3. ソート問題とアルゴリズム

1

3－1：ソート問題

- 入力：データ数nとn個の数

$$n, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$$

（ここで、入力サイズは、n とします。）

- 出力：

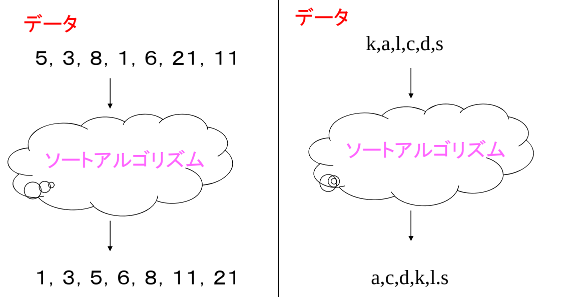
$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ を小さい順にならべたもの

$$a'_0, a'_1, \cdots, a'_{n-1} (a'_0 \leq a'_1 \leq \cdots \leq a'_{n-1})$$

ここで、$(a'_0, a'_1, \cdots, a'_{n-1})$ は、
$(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ の置換

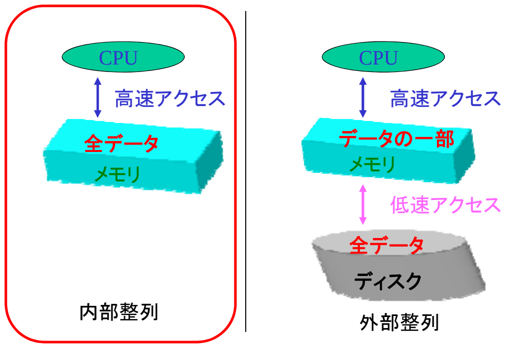
2

ソートの問題例（問題インスタンス）



3

内部整列と外部整列



4

仮定と要求

内部整列

どのデータにも均等な時間でアクセスできる。
できるだけ高速に整列したい。

（理想的な計算機上のアルゴリズムではこっち）

外部整列

CPUーメモリ間のデータ転送速度より、
ディスクーメモリ間のデータ転送速度が極端に遅い。
全体の整列をできるだけ高速にしたい。
（ディスクーメモリ間のデータ転送をあまり行わないようにする。現実的な問題だが、より複雑な解析が必要である。）

5

ソート問題の重要性

- 実際に頻繁に利用される。
- アルゴリズム開発の縮図
  - 繰り返しアルゴリズム（バブルソート、挿入ソート等）
  - アルゴリズムの組み合わせ（選択ソート、マージソート等）
  - 分割統治法（マージソート、クイックソート等）
  - データ構造の利用（ヒープソート、2分探索木等）
- 十分な理論解析が可能。
  - 最悪計算量と平均計算量の違い（クイックソート）
- 豊富なアイディア

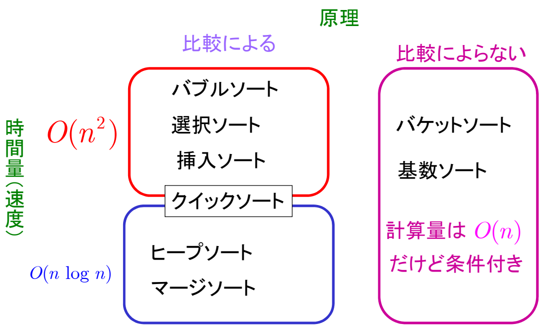
6

ソートアルゴリズムの種類

- バブルソート
- 選択ソート
- 挿入ソート
- クイックソート
- マージソート
- ヒープソート
- バケットソート
- 基数ソート

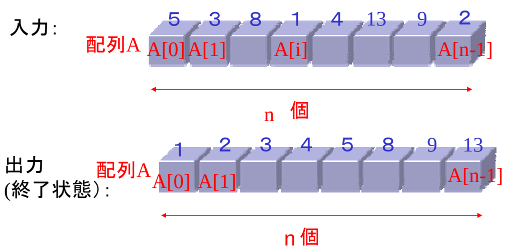
7

ソートアルゴリズムの分類



8

入出力形態



入力は配列で与えられるとする。

9

交換関数(準備)

```
/* 交換用の関数。
   swap(&a,&b)で呼び出す。
*/
void swap(double *a,double *b)
{
    double   tmp;  /* データの一次保存用*/

     tmp=*a;
    *a=*b;
    *b=tmp;

    return;
}
```

