ハイレベル数学講座

「数学で解く物理の世界」

秋田県立大学 総合科学教育研究センター

宮本 雲平

umpei@akita-pu.ac.jp

概 要

微分積分は力学における運動方程式を解くために開発されたものです．しかし，高校の学習では物理と数学の勉強がかけ離れてしまっています．本講座では，運動方程式を微分方程式として捉え数学的に扱うことで，暗記から解放され，物理学を俯瞰し，美しいと感じる方法を伝授します．

目 次

1　微分方程式の役割

本稿では高校数学の範囲で，微分方程式という物理に（化学・生物にも）役立つ数学を紹介する．主な目的は次のようなものである．

(a) 物理は公式の暗記ではないことを理解する．

(b) 「数学 III」（微分積分）を学ぶモチベーションを高める．

(c) 受験に役立てる．

1.1　数学と物理

数学と物理の関係について簡単に述べたい．物理学の営みとは次のようなものである．

(a) 現象を観測し，背後に潜む法則（運動方程式）を抽出する．

(b) 運動方程式を解いて現実と比較し，法則の正否を検証する．

(c) 運動方程式を解いて未知の現象を予言する．

重要なことは,「現象を観測」「現実と比較」するところは物理的作業であるが，しばしば最も時間・労力がかかるところの「運動方程式を解いて」というところは，本質的に数学である．誤解を恐れずに言えば「物理は殆ど数学」なのである．

1.2　運動方程式の数学的意味

運動方程式（equation of motion）は，数学的には**微分方程式**（differential equation）と呼ばれるものである [1].

物理では，適当な座標 x を導入し，時刻 t における質点の位置を時間の関数 $x = x(t)$ として表す（図 1）.

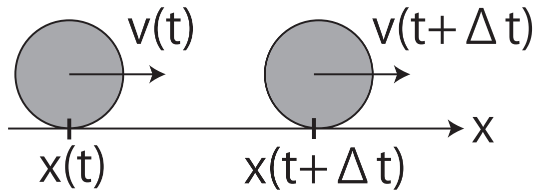

図 1: 速度は位置の瞬間変化率 (1)，加速度は速度の瞬間変化率 (2) として定義される．

時刻 t における質点の**速度**（velocity）は時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ における平均の速度の極限 $\Delta t \to 0$ として定義される．

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \tag{1}$$

時間微分は $x'(t)$（ダッシュ）ではなく $\dot{x}(t)$（ドット）と書く慣習がある．また，時刻 t における質点の**加速度**（acceleration）は時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ における平均の加速度の $\Delta t \to 0$ 極限として定義される．

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) \tag{2}$$

ニュートンは，質点の加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ が質点に働く**力**（force）F に比例することを発見した [2].

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F \tag{3}$$

例えば，地表付近では下向きに一様重力が働くので，$F = -mg$ とかける．すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \tag{4}$$

と書ける．運動方程式 (4) を解くということは，関数の 2 階微分 $\frac{d^2x}{dt^2}$ から元の関数 $x(t)$ を見つけるという作業に他ならない．このような方程式を数学的には微分方程式と呼ぶ．

運動方程式を微分方程式と捉えると，次のようなメリットがある．

(a) 公式を自分で導けるので，暗記から解放される．

(b) 運動方程式を中心として，分野全体を見渡すことができる．

(c) 公式の導き方を理解できるので，公式の使い方を間違えない．

微分方程式は「数学 III」の範囲で十分に理解できる（本稿は「数学 III」の知識で全て理解可能）が，現在高校では教えられていない [3]．また，高校物理は微分積分を使って教えてはいけないことになっている．

2　微分方程式入門

2.1　微分方程式とは

次のような 2 次関数を考える．

$$y(x) = x^2 \tag{5}$$

微分すると

$$y' = 2x \tag{6}$$

が得られる．

ここでは，始めに (6) が与えられたとして，そこから (5) を再現できるかという問題を考えよう．(6) のように未知の関数の微分を含むような方程式を微分方程式という．微分方程式を満たす $y(x)$ のことを**解**（solution）という．微分方程式から未知関数 $y(x)$ を求めることを,「微分方程式を**解く**（solve），**解を見つける**（find a solution），**積分する**（integrate）」などと言う．

(6) の解は目で見つけることができる．あきらかに

$$y = x^2 \tag{7}$$

は (6) の解である[1]．また，定数は微分したらゼロだから (7) に**任意定数**（arbitrary constant）C を足した

$$y = x^2 + C \tag{8}$$

も解である．でもこれは，元の関数 (5) よりも一般的である．言い換えると，(5) と (6) が同等になるには，(6) にもう 1 つ条件が必要になる．例えば，(5) は点 $(0, 0)$ を通るから (6) に $y(0) = 0$ という条件を加えればよい．すると

$$y(0) = 0^2 + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 0 \tag{9}$$

と C が決定される．

つまり，次のような同値関係が得られる

$$y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y' = 2x, \quad y(0) = 0 \tag{10}$$

$y(0) = 0$ のような条件を**初期条件**（initial condition）という（図 2）．

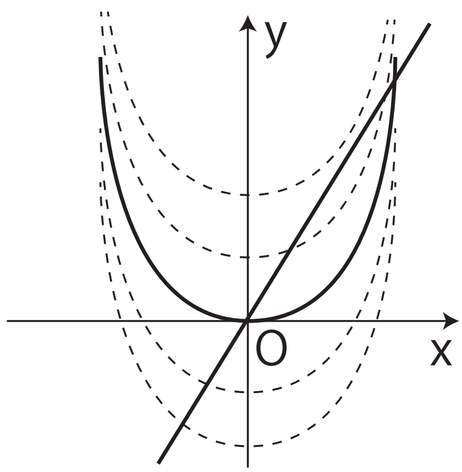

図 2: 点 x における接線の傾きが $2x$ で与えられる曲線 $y = x^2 + C$（放物線群）は無数にある．初期条件 $y(0) = 0$ を課すと，そのうちの 1 つ $y = x^2$（原点を通る放物線）が選ばれる．

