right)\boldsymbol{x}_1+\left(k_1-l_1\right)\boldsymbol{x}_2+\cdots+\left(k_r-l_r\right)\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{0}$$

$\left\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r\right\}$ は一次独立なので、

$$\left(k_1-l_1\right)=\left(k_1-l_1\right)=\cdots=\left(k_r-l_r\right)=0$$

$$\therefore k_1=l_1,k_2=l_2,\cdots,k_r=l_r$$

このように、すべての係数は一意に定まる。

QED

例

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ は1次従属であった。

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_3$ とし、1次関係式を考える。

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より、拡大係数行列を行基本変形する。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ -c \\ c \end{bmatrix}$$

ここで、任意定数 c を用いて次のように表せる。

$$-c\boldsymbol{x}_1 - c\boldsymbol{x}_2 + c\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ と一意に表せる。

また、 $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1$ も同様に、一意に表せる。

$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2$

行列との積と一次独立

行列の積と1次従属

n次の正方行列 $\boldsymbol{A}$と、

n 次元ベクトル　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \boldsymbol{R}^n$　　に対して、以下が成り立つ。

（1）$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$が一次従属ならば、

$\{\boldsymbol{Ax}_1, \boldsymbol{Ax}_2, \cdots, \boldsymbol{Ax}_r\}$も一次従属。

（2）$\boldsymbol{A}$が正則行列で、$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ が一次独立ならば、

$\{\boldsymbol{Ax}_1, \boldsymbol{Ax}_2, \cdots, \boldsymbol{Ax}_r\}$も一次独立。

証明

（1） $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$が一次従属なので、$\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_r$

が存在し、

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}_n$$

左から $\boldsymbol{A}$ を乗じて、

$$k_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1) + k_2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2) + \cdots + k_r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r) = \boldsymbol{0}_n$$

よって、$\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r\}$ も一次従属。

（２）

$$k_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)+k_2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2)+\cdots+k_r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r)=\boldsymbol{0}_n$$

と仮定する。

$\boldsymbol{A}$ は正則行列なので、$\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する。これを左から乗じて

$$\boldsymbol{A}^{-1}k_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{A}^{-1}k_2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2)+\cdots+\boldsymbol{A}^{-1}k_r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r)=\boldsymbol{0}_n$$

$$\Leftrightarrow k_1\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1\right)+k_2\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2\right)+\cdots+k_r\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r\right)=\boldsymbol{0}_n$$

$$\Leftrightarrow k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{0}_n$$

$\left\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r\right\}$ が一次独立なので、係数がすべて
0でなければならない。よって、
$\left\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r\right\}$ も一次独立。 $\mathcal{QED}$

例1

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$ は1次従属であった。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}$$ とする。

このとき、以下のようになる。

$$\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_3'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\5\end{bmatrix}$$

$\{\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_2',\boldsymbol{x}_3'\}$ は1次従属

例2

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$ は1次独立であった。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}$$ は正則行列である。

このとき、以下のようになる。

$$\boldsymbol{x}_1'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_2'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_3'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}$$

$\{\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}_2',\boldsymbol{x}_3'\}$ は1次独立

一次独立と階数

（一次独立と階数）

$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$ が、列ベクトルあるいは行ベクトルを用いて、次のように表されているとする。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{bmatrix}$$

このとき、次の（1）、（2）、（3）は同じ数である。

（1） $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ より選べる1次独立なベクトルの最大個数

(3) ${}^t\boldsymbol{b}_1, {}^t\boldsymbol{b}_2, \cdots, {}^t\boldsymbol{b}_n$ より選べる1次独立なベクトルの最大個数

証明略

例１

２つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ は一次従属である。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

とおいて、階数を求める。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と基本変形できるので、$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = 1$

よって、一次独立なベクトルの最大数は１。

したがって、2個のベクトルは一次独立になれず、
一次従属。

例２

２つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ は一次独立である。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

とおいて、階数を求める。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と基本変形できるので、$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = 2$