参照渡しにする必要があることに注意すること。

10

3－2:簡単なソートアルゴリズム

11

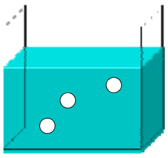
バブルソート

12

バブルソートの方針

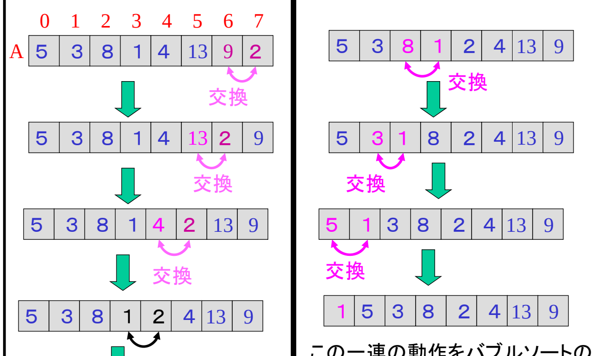
方針

- 隣同士比べて、小さいほうを上（添字の小さい方）に順にもっていく。
- 先頭の方は、ソートされている状態にしておく。
- これらを繰り返して、全体をソートする。



13

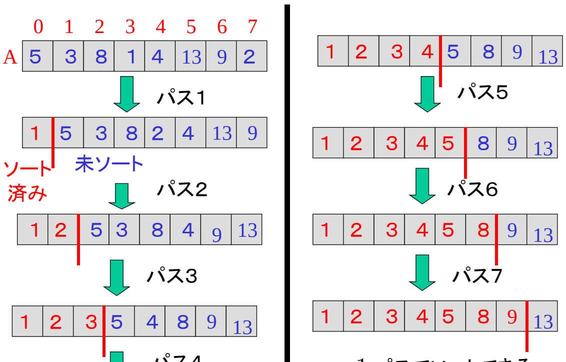
バブルソートの動き1



この一連の動作をバブルソートの「パス」といいます。

14

バブルソートの動き2



$n-1$ パスでソートできる。 15

練習

次の配列を、バブルソートでソートするとき、
全てのパスの結果を示せ。

11	25	21	1	8	3	16	5

16

バブルソートの実現

```
/* バブルソート*/
1. void bubble()
2. {
3.     int i,j;   /* カウンタ*/
4.     for(i=0;i<n-1;i++)
5.         {
6.             for(j=n-1;j>i;j--)
7.                 {
8.                     if(A[j-1]>A[j])
9.                         {
10.                            swap(&A[j-1],&A[j]);
11.                        }
12.                }
13.        }
14.    return;
15.}
```

j＞0としてもいいが時間計算量が約2倍になる

17

命題B1（boubbleの正当性1）

内側のforループ（ステップ6）がk回繰り返されたとき、
A[n-k]からA[n-1]までの最小値が
A[n-k]に設定される。

証明

k-1回の繰り返しによって、
A[n-k-1]にA[n-k-1]からA[n-1] までの最小値が
保存されているこのに注意する。
したがって、k回目の繰り返しにより、

$$\min\{A[n-k], A[n-k-1]\}$$

$$= \min\{A[n-k], \min\{A[n-k-1], \cdots, A[n-1]\}\}$$

がA[n-k]に設定される。
（より厳密な数学的帰納法で証明することもできるが、
ここでは省略する。）　QED

18

命題B2(boubbleの正当性2)

4.のforループがk回繰り返されたとき、
(すなわち、パスkまで実行されたとき、)
前半のk個(A[0]-A[k-1])
は最小のk個がソートされている。

証明

各パスkにおいては、A[k-1]からA[n-1]の最小値が、
A[k-1]に設定される。(命題B1より)
このことに注意すると、数学的帰納法により、
証明できる。(厳密な証明は省略する。)