第 2.2 節–第 2.4 節で，3 つの典型的な微分方程式の解き方を学ぶことにする．

2.2　$y'' = a$ 型

例 2.1
次の微分方程式を解け．

$$y''(x) = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \tag{11}$$

[1] 何故なら，(7) を微分すれば (6) が得られるから．

このように，求める関数の 2 階微分を含むような微分方程式を**2 階微分方程式**（differential equation of the second order）という．(6) は**1 階微分方程式**（differential equation of the first order）である．2 階微分方程式には初期条件が 2 つ必要であり，解くには微分方程式を 2 回積分すればよい．

(11) の両辺を $x = 0$ から任意の点 x まで積分すると

$$\int_0^x y'' dx = \int_0^x 1 dx \tag{12}$$

$$\implies \quad [y'(x)]_0^x = y'(x) - y'(0)$$
$$= y'(x) - 1 = [x]_0^x = x \tag{13}$$

よって

$$y'(x) = x + 1 \tag{14}$$

両辺をもう一度 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x y' dx = \int_0^x (x+1) dx \tag{15}$$

両辺はそれぞれ

$$\int_0^x y' dx = [y(x)]_0^x = y(x) - y(0) = y(x) - 1 \tag{16}$$

$$\int_0^x (x+1) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2 + x \tag{17}$$

となる．両辺を等しいとおいて

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \tag{18}$$

■

2.3　$y' = ay$ 型

これまでは微分方程式の右辺が x の既知関数だったが，今回は右辺も未知の関数 y を含んでいる次のようなものを考える．

例 2.2
次の微分方程式を解け.

$$y' = -y, \quad y(0) = 1 \tag{19}$$

この場合，先ほどのように両辺を単純に積分するわけにはいかない（右辺も未知だから）．そこで，$y(x) \neq 0$ として，(19) の両辺を y で割ってみよう

$$\frac{y'}{y} = -1 \tag{20}$$

合成関数の微分法[2]を用いると，この式は次のように書き換えることができる

$$(\log y)' = -1 \tag{21}$$

この式の両辺を積分すれば

$$\int_0^x (\log y)' dx = [\log y(x)]_0^x$$
$$= \log y(x) - \log y(0) = \log \frac{y(x)}{y(0)} \tag{22}$$

$$\int_0^x (-1) dx = [-x]_0^x = -x \tag{23}$$

ここで**対数法則**[3]を用いた．したがって

$$y(x) = y(0)e^{-x} = e^{-x} \tag{24}$$

と解を得ることができる（図 3）．■

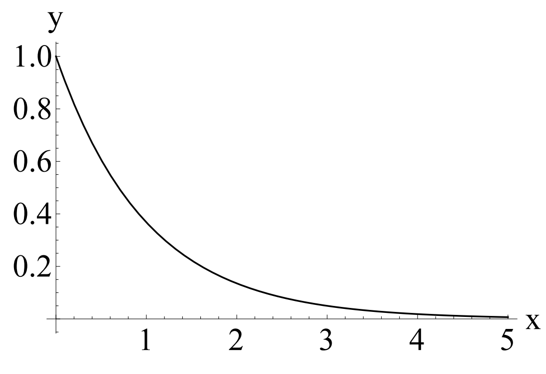

図 3: 微分方程式 (19) **の解** (24) **のグラフ.**

[2] $[\log_e f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$．ここで，$e = 2.718\cdots$ は自然対数の底（**ネイピア数**）．
[3] $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$.

2.4　$y'' = -a^2 y$ 型

2 階微分が自分自身の符号を変えたものになるような関数の微分方程式を考えよう．

例 2.3
次の微分方程式を解け．

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{25}$$

先ほどのように両辺を y で割っても上手くいかないので，他の方法が必要である．

実際には機械的にできるよい解法[4]があるが，少し準備を要するので，ここでは発見的な方法で解を見つけよう．

2 回微分すると符号を反転するだけで自分自身に戻る関数を我々は 2 つ知っている．$\cos x$ と $\sin x$ である．

$$(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x \tag{26}$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x \tag{27}$$

この 2 つの式に任意の定数 A, B を掛けて加えることで

$$(A\cos x + B\sin x)'' = -(A\cos x + B\sin x) \tag{28}$$

を得る．つまり，$y = A\cos x + B\sin x$ は $y'' = -y$ の解である．さらに，任意定数を 2 つ含んでいるため，2 つの初期条件を満たすことも可能である．実際

$$y(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \tag{29}$$

$$y'(0) = -A\sin 0 + B\cos 0 = 1 \tag{30}$$

より

$$A = 0, \quad B = 1 \tag{31}$$

とすれば初期条件が満たされることがわかる．

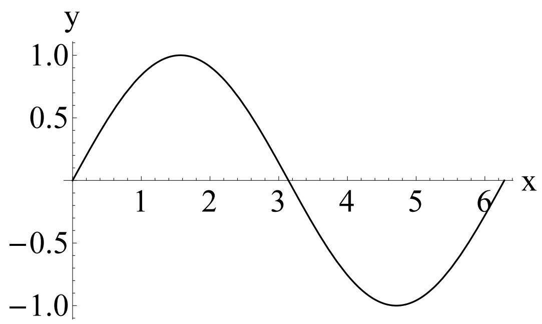

図 4: 微分方程式 (25) の解 (32) のグラフ．

以上より，(25) の解は

$$y = \sin x \tag{32}$$

である（図 4）．■

本節で学んだ微分方程式の型と解き方を表 1 にまとめた．

表 1: 代表的な微分方程式の型と解き方．A, B は初期条件から決まる定数．

型	解き方	解
$y'' = a$	両辺を 2 回積分	$y = A + Bx + \frac{1}{2}ax^2$
$y' = ay$	$\frac{y'}{y} = a$ として両辺を積分	$y = Ae^{ax}$
$y'' = -a^2 y$	$(\cos ax)'' = -a^2 \cos ax$ などを利用	$y = A\cos ax + B\sin ax$