よって、一次独立。

練習

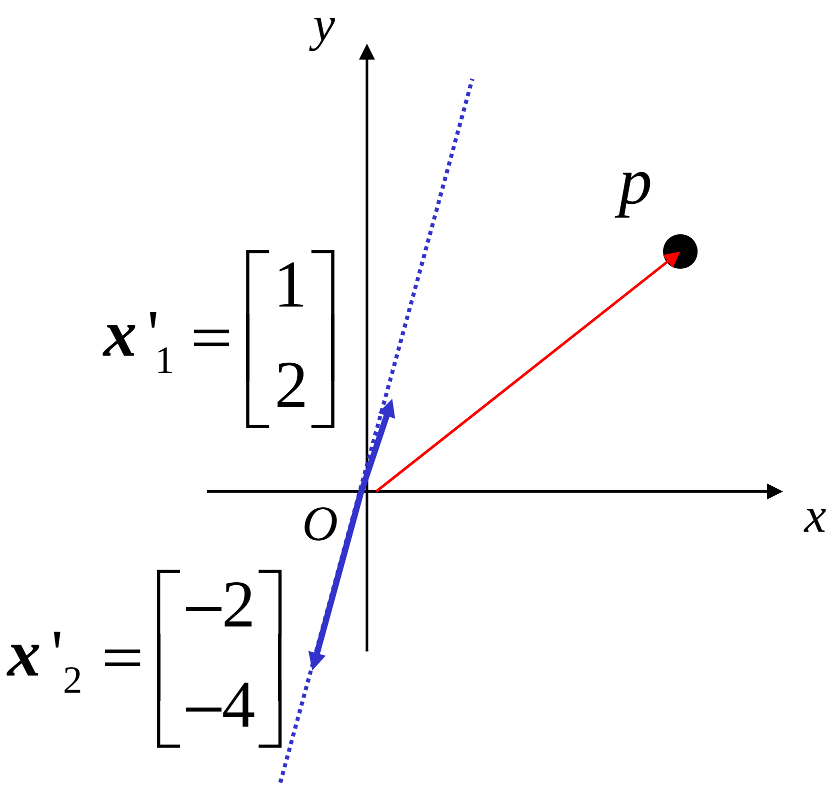
次のベクトル集合に対して、階数をもとめることにより、１次独立な最大のベクトル部分集合をもとめよ。

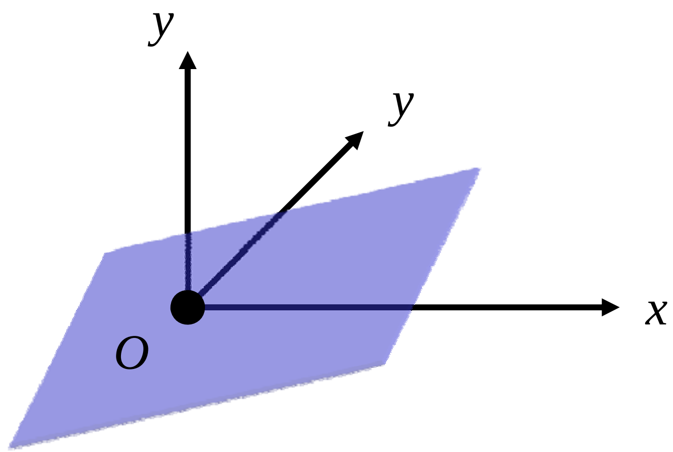
$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

基底と次元

部分空間と次元

平面($\mathbb{R}^2$)中の直線や、 3次元空間($\mathbb{R}^3$)中の平面
のように、元の空間の一部を表す空間を考える。
このような空間を、元の空間の**部分空間**という。





(線形)部分空間の定義

定義(部分空間)

$\boldsymbol{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ が、

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$

(2) $\boldsymbol{x} \in V, k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\boldsymbol{x} \in V$

を満たすならば、 $\boldsymbol{V}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間という。

(1)の性質を「加法について閉じている。」といいます。
(2)の性質を「スカラー積について閉じている。」といいます。

$\mathbb{R}^n$ および $\{\boldsymbol{0}\}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

これらを自明な部分空間という。

部分空間の性質

（部分空間の性質）

$\boldsymbol{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ が部分空間となるための必要十分条件は、