QED 19

バブルソートの計算量

パス1で、n-1回の比較と交換
パス2で、n-2
・
・
・
パスn-1で、1回の比較と交換

よって、 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}$

時間計算量 $O(n^2)$ のアルゴリズム

領域計算量は $O(n)$。

20

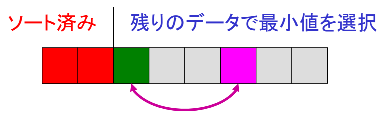
選択ソート

21

選択ソートの方針

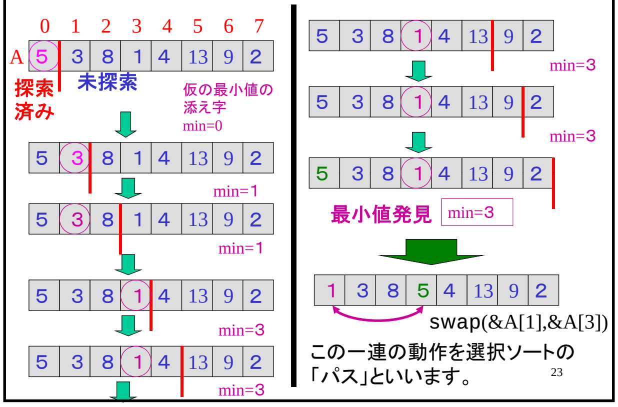
方針

- 先頭から順に、その位置に入るデータを決める。
(最小値を求める方法で選択する。)
- その位置のデータと選択されたデータを交換する。
- これらを繰り返して、全体をソートする。



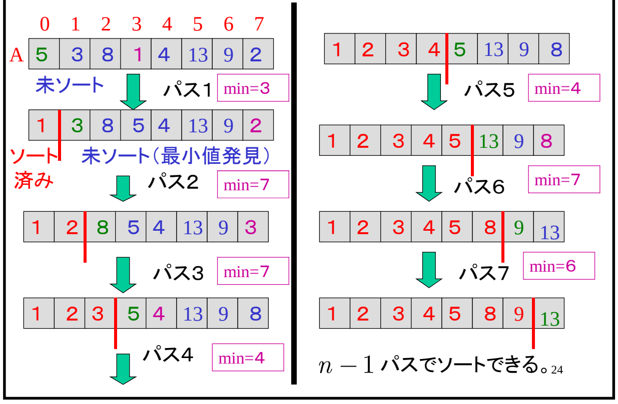
22

選択ソートの動き1(最小値発見)



この一連の動作を選択ソートの「パス」といいます。 23

選択ソートの動き2



$n-1$ パスでソートできる。 24

練習

次の配列を、選択ソートでソートするとき、
全てのパスの結果を示せ。

11	25	21	1	8	3	16	5

25

選択ソートの実現1 (最小値を求めるアルゴリズム)

```
/*選択用の関数、A[left]からA[right]
までの最小値を求める*/
1. int  find_min(int left,int right)
2. {
3.     int  min=left;   /* 仮の最小値の添字*/
4.     int  j=left;   /* カウンタ */
5.
6.     min=left;
7.     for(j=left+1;j<=right;j++)
8.       {
9.         if(a[min]>a[j]){min=j;}
10.      }
11.    return  min;
12.}
```

26

選択ソートの実現2

```
/*  選択ソート*/
1. void slection_sort()
2. {
3.     int  i;   /* カウンタ*/
4.     int  min;   /* 最小値の添字*/
5.     for(i=0;i<n-1;i++)
6.         {
7.             min=find_min(i,n-1);
8.             swap(&A[i],&A[min]);
9.         }
10.    return;
11.}
```

なお、説明の都合上、関数find_minを作ったが、
関数呼び出しで余分に時間がとられるので、
実際は2重ループにするほうが速いと思われる。
(でも、オーダーでは、同じ。)

27

命題S1(選択ソートの正当性1)

find_min(left,right)は、A[left]-A[right]間の
最小値を添え字を求める。

証明

1回目の資料の命題1と同様に証明される。

QED 28

命題S2(選択ソートの正当性2)

5. のforループがi+1回繰り返されたとき、
(パスiまで実行されたとき、)
A[0]-A[i]には、小さい方からi+1個の要素が
ソートされてある。

証明

先の命題S1を繰り返して適用することにより、
この命題S2が成り立つことがわかる。
(厳密には数学的帰納法を用いる。)