[4] $a \neq 0, b, c$ を定数として，$ay''(x) + 2by'(x) + cy(x) = 0$ の形の微分方程式には，次のような強力な解法が存在する [2, 1]．まず，$y = e^{\lambda x}$（λ は未定の複素数）という解を仮定し微分方程式へ代入する．すると，λ に対する 2 次方程式（**特性方程式**と呼ばれる）$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ を得るので，この解を $\lambda_\pm = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$ とおけば，微分方程式の解は，A, B を任意定数として $y = Ae^{\lambda_+ x} + Be^{\lambda_- x}$ で与えられる．ただし，特性方程式が重根 $\lambda = \lambda_+ = \lambda_-$（即ち $b^2 - ac = 0$）をもつ場合，解は $y = e^{\lambda x}(Ax + B)$ で与えられる．この解法は第 2 節–第 3 節で扱う殆ど全ての微分方程式を解けてしまうほど強力な方法であるが，複素数の扱いなどに高校数学以上の知識（**オイラーの公式** $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ など）が必要になるので，本文中では採用しなかった．

2.5 演習問題

問題 2.1
$y'' = -2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ を解け.

【答】 $y = -x^2$ ■

問題 2.2
$y' = -2y,\ y(0) = -1$ を解け.

【答】 $y = -e^{-2x}$ ■

問題 2.3
$y'' = -y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ を解け.

【答】 $y = \cos x$ ■

3 微分方程式としての運動方程式

高校物理に出てくる運動方程式を微分方程式として書き下し，前節で学習した解き方を適用してみよう.

3.1 等加速度運動：$m\ddot{x} = F =$ 一定

例 3.1
質量 m の質点を地上から鉛直上向きに初速 v_0 で投げたときの運動を求めよ（図 5）.

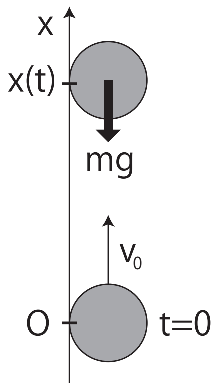

図 5: 運動方程式 (33) **が表す状況．**

運動方程式は

$$m\ddot{x} = -mg, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{33}$$

であり，$y'' = a$ 型の微分方程式である．よって，$\ddot{x} = -g$ の両辺を時刻 $t = 0$ から任意時刻 t まで積分すれば

$$\int_0^t (\dot{x})^{\cdot} dt = [\dot{x}(t)]_0^t = \dot{x}(t) - \dot{x}(0) \tag{34}$$

$$\int_0^t (-g) dt = [-gt]_0^t = -gt \tag{35}$$

よって

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) - gt = v_0 - gt \tag{36}$$

を得る．両辺をもう一度積分すると

$$\int_0^t \dot{x} dt = [x(t)]_0^t = x(t) - x(0) \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t (v_0 - gt) dt &= \left[v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right]_0^t \\ &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \tag{38}$$

となり

$$x(t) = x(0) + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{39}$$

を得る．運動方程式を 2 回時間積分することで解が得られた．■

一般の**等加速度運動**（constant acceleration motion）に関する速度と距離に関する公式の導出を**問題 3.2**（p.8）に載せたが，上のように運動方程式を微分方程式として捉えれば公式を暗記する必要はない．

3.2　速度に比例する抵抗力：$m\ddot{x} = -k\dot{x}$

例 3.2
質量 m の質点が速さに比例する**抵抗力**（比例係数 k）を受けながら運動するときの速度の時間変化を求めよ．ただし，初速を v_0 とする（図 6）．

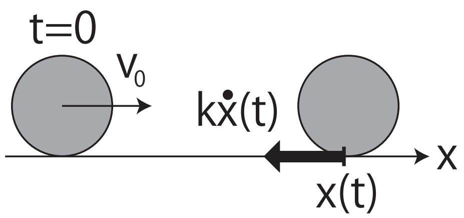

図 6: 運動方程式 (40) が表す状況．

運動方程式は

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{40}$$

$v = \dot{x}$ を用いれば

$$m\dot{v} = -kv \tag{41}$$

となり，$y' = ay$ 型の微分方程式に帰着される．よって，両辺を $v(\neq 0)$ で割れば

$$\frac{\dot{v}}{v} = -\frac{k}{m} \quad \Longrightarrow \quad (\log v)^{\cdot} = -\frac{k}{m} \tag{42}$$

両辺を時刻 0 から任意の時刻 t まで積分すれば

$$\int_0^t (\log v)^{\cdot} dt = [\log v(t)]_0^t$$

$$= \log v(t) - \log v(0) = \log \frac{v(t)}{v(0)} \tag{43}$$

$$\int_0^t \left(-\frac{k}{m}\right) dt = \left[-\frac{k}{m}t\right]_0^t = -\frac{k}{m}t \tag{44}$$

両辺を等しいとして，指数をとると

$$\frac{v(t)}{v(0)} = e^{-\frac{k}{m}t} \quad \Longrightarrow \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \tag{45}$$

■

3.3　ばね振り子：$m\ddot{x} = -kx$

例 3.3
おもりの質量が m，ばね定数が k のばね振り子を考える．時刻 t における自然長からの伸びを $x(t)$ とし，$t = 0$ で $x = x_0$ で静かに手を離したときの $x(t)$ を求めよ（図 7）．

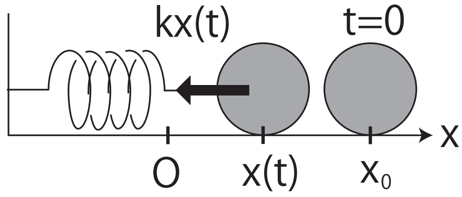

図 7: 運動方程式 (46) が表す状況．

運動方程式を立てると

$$m\ddot{x} = -kx, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \tag{46}$$

となるが，これは次のように書き換えることができる．

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{47}$$

これは $y'' = -a^2 y$ 型の微分方程式である．よって，2 つの解は $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ となり[5]，解は次のように書ける．