$$(1)' \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in V$$

証明

（1）、（2）が成り立つとする。このとき、（2）より、

$$a\boldsymbol{x}, b\boldsymbol{y} \in V$$

（1）より、

$$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in V$$

よって、$(1)'$ が成立する。

逆に、$(1)'$ が成り立つとする。

$a = b = 1$ とおけば、（1）が成り立ち、

$a = c, b = 0$ とおけば、（2）が成り立つ。

$\mathscr{QED}$

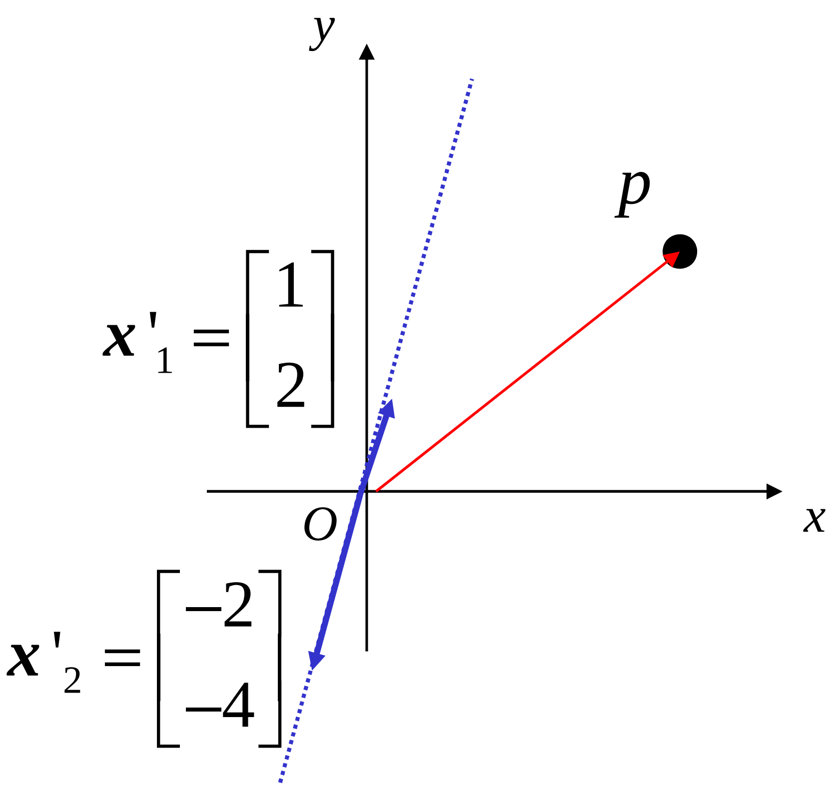
例

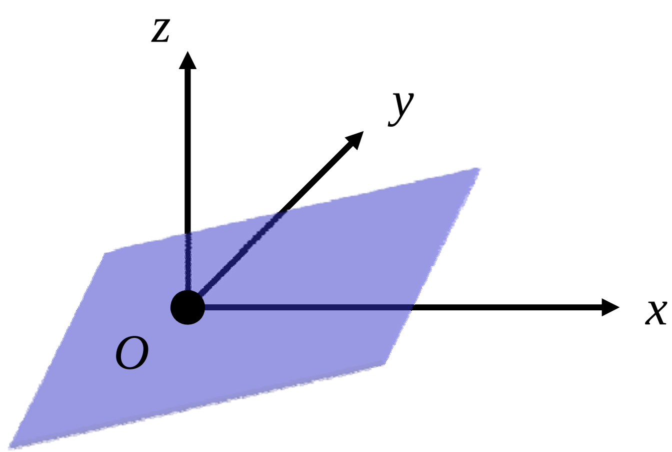
$\mathbb{R}^2$ 中の

直線: $y = 2x$

$\mathbb{R}^3$ 中の

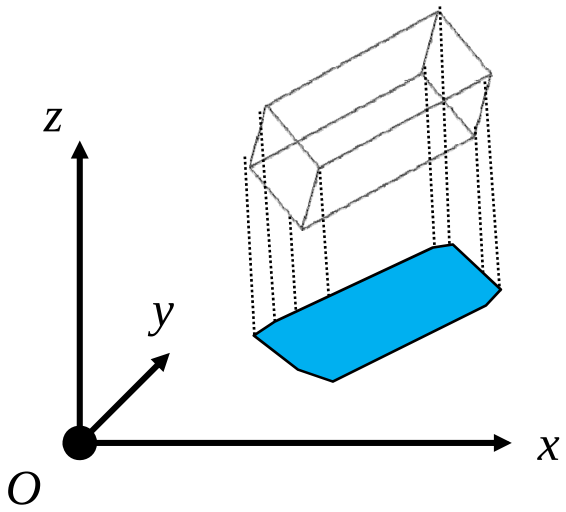
平面: $x + y + z = 0$





正射影による部分空間

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \, x_{n=0} \right\}$$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間。



最後の成分が常に0と言うことは、
$\mathbb{R}^n$ 中の対象が、
$\mathbb{R}^{n-1}$ の“面”に射影される。
（1次元分つぶれる。）