QED 29

選択ソートの計算量

パス1　find_minで、n-1回の比較
パス2　　　　　　　n-2
・
・
・
パスn-1のfind_minで、1回の比較

よって、$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}$ 回の比較

交換は、n-1回

時間計算量 $O(n^2)$ のアルゴリズム
領域計算量は $O(n)$。

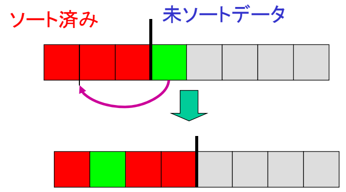
30

挿入ソート

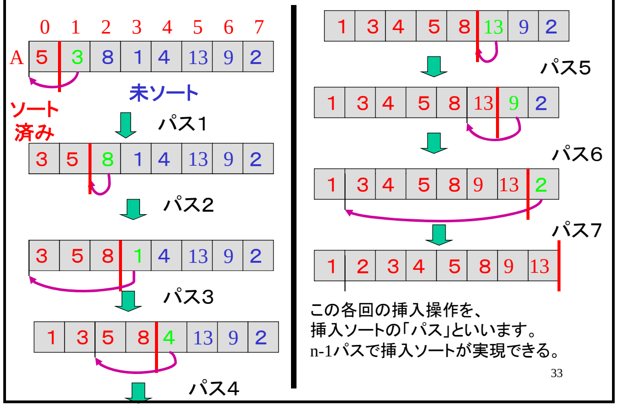
挿入ソートの方針

方針

- 先頭の方は、ソート済みの状態にしておく。
- 未ソートのデータを、ソート済みの列に挿入し、ソート済みの列を1つ長くする。
- これらを繰り返して、全体をソートする。

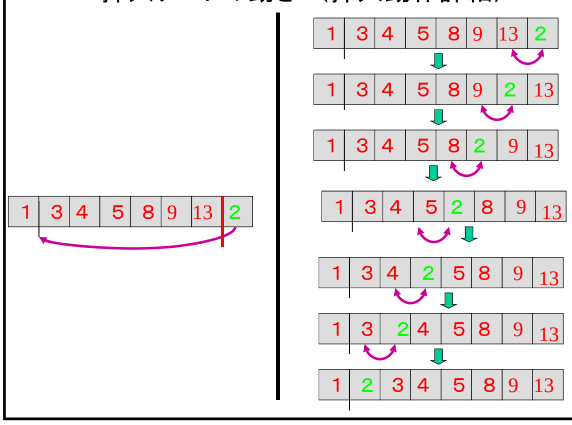


挿入ソートの動き1



この各回の挿入操作を、
挿入ソートの「パス」といいます。
n-1パスで挿入ソートが実現できる。

挿入ソートの動き2（挿入動作詳細）



練習

次の配列を、挿入ソートでソートするとき、
全てのパスの結果を示せ。

11	25	21	1	8	3	16	5

挿入ソートの実現1
（挿入位置を求める）

```
/*挿入位置を見つける関数、
A[left]からA[right-1]までソート済みのとき、
A[right]の順番を求める。*/
int  find_pos(int left,int right)
{
    int  j=left;       /* カウンタ */

    for(j=left;j<=right;j++)
        {
            if(A[j]>A[right]){break;}
        }
    return  j;
}
```

挿入ソートの実現2(挿入)

```
/*  挿入(A[right]をA[pos]に挿入する。)*/
1. void insert(int pos,int right)
2. {
3.      int  k=right-1;   /* カウンタ*/
4.      for(k=right-1;k>=pos;k--)
5.        {
6.           pos=find_pos(i,A);
7.           for(j=n-1;j<pos;j--)
8.             {
9.                 swap(&A[k],&A[k+1]);
10.            }
11.       }
12.    return;
13.}
```

37

挿入ソートの実現3(繰り返し挿入)

```
/*  挿入ソート*/
1. void insertion_sort()
2. {
3.      int  i=0;   /* カウンタ(パス回数)*/
4.      int  pos=0;  /*挿入位置*/
5.      for(i=1;i<n;i++)
6.        {
7.           pos=find_pos(0,i);
8.           insert(pos,i);
9.        }
10.    return;
11.}
```

38

命題I1(挿入ソートの正当性)