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{48}$$

A, B は初期条件から決まる定数である．微分すると

$$\dot{x}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \tag{49}$$

初期条件より

$$A\cos 0 + B\sin 0 = x_0 \tag{50}$$

$$-\omega A\sin 0 + \omega B\cos 0 = 0 \tag{51}$$

これらを解いて

[5]合成関数の微分法 $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$ より $(\sin\omega t)^{\cdot} = (\omega t)^{\cdot}\cos\omega t = \omega\cos\omega t$ などに注意．

[6]振動の周期 T は，三角関数の中身が 2π 進む時間だから $\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$．これより $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ と周期が得られる．

$$A = x_0,\ B = 0 \tag{52}$$

したがって，おもりは次のように振動する[6].

$$x(t) = x_0 \cos \omega t = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{53}$$

■

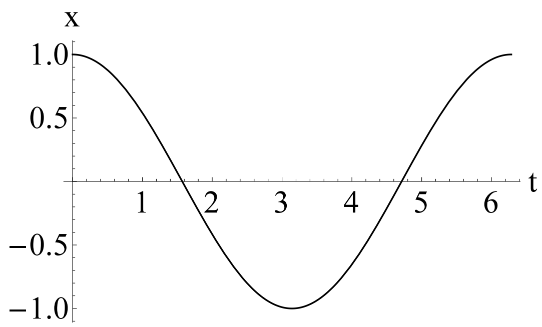

図 8: 運動方程式 (46) の解 (53) のグラフ．

表 2: 代表的な運動方程式（$m\ddot{x} = F$）の解き方．

運動	解き方	解
等加速度運動（$F=$一定）	$\alpha = \frac{F}{m} \Rightarrow y'' = a$ 型	$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
制動（$F = -k\dot{x}$）	$v = \dot{x} \Rightarrow y' = ay$ 型	$v(t) = v(0)e^{-\frac{k}{m}t}$
ばね振り子（$F = -kx$）	$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow y'' = -a^2 y$ 型	$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t$

3.4　演習問題

問題 3.1
微分方程式 (11)，(19)，(25) を運動方程式とみなすと，それぞれどのような運動に対応しているか述べよ．

【解答】(11) は，加速度・初速度・初期位置が 1 の等速直線運動に対応している．(19) は速度に比例する抵抗力が働き，初速度が 1 の質点の運動に対応している．(25) は初期位置が 0 で，初速度が 1 であるばね振り子の運動に対応している．■

問題 3.2
等加速度運動（加速度 α）の時刻 t における速度と変位に関する次の公式を運動方程式から導け．

$$v = v_0 + \alpha t \tag{54}$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{55}$$

【解答】

運動方程式 $m\ddot{x} = F$ において $\alpha = \frac{F}{m}$ とおき，$\ddot{x} = \alpha$ の両辺を時刻 0 から任意の時刻 t まで積分すれば

$$\int_0^t \ddot{x}dt = [\dot{x}]_0^t = \dot{x}(t) - \dot{x}(0) \tag{56}$$
$$\int_0^t \alpha dt = [\alpha t]_0^t = \alpha t \tag{57}$$

よって，$v = \dot{x}(t), v_0 = \dot{x}(t_0)$ とおけば (54) を得る．

さらに両辺をもう一度時刻 0 から任意の時刻 t まで積分する

$$\int_0^t \dot{x}dt = [x(t)]_0^t = x(t) - x(0) \tag{58}$$
$$\int_0^t (v_0 + \alpha t)dt = \left[v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2\right]_0^t = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{59}$$

したがって，(55) は運動方程式を 2 回積分したものとして得られる．■

問題 3.3
質量 m の質点を地上から初速 v_0 で水平方向からの角度 θ で投げたときの運動を求めよ．

【解答】

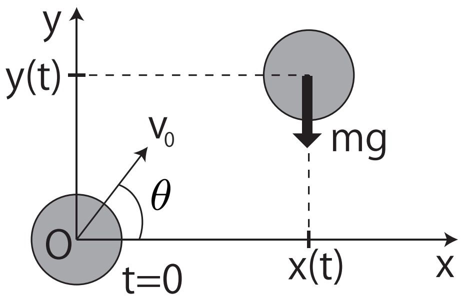

図 9: 運動方程式 (60)(61) **が表す状況．**

図 9 を参照しながら運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\theta \tag{60}$$

$$m\ddot{y}(t) = -mg, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\theta \tag{61}$$

$\ddot{x} = 0$ を時刻 0 から t まで積分して

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = \int_0^t 0 dt = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{x}(t) = \dot{x}(0) = v_0 \cos\theta \tag{62}$$

もう一度時刻 0 から t まで積分すると

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v_0 \cos\theta dt = v_0 \cos\theta \cdot t$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t \tag{63}$$

$\ddot{y} = -g$ を時刻 0 から t まで積分して

$$\dot{y}(t) - \dot{y}(0) = \int_0^t (-g) dt = -gt$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{y}(t) = \dot{y}(0) - gt = v_0 \sin\theta_0 - gt \tag{64}$$

もう一度時刻 0 から t まで積分すると

$$y(t) - y(0) = \int_0^t (v_0 \sin\theta_0 - gt) dt$$

$$= v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{65}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{66}$$

(63) と (66) から t を消去すれば，放物線が得られる．■

問題 3.4
質量 m の質点を上空から初速ゼロで落下させる．質点が速さに比例する抵抗と重力を受けながら運動するとき，速度の時間変化を求めよ．

【解答】

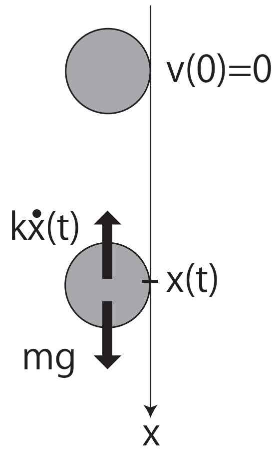

図 10: 運動方程式 (67) **が表す状況．**

鉛直下向きに x 軸をとり，図 10 を参照しながら運動方程式を立てると

$$m\ddot{x} = mg - k\dot{x}, \quad \dot{x}(0) = 0 \tag{67}$$

ただし，k は抵抗力の比例定数である．$v = \dot{x}$ であることを考慮して，この運動方程式を書き換えると

$$\dot{v} = g - \frac{k}{m} v = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right) \tag{68}$$