解空間

定義(解空間)

$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ に対して、

$$V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

この部分空間を連立方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間と呼ぶ。

例１

（１） $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^2, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解空間は、

直線： $x + 2y = 0$

（２） $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^2, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解空間は、

１点： $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

（３） $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^2, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解空間は、

$\boldsymbol{R}^2$ 全体

生成する部分空間

定義：（生成される部分空間）

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$ に対して、その一次結合全体で定義される　$\mathbb{R}^n$ の部分空間を$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ で生成する（張られる）部分空間という。　記号では、

$$L\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$$

あるいは、

$$L[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r]$$

と表す。

例

（１）

$$L\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} = L\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}\right\}$$

直線 $x+2y=0$ を表す。

（２）

$$L\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\} = L\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\boldsymbol{R}^2$ を表す。

（３）　$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \boldsymbol{R}^n$　とする。

$$L\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$$

$\boldsymbol{R}^n$ を表す。

基底

定義(基底)

集合 V のベクトルの組、$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_d\}$ に対して、次の(1)、(2)を満たすとき、それらのベクトルの集合を V の基底という。

(1) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_d\}$ が1次独立。

(2) V の任意のベクトルが、$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_d\}$ の1次結合で表現可能。
すなわち、$V = L\{x_1, x_2, \cdots, x_d\}$

空間を基底(ベクトル)の組み合わせ(1次結合)で表現可能。空間に一種の番地を振る作業。

標準基底

定義（標準基底）

$\mathbb{R}^n$ の n 個の単位ベクトルの組

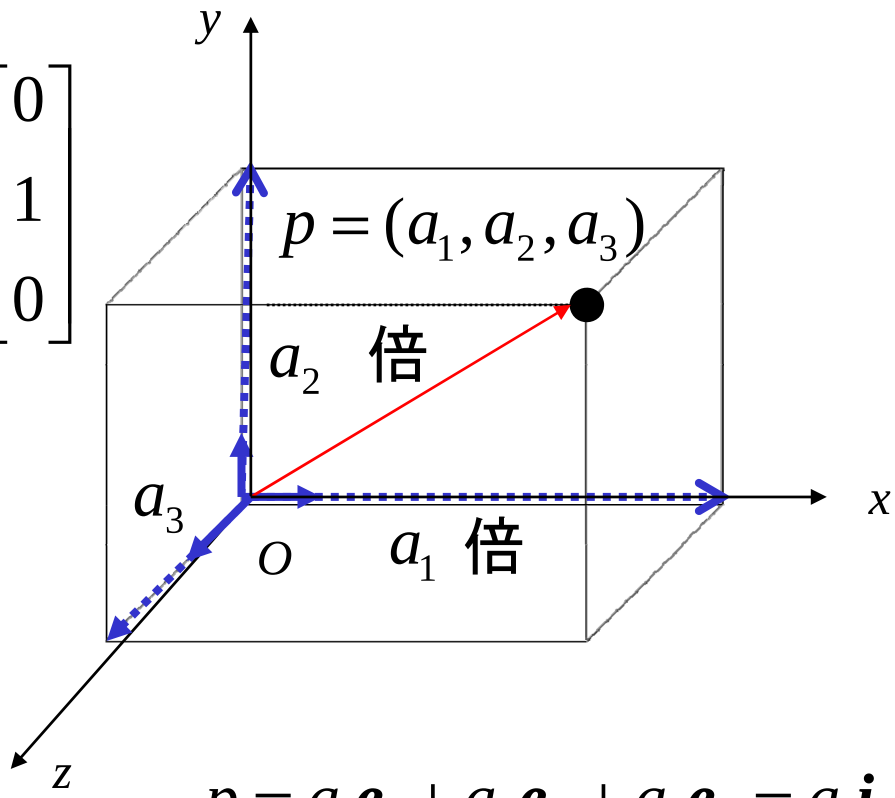
$$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の基底である。
この基底を標準基底ともいう。

$\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ として、３次元ユークリッド空間の
標準基底を表すことがある。。