5. のforループがi回繰り返されたとき、(パスiまで実行されたとき、)A[0]からA[i]はソートされてある。

証明

挿入find_posによって、挿入位置を適切に見つけている また、insertによって、すでにソート済みの列を崩すことなくソート済みの列を1つ長くしている。したがって、iの繰り返しでは、i+1個のソート列が構成される。これらのソート列は、A[0]-A[i]に保持されるので、命題は成り立つ。

QED

39

命題I2(挿入ソートの停止性)

insertion_sortは停止する。

証明

各繰り返しにおいて、ソート列が一つづつ長くなる。入力データはn個であるので、n-1回の繰り返しにより、必ず停止する。

QED

40

挿入ソートの計算量

パス1で、1回の比較あるいは交換
パス2で、2回の
・
・
・
パスn-1で、n-1の比較あるいは交換

よって、 比較と交換回数の合計は、

$$1+2+\cdots+(n-1)=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n(n-1)}{2}$$

時間計算量 $O(n^2)$ のアルゴリズム

領域計算量は $O(n)$。

(挿入ソートを元に高速化した、シェルソートっていうものもあるが省略。)

41

簡単なソートのまとめ (最悪時間計算量)

方法	比較	交換	合計
バブルソート	$\frac{n(n-1)}{2}=O(n^2)$	$\frac{n(n-1)}{2}=O(n^2)$	$n(n-1)=O(n^2)$
選択ソート	$\frac{n(n-1)}{2}=O(n^2)$	$n-1=O(n)$	$\frac{(n-1)(n+2)}{2}=O(n^2)$
挿入ソート	$\frac{n(n-1)}{2}=O(n^2)$	$\frac{n(n-1)}{2}=O(n^2)$	$\frac{n(n-1)}{2}=O(n^2)$

42

3−3:高度なソートアルゴリズム①
（分割統治法にもとづくソート）

43

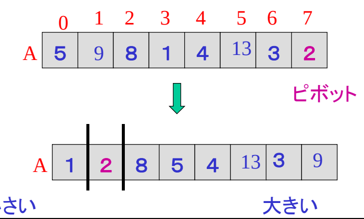
クイックソート

44

クイックソートの方針

方針

- 問題を小分けにして、あとで組み合わせる。（分割統治法）
- 前半部分に特定要素（ピボット）より小さい要素を集め、後半部分にピボットより大きく要素を集める。
- ピボットの位置を確定し、小分けした問題は、再帰的にソートする。



45

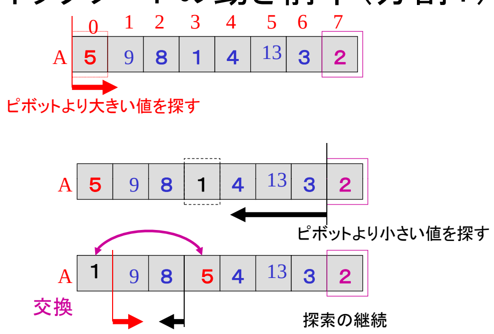
説明上の注意

- 全てのデータが異なるとして、説明します。
- クイックソートのアルゴリズムでは、ピボットの選び方にあいまいさがあります。（自由度といったほうがいいかも。）ここでは、ソート範囲の最後の要素をピボットとして説明します。

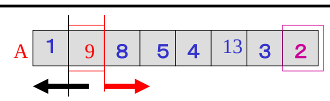
実際に、
プログラミングするときは、
もっといろんな状況を考えましょう。

46

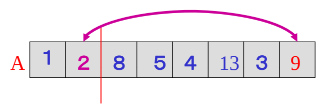
クイックソートの動き前半（分割1）



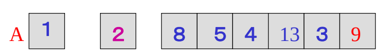
47



探索が交差したら分割終了。



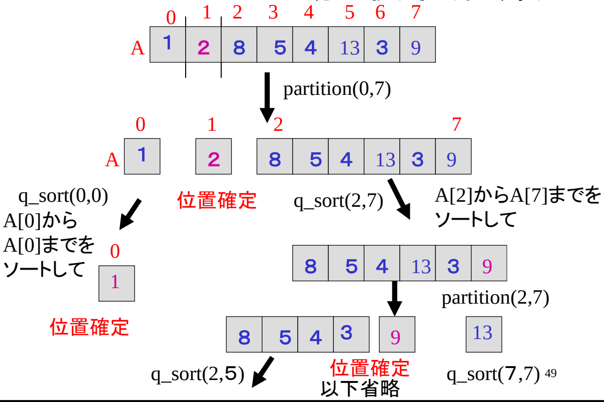
ピボットと前半最後の要素を交換し、
あとは再帰呼び出し。



ピボットは位置確定

48

クイックソートの動き後半(再帰)