とかける．さらに変形すると

$$\frac{\dot{v}}{v - mg/k} = (\log(v - mg/k))^{\cdot} = -\frac{k}{m} \tag{69}$$

この式を時刻 0 から任意の時刻 t まで積分すると

$$\int_0^t (\log(v - mg/k))^{\cdot} dt = [\log(v - mg/k)]_0^t$$

$$= \log \frac{v(t) - mg/k}{v(0) - mg/k} \tag{70}$$

$$\int_0^t \left(-\frac{k}{m}\right) dt = \left[-\frac{k}{m} t\right]_0^t = -\frac{k}{m} t \tag{71}$$

よって，$v(0)=0$ も考慮して

$$v(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) \tag{72}$$

解 (72) のグラフは図 11 のようになる．$t\to+\infty$ における速度 mg/k は**終端速度**（terminal velocity）と言われる．■

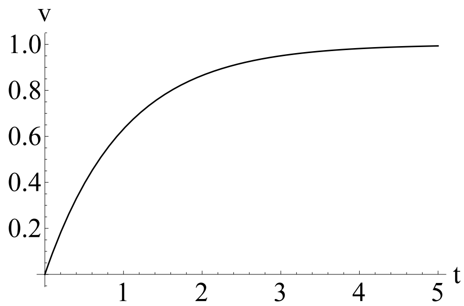

図 11: 運動方程式 (67) **の解** (72) **のグラフ．**

問題 3.5
おもりの質量が m，ひもの長さが ℓ の単振り子を，時刻 $t=0$ に最低点から水平方向に速さ v_0 で放したときの運動を求めよ．

【解答】

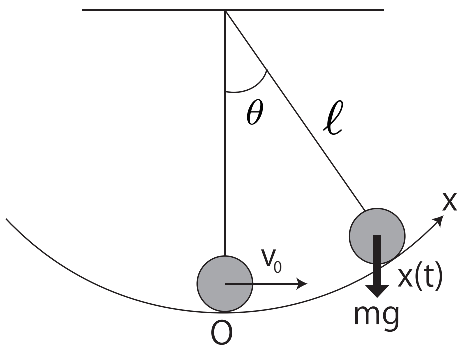

図 12: 運動方程式 (73) **が表す状況．**

時刻 t における，おもりの位置を最下点から円弧に沿って $x(t)$ とし，ひもの鉛直下向きからの傾きを $\theta(t)$ とおく（図 12）．運動方程式を立てると

$$m\ddot{x}=-mg\sin\theta,\ \ x(0)=0,\ \ \dot{x}(0)=v_0 \tag{73}$$

となるが，角度は微小（$|\theta|\ll 1$）だとすると次のように近似できる．

$$\sin\theta\simeq\theta=\frac{x}{\ell} \tag{74}$$

これを代入すると運動方程式は次のようになる．

$$\ddot{x}=-\frac{g}{\ell}x=-\omega^2 x,\quad \omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{75}$$

これは $y''=-a^2y$ 型の微分方程式である．よって，2 つの解は $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ となり，解は次のように書ける．

$$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \tag{76}$$

A,B は初期条件から決まる定数である．微分すると

$$\dot{x}(t)=-\omega A\sin\omega t+\omega B\cos\omega t \tag{77}$$

初期条件より

$$A\cos 0+B\sin 0=0 \tag{78}$$

$$-\omega A\sin 0+\omega B\cos 0=v_0 \tag{79}$$

これらを解いて

$$A=0,\ B=\frac{v_0}{\omega} \tag{80}$$

したがって，振り子は次のように振動する（図 13）[7]．

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t=\sqrt{\frac{\ell}{g}}v_0\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) \tag{81}$$

■

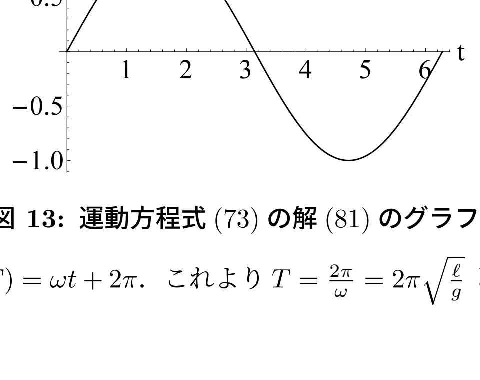

図 13: 運動方程式 (73) **の解** (81) **のグラフ．**

[7]振動の周期 T は，三角関数の中身が 2π 進む時間だから $\omega(t+T)=\omega t+2\pi$．これより $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ と周期が得られる．

4　保存則の導出

4.1　保存則を用いる問題

次の例題は，高校物理の教科書にも載っている典型的な問題である．

例題 4.1
質量 M の物体を糸でつるし，質量 m の弾丸を水平方向に速さ v_0 で正面衝突させる．両者は一体となって動き出し，ある高さまで上昇した（図 14）．

(a) 両者が一体となった直後の速さはいくらか．

(b) 衝突前の高さを基準にすると，両者が達する到達点はいくらか．

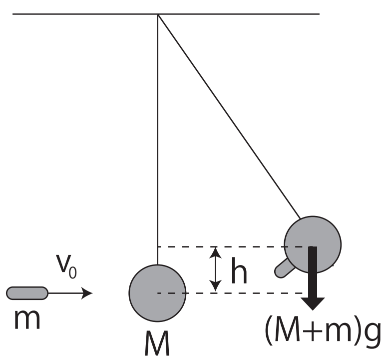

図 14: 単振り子に弾丸が打ち込まれる問題．

【解答】

(a) 運動量保存の法則を用いて解く．衝突後の速さを v とおくと

$$\begin{aligned} mv_0 &= (m+M)v \\ \Longrightarrow \quad v &= \frac{m}{m+M}v_0 \end{aligned} \tag{82}$$