例１（３次元ユークリッド空間の標準基底）

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である。

１次独立

１次結合で $\mathbb{R}^3$ の全ての点（ベクトル）が表現できる。

例2（基底の例）

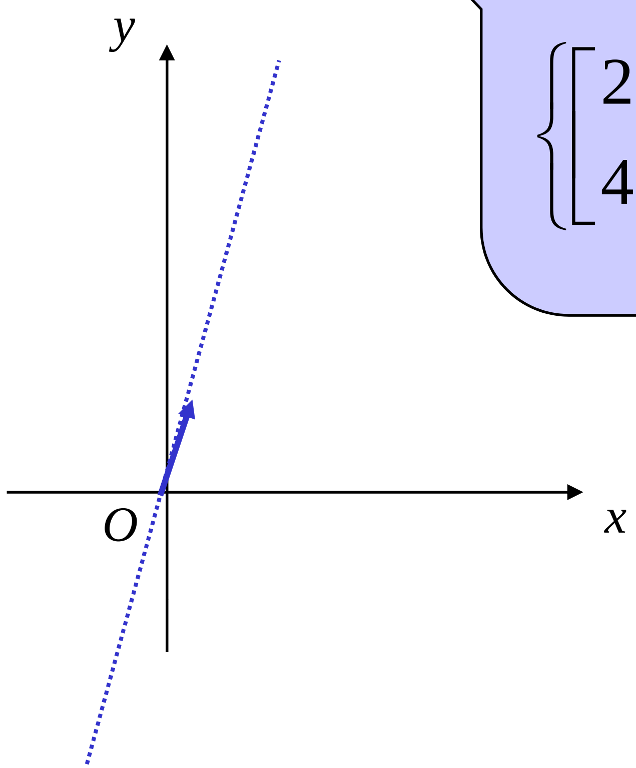
原点を通る直線は線形空間である。
この線形空間の基底を考える

直線: $y = 2x$ の基底としては、

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$ などがある。

部分空間の基底は、複数（無数に）存在する。

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$ なども基底



例3

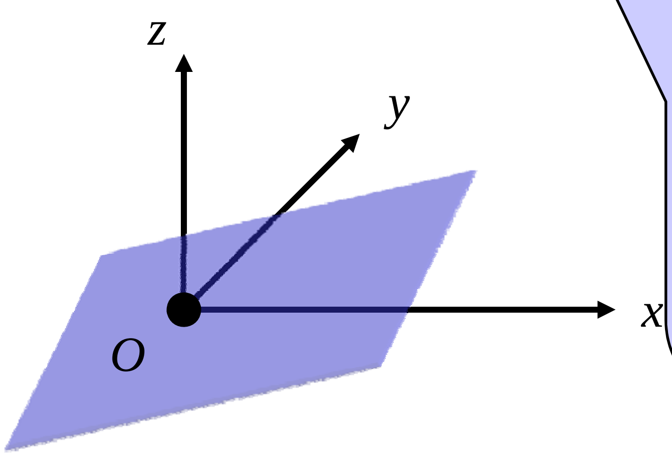
原点を通る平面は線形空間である。
この線形空間の基底を考える

平面 : $x + y + z = 0$
の基底としては、

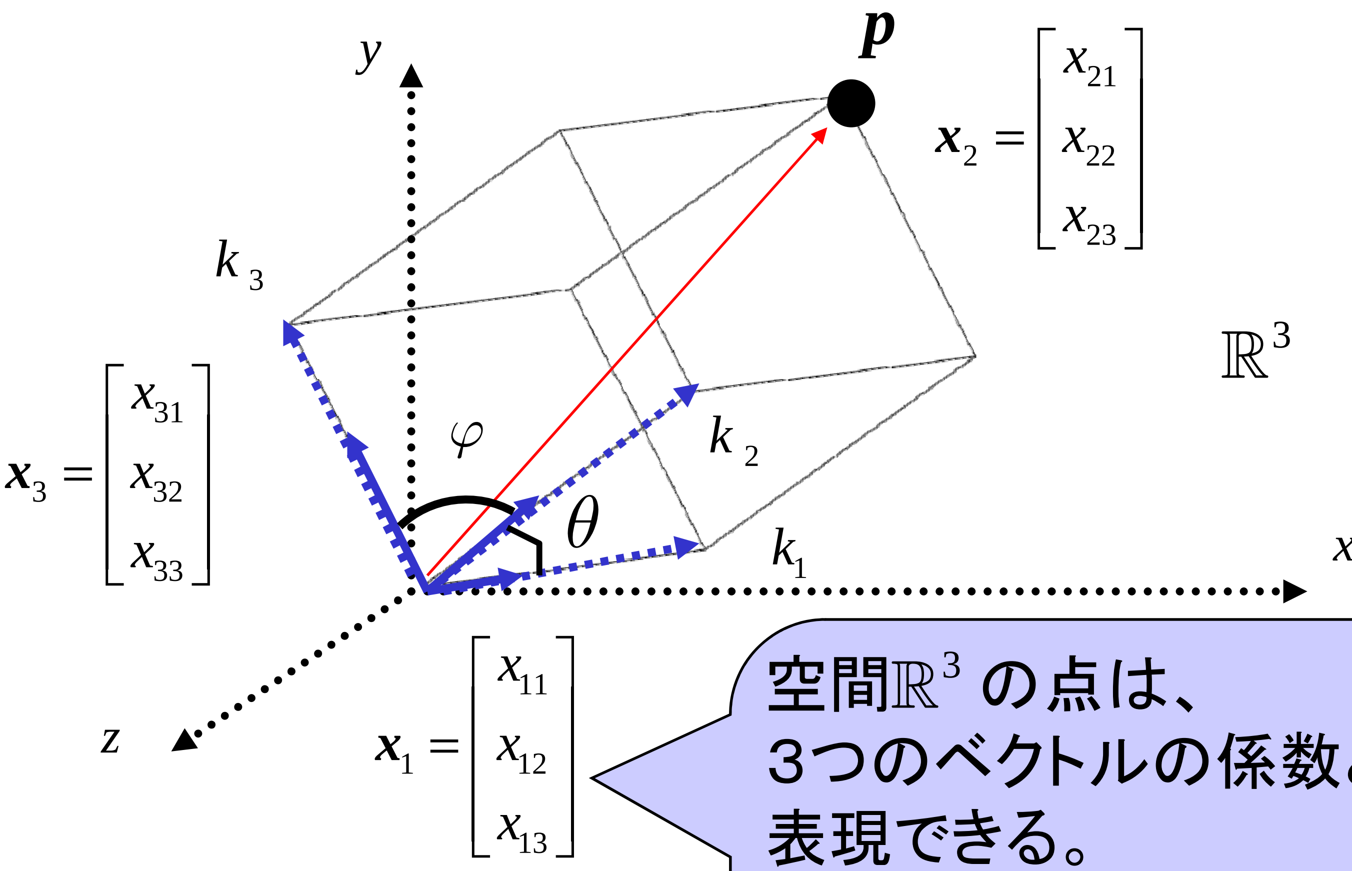
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$ などがある。

部分空間の基底は、複数（無数に）存在する。

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ なども基底



例4（3次元ユークリッド空間の標準でない基底）



$$\boldsymbol{p} = k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3$$

$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ も $\mathbb{R}^3$ の基底である。

空間$\mathbb{R}^3$の点は、
3つのベクトルの係数として
表現できる。

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は基底の一つ。

次元の定義

いままでは、なんとなく用いてきた次元に関して、
厳密な定義を与える。

定義（次元）

集合 V の基底を構成するベクトルの個数を V の次元といい、

$$\dim V$$

とかく。なお、

$$\dim\{\boldsymbol{0}\} = 0$$

とする。

次元の性質1

（次元と一次独立・従属）

$\mathbb{R}^n$ の部分空間 V 中に、
「 d 個の1次独立なベクトルがあり、
$d+1$個以上のベクトルは必ず一次従属になる」
ような d がある。
このとき、

$$d = \dim V$$

1次独立と1次従属の
境界にあたるベクトル
の数

である。

例1

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とし、

$V = L\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$ とする。

$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$ は1次従属であり、

$\{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$ は1次独立であった。

よって、 $\dim V = \dim L\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\} = 3$

このことから、$\{\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$は $\boldsymbol{R}^3$ の基底になれることがわかる。

基底と次元

（基底と次元）

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_r \end{bmatrix}, \quad V = L\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$$

とする。このとき、次が成り立つ。

（1）$\dim V = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$

（2）$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ から適当な $r \geq d = \dim V$ 個のベクトルの組を選ぶことにより、V の基底を作れる。

証明略

例1

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とし、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とする。

階段の先頭要素に対応するベクトルの集合は基底にできる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できる。よって、

$$rankA = \dim L\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\} = 3$$

また、階段行列の形から、$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4\}$
も $\mathbb{R}^3$ の基底になれることがわかる。

練習

次のベクトル集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$ の生成する線形空間 $L[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4]$ の基底および次元 $\dim L[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4]$ を求めよ。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$