練習

次の配列を、クイックソートでソートするとき、
前のスライドに対応する図を作成せよ。

11	25	21	1	8	3	16	5

クイックソートの実現1(分割)

```
/*概略です。細かい部分は省略*/
1. int partition(int left,int right)
2. {
3.     int   i,j;        /*カウンタ*/
4.     i=left;
5.     j=right-1;
6.     while(TRUE){
7.         while(A[i]<pivot){i++;}
8.         while(A[j]>pivot){j--;}
9.         if(i>=j){break;}
10.        swap(&A[i],&A[j]);
11.    }
12.    swap(&A[i],&A[right]);
13.    return(i);
14.}
```


クイックソートの実現2(再帰)

```
/*概略です。細かい部分は省略*/
1. void q_sort(int  left,int  right)
2. {
3.     int  pos;     /*分割位置  */
4.     if(left>=right)
5.       {
6.         return;
7.       }
8.     else
9.       {
10.        pos=partition(left,right);
11.        q_sort(left,pos-1);
12.        q_sort(pos+1,right);
13.        return;
14.      }
15.}
```


命題Q1(クイックソートの停止性)

q_sort(left,right)は必ず停止する。

証明

$left \leq pos \leq right$ が常に成り立つことに注意する。

$k \equiv right - left$ に関する帰納法で証明する。

基礎: $k \leq 0$ のとき。

このときは、明らかにステップ6により終了する。

帰納: $k \geq 1$ のとき。

$0 \leq k' < k$ なる全ての整数に対して、q_sort(left,left+k')が終了すると仮定する。(帰納法の仮定。)

q_sort(left,left+k)の停止性を考える。

このとき、else節(10-13)が実行される。

ステップ10で得られる pos の値に対して、

$$left \leq pos \leq left + k$$

が成り立つ。

ステップ11で呼び出すq_sort(left,pos-1)において、
その適用される列の長さは

$$pos - 1 - left \leq left + k - 1 - left = k - 1 < k$$

である。
したがって、帰納法の仮定より、
q_sort(left,pos-1)は停止する。

ステップ12で呼び出すq_sort(pos+1,left+k)において、
その適用される列の長さは

$$left + k - (pos + 1) \le left + k - left - 1 = k - 1 < k$$

である。
したがって、帰納法の仮定より、
q_sort(pos+1,left+k)は停止する。

以上より、ステップ10-13の全ての行において、
かく再帰式は停止する。
したがって、アルゴリズムq_sort(left,right)は停止する。

QED

55

停止しないクイックソート

例えば、次のようなクイックソート(?)は、
停止するとは限らない。

```
if(left>=right)
  {
     return;
  }
else
  {
     pos=partition(left,right);
     q_sort(left,pos);
     q_sort(pos,right);
     return;
  }
}
```

サイズが小さくなるとは限らない。

56

命題Q2(クイックソートのの正当性1)
ピボットに選択された値は、partition実行により、
ソート済みの順列と同じ位置に設定される。

証明 ソート済みの順列を L_S とし、
アルゴリズムの途中の順列を L とする。
また、ピボット p の各順列における順位をそれぞれ、
$L_S(p)$ 、$L(p)$ と表すものとする。

このとき、L_S において、 p 未満の要素数は $L_S(p)-1$ であり、
p より大きい要素数は $n-L_S(p)-1$ である。
一方、L における p 未満の要素数は $L(p)-1$ であるが、
これは $L_S(p)-1$ と同じはずである。
したがって、

$$L_S(p) = L(p)$$

QED

57

命題Q3(クイックソートのの正当性2)
全ての要素はピボットに選択されるか、あるいは
列の長さ1の再帰呼び出しにより位置が決定される。

証明

再帰呼び出しにおいて、サイズが減少することに
注意すると、ピボットとして選ばれるか、サイズが
1の再帰呼び出しされる。

QED

58

クイックソートの計算量

クイックソートは、
最悪時の計算量と平均の計算量が異なります。
これらは、
ピボットの選び方にもよりますが、
どんな選び方によっても最悪のデータ初期配置があります。