(b) 衝突直後と最高点に達したところでの力学的エネルギーが等しいことを用いて解く．最高点の高さを h とすると

$$\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2 = (m+M)gh \tag{83}$$

これより

$$h = \frac{m^2v_0^2}{2g(m+M)^2} \tag{84}$$

■

このような **2 体問題**（two-body problem）や保存力（重力やバネ力など）の下での運動を扱う場合，質点の位置を時間の関数 $x(t)$ として知る必要がなく，**運動量保存則**（law of momentum conservation）や**エネルギー保存則**（law of enery conservation）から必要な情報（衝突後の速度や到達した高さ）を得れば十分なことが多い．

高校物理では運動方程式と，運動量保存則やエネルギー保存則の関係がわかりにくいが，ここでは種々の保存則は単なる運動方程式の**積分形**（integral form）であることを見る．

4.2　運動量と力積：$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt$

運動方程式 $m\ddot{x}(t) = F$（図 15）を時刻 t_1 から t_2 まで積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}dt = [m\dot{x}]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} Fdt \tag{85}$$

よって,「運動量の変化は外力が与えた**力積**（impulse）に等しい」

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} Fdt \tag{86}$$

という公式が導かれる．

もし，$F =$ 一定 であったり，時刻間隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ が短いため，その間に $F =$ 一定 と見なせるならば，F は積分の外に出せて

$$mv_2 - mv_1 = F\Delta t \tag{87}$$

という高校の教科書でお馴染みの形になる．

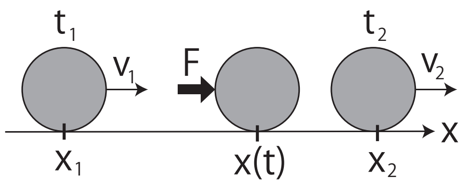

図 15: 時刻 t_1 から t_2 の間に質点に力 F が働き速度と位置が変化する様子．

4.3 運動量保存則：$m_A v_A + m_B v_B =$ 一定

2 つの質点 A と B が互いに力を及ぼし合って運動しているとする（図 16）．質点 A，B の位置を $x_A(t)$, $x_B(t)$ とおくと，運動方程式は

$$m_A \ddot{x}_A = F, \quad m_B \ddot{x}_B = -F \tag{88}$$

となる[8]．2 つの方程式を足すと

$$(m\dot{x}_A + m\dot{x}_B)^{\cdot} = F + (-F) = 0 \tag{89}$$

この式の両辺を時刻 t_1 から t_2 まで積分すると

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} (m\dot{x}_A + m\dot{x}_B)^{\cdot} dt &= [m\dot{x}_A + m\dot{x}_B]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} 0 dt = 0 \end{aligned} \tag{90}$$

したがって,「2 つの質点の運動量の和は保存される」（運動量保存則）という公式

$$mv_A(t_1) + mv_B(t_1) = mv_A(t_2) + mv_B(t_2) \tag{91}$$

は 2 つの運動方程式の和を時間で積分することで得られる．

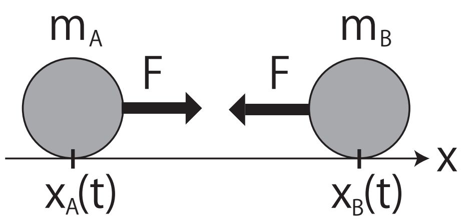

図 16: 運動方程式 (88) に対応する状況．

4.4 運動エネルギーと仕事：$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$

運動方程式 $m\ddot{x} = F$ に $\dot{x}$ を掛けると

$$m\dot{x}\ddot{x} = F\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)^{\cdot} = F\dot{x} \tag{92}$$

を得る[9]．両辺を時刻 t_1 から t_2 まで積分する

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)^{\cdot} dt &= \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt = \int_{x_1}^{x_2} F dx \end{aligned} \tag{93}$$

ただし，最後の等式では $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ とおき，**置換積分**（integration by substitution）$\int \frac{dx}{dt}dt = \int dx$ を使っている[10]．

こうして,「運動エネルギーの変化は外力によってなされる**仕事**（work）に等しい」という公式

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx \tag{94}$$

は運動方程式に速度を掛けて時間積分することで得られる（図 15）．$F =$ 一定 もしくは，距離 $\Delta x = x_2 - x_1$ が短く，その間に $F =$ 一定と見なせる場合には，F は積分の外に出るので

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\Delta x \tag{95}$$

という高校の教科書でお馴染みの形になる．

---

[8] ここで，ニュートンの運動の第 3 法則によって B が受ける力は A が受ける力の反対方向で大きさが等しいことを用いた．

[9] **積の微分法**より，$(\dot{x}^2)^{\cdot} = (\dot{x}\dot{x})^{\cdot} = \ddot{x}\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} = 2\dot{x}\ddot{x}$ に注意．

[10] これは「数学 III」で学習する 置換積分 $\int f(x)dx = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}dt$ の $f(x) = 1$ という特別な場合であり，微分の記号 $\frac{dx}{dt}$ は分数のように扱ってもよいことを表している．

表 3: 運動方程式（EOM）の積分で得られる保存則など．

保存則	導出方法
$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt$	EOM を t 積分
$m_A v_A(t_1) + m_B v_B(t_1) = m_A v_A(t_2) + m_B v_B(t_2)$	A,B の EOM を加えてから t 積分
$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$	EOM に $\dot{x}$ を乗じてから t 積分
$\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2)$	上式に $F = -U'(x)$ を代入

4.5 力学的エネルギー保存則：$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) =$ 一定

力 $F(x)$ が，ある関数 $U(x)$ の微分に負符号を付けたもので与えられるとき，$U(x)$ を**ポテンシャル**（potential），$F(x)$ を**保存力**（conservative force）という．

$$F(x) = -U'(x) \tag{96}$$

例えば,

$$U(x) = mgx \tag{97}$$

とおけば**重力**（gravitational force）を表し

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{98}$$

とおけばバネ力を表す．

力が保存力の場合には (94) の右辺を次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} F dx &= -\int_{x_1}^{x_2} U'(x)dx \\ &= -\left[U(x)\right]_{x_1}^{x_2} = U(x_1) - U(x_2)\end{aligned} \tag{99}$$

したがって,「**運動エネルギー**（kinetic energy）とポテンシャルの和は保存される」（**力学的エネルギー保存の法則**:law of conservation of mechanical energy）という公式

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2) \tag{100}$$

が (94) の特別な場合として導出された．

種々の保存則とその導き方を表3にまとめた．

5 結び

5.1 運動方程式から全てが導かれる

本稿では，ニュートンの運動方程式を微分方程式として捉えれば，公式を覚えずに多くの問題（等加速度運動，抵抗力が働く運動，ばね振り子の運動）が解けることを学んだ．また，種々の保存則（運動量と力積，運動量保存則，運動エネルギーと仕事，力学的エネルギー保存則）は運動方程式の積分形であることを学んだ．　図17はこれらをまとめたものである．本稿の各節と対比させて復習に役立てて欲しい．これらを身につければ，受験に役立つのはもちろん，大学に入ってからの数学・物理・化学・生物など様々な学習に役立つはずである．より本格的に微分積分を取り入れて力学を勉強したい人は，参考文献にあげた参考書 [2, 4] を用いるとよい．

5.2 いろいろな運動方程式

【力学】

古典力学（classical mechanics）[11] におけるニュートンの運動方程式は，質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ として

[11] 対象とする系の量子論的性質を考慮していない物理学を古典物理と呼ぶ．その点を強調したいとき力学を古典力学という．ここで紹介する物理学分野は，量子力学以外は全て古典物理である．

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), t) \tag{101}$$

のように，本来はベクトル形式で与えられる[12].

【電磁気学】

電磁気学（electromagnetism）における運動方程式は**マクスウェル方程式**（Maxwell's equations）と呼ばれ，**ガウスの法則** (102)，**電磁誘導の法則** (103)，**磁束密度の沸き出しなしの法則** (104)，**マクスウェル・アンペールの法則** (105) と呼ばれる 4 つの微分方程式から構成されている [5].

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{102}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{103}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{104}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{105}$$

これらは，与えられた**電荷分布** $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ と**電流密度分布** $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ に対して，**電場** $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ と**磁束密度** $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ を決定するための方程式である．$\frac{\partial}{\partial t}$ は時間微分を表し，$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ は空間微分を表すベクトルである．また，$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ を 2 つのベクトルとして，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ は**内積**（inner product），$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$ は**外積**（outer product）と呼ばれる積である．ε_0, μ_0 はそれぞれ**真空の誘電率**，**真空の透磁率**と呼ばれる定数である．

マクスウェル方程式のような 2 つ以上の変数による微分を含む微分方程式は**偏微分方程式**（partial differential equation）と呼ばれる．それに対して，ニュートンの運動方程式 (101) のような 1 変数による微分だけを含むものを**常微分方程式**（ordinary differential equation）と呼び区別する．

【熱力学】

熱力学（thermodynamics）においては，エネルギー収支を表す**熱力学第 1 法則** [6]

$$TdS = dE + PdV \tag{106}$$

が基本的な役割を果たす．ここで，S, E はそれぞれ，**エントロピー**，**内部エネルギー**である．dX は熱力学量 X の微少量を表す．

【流体力学】

液体（liquid）や**気体**（gas）の運動を記述するのが**流体力学**（fluid mechanics）である．流体の運動方程式は，**ナヴィエ・ストークス方程式**（Navier-Stokes equation）[7] と呼ばれ，流体の速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ に対する偏微分方程式である．

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\right)\boldsymbol{v} = -\nabla P + \eta(\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \tag{107}$$

ここで，$\rho, P(\boldsymbol{x}, t), \eta$ はそれぞれ流体の**密度**（density），**圧力**（pressure），**粘性率**（viscosity）である．ナヴィエ・ストークス方程式も偏微分方程式であるが，解くことが難しいため，一般的な条件の下で解の存在と滑らかさを証明することは，クレイ数学研究所におけるミレニアム懸賞問題（賞金 100 万ドル）になっている[13].

【量子力学】

原子レベルのミクロな世界は**量子力学**（quantum mechanics）で記述される [8]．量子力学における運動方程式は，ニュートンの運動方程式 (101) ではなく**シュレディンガー方程式**（Schrödinger equation）(108) となる．

[12] 大学ではベクトルを矢印 $\vec{a}$ ではなく，太字 $\boldsymbol{a}$ で表す．

[13] クレイ数学研究所のウェブサイトに正式な問題の記述が掲載されている：http://www.claymath.org/millennium-problems/navier-stokes-equation

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot\nabla+U(\boldsymbol{r},t)\right)\psi \qquad (108)$$

ここで，$i=\sqrt{-1}$，$\hbar=\frac{h}{2\pi}$（$h=6.63\times10^{-34}\ \mathrm{m^2kg/s}$ は**プランク定数**）である．シュレディンガー方程式は，質量が m の粒子が，ポテンシャル $U(\boldsymbol{r},t)$ 中に放たれたとき，その粒子がいつどこにどのような確率で存在するのかを教えてくれる偏微分方程式であり，複素数値をとる**波動関数**（wave function）$\psi(\boldsymbol{r},t)$ の絶対値の 2 乗 $|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2$ が粒子の**確率密度**（probability density）（単位体積当たりの存在確率）を表している．

【一般相対論】

ニュートン力学も重力を記述できるが，強い重力の記述には**一般相対論**（theory of general relativity）が必要である [9, 10]．一般相対論によれば，重力は**時空**（spacetime）（時間と空間）の歪（ゆが）みである．したがって，一般相対論における運動方程式である**アインシュタイン方程式**（Einstein equation）(109) は時空の運動方程式ということになる．

$$G_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad (109)$$

アインシュタイン・テンソル $G_{\mu\nu}$ は時空の**曲率**（curvature），**エネルギー・運動量テンソル** $T_{\mu\nu}$ は時空に存在する物質のエネルギーや運動量の分布を表している．アインシュタイン方程式を解くことで，**宇宙**（universe）は膨張していること，重たい星はやがて**ブラックホール**（black hole）になること，天体どうしの衝突で**重力波**（gravitational wave）が発生することなどがわかる．アインシュタイン方程式 (109) はナヴィエ・ストークス方程式 (107) より遙かに解くのが難しいため，懸賞問題にさえなっていない．

アインシュタイン方程式は偏微分方程式であるが，時空に高い対称性がある場合には常微分方程式になることもある．そのような例として，宇宙全体のダイナミクスを考えてみる．

宇宙空間に x,y,z 座標を張る．点 (x,y,z) とそこから少し離れた点 $(x+dx,y+dy,z+dz)$ の間の物理的距離 ds は

$$ds=a(t)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \qquad (110)$$

で与えられることが知られている．t は宇宙が始まってからの時間であり，$a(t)$ が宇宙の大きさを決める時間の関数である．一般相対論 [10] によれば，$a(t)$ の運動方程式は次のようになる

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho(t)+3P(t)) \qquad (111)$$

ここで，$\rho(t),P(t)$ は宇宙空間を満たす物質の**エネルギー密度**と**圧力**である．この運動方程式を解くと宇宙の大きさの時間発展を知ることができる．

もしも ρ,P が一定ならば，この運動方程式は単振り子の運動方程式 $\ddot{x}=-\omega^2x$ と同型であり，$a(0)=0,\dot{a}(0)\neq0$ とすれば，$\sin\omega t$ 型の解になることが解る．ただし，実際には時間と共に ρ と P が減少するため，次第に膨張速度は弱まるものの収縮には転じない．

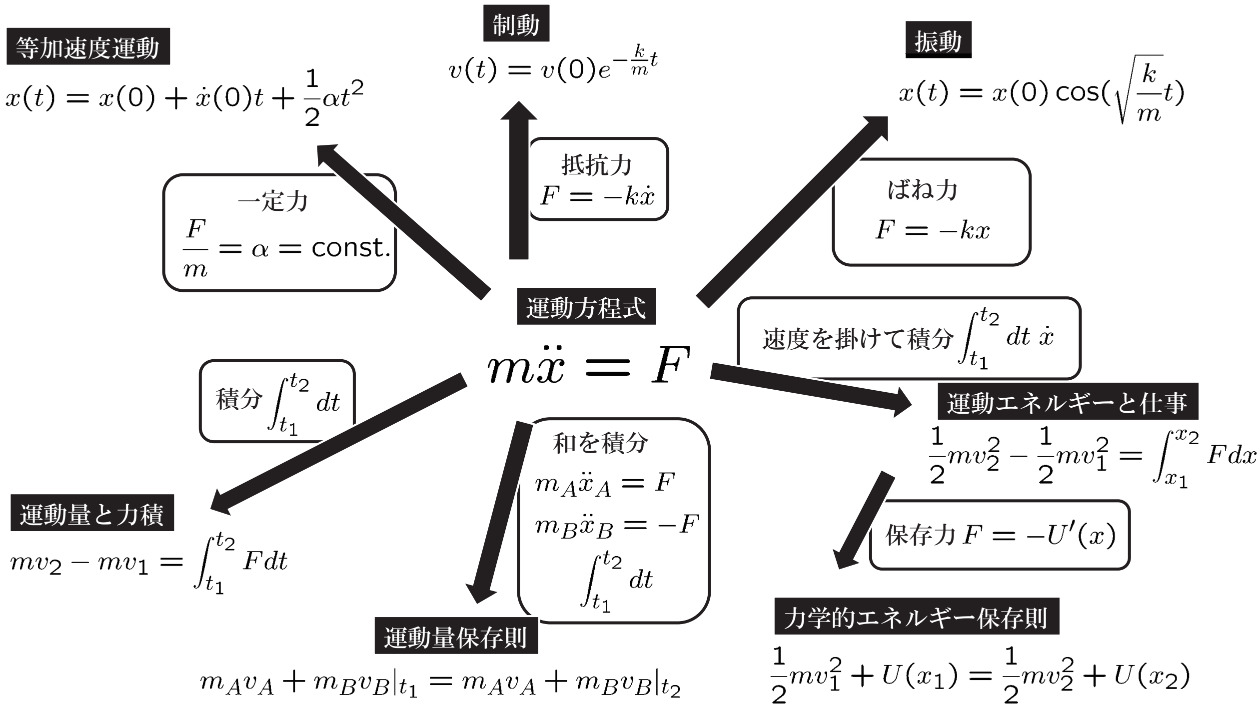

図 17: 本稿のまとめ．運動方程式（$m\ddot{x}(t) = F$）を積分することで，速度 $v(t) = \dot{x}(t)$ や位置 $x(t)$ が時間の関数としてわかる（公式を覚えるのはやめよう）．また，運動方程式を積分することで，運動量とエネルギーに関する保存則が導かれる（運動方程式と独立な法則があるわけではない）．

参考文献

[1] 矢野健太郎，石原繁（1965）.『解析学概論（新版）』裳華房

[2] 兵頭俊夫（2001）.「考える力学」学術図書出版

[3] 大矢雅則ほか（2016）.『改訂版　新編数学 III』数研出版

[4] 山本義隆（2004）.「新・物理入門　増補改訂版」駿台文庫

[5] 小宮山進，竹川敦（2015）.『マクスウェル方程式から始める電磁気学』裳華房

[6] 原島彰（1978）.『熱力学・統計力学』培風館

[7] 巽友正（1995）.『連続体の力学』岩波書店

[8] 砂川重信（1991）.『量子力学』岩波書店

[9] 内山龍雄（1977）.『一般相対性理論』岩波書店

[10] 佐々木節（1996）.『一般相対論』産業図書