ここでは、最悪計算量と、平均計算量の両方を考えます。

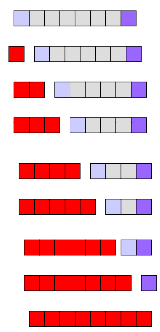
59

クイックソートの最悪計算量

まず、関数partition(i,j)の1回の時間量は、
j-i+1に比例した時間量です。
再帰の同じ深さで、parttition()の時間量を
総計すると $O(n)$ になります。

いつも0個、ピボット、残りのように
分割されるのが最悪の場合です。
つまり、ピボットとしていつも最小値が
選択されたりするのが最悪です。
(他にも最悪の場合はあります。)
このときでも、partition(i,j)の実行に
は、j-i+1回の演算が必要です。
これは、結局選択ソートの実行と同じ
ようになり、

最悪時間計算量 $O(n^2)$ のアルゴリズム。



クイックソートの平均時間計算量

- クイックソートの平均時間の解析は、複雑である。
- 順を追って解析する。

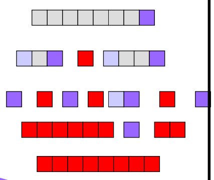
61

漸化式の導出

初期状態として、$n!$ 通りの並びがすべて等確率だとしましょう。
クイックソートの時間量を $T(n)$ とします。

ピボットが i 番目のときには、以下の漸化式を満たす。

$$T(n) \le T(i-1) + T(n-i) + c_1(n-1)$$



小さい方の分割を再帰的にソートする分

大きい方の分割を再帰的にソートする分

partition()分

ピボットの順位は、n通り全て均等におこるので、それらを総和して、nで割ったものが平均時間量

$$T(n) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{T(i-1) + T(n-i) + c_1(n-1)\}$$

62

したがって、入力順列がすべて均等に起こるという仮定では、クイックソートの平均時間計算量は、次の漸化式を満たす。

$$\begin{cases} T(0) = c_2 & n = 0 \\ T(n) \le \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\{T(i-1) + T(n-i) + c_1(n-1)\} & n > 0 \end{cases}$$

63

漸化式の解法

漸化式における再帰式を個々に分解して調べる。

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{T(i-1) + T(n-i) + c_1(n-1)\}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{T(i-1)\} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{T(n-i)\} + \frac{c_1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(n-1)\}$$

まず、

$$\frac{c_1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(n-1)\} = \frac{c_1}{n}\left(\underbrace{(n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1)}_{n}\right)$$
$$= \frac{c_1}{n}\{n(n-1)\}$$
$$= c_1(n-1)$$

64

次に、

$$\sum_{i=1}^{n}\{T(i-1)\} = T(0) + T(1) + \cdots + T(n-1)$$
$$\sum_{i=1}^{n}\{T(n-i)\} = T(n-1) + T(n-2) + \cdots + T(0)$$
$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\{T(i-1)\} = \sum_{i=1}^{n}\{T(n-i)\}$$

したがって、

$$T(n) \le \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\{T(i)\} + c_1(n-1)$$

$$\therefore nT(n) \le 2\sum_{i=0}^{n-1}\{T(i)\} + c_1 n(n-1)$$

n に $n-1$ を代入して、

$$(n-1)T(n-1) \le 2\sum_{i=0}^{n-2}\{T(i)\} + c_1(n-1)(n-2)$$

65

両辺の差をとる。

$$nT(n) - (n-1)T(n-1) \le 2T(n-1) + c_1 n(n-1) - c_1(n-1)(n-2)$$
$$\therefore nT(n) - (n+1)T(n-1) \le c_1 2(n-1)$$

両辺を $n(n+1)$で割る。

$$\frac{T(n)}{n+1} - \frac{T(n-1)}{n} \le c_1 2\frac{(n-1)}{n(n+1)} \le 2c_1\frac{n+1}{n(n+1)} = 2c\frac{1}{n}$$

この式を辺々加える。

66

$$\frac{T(n)}{n+1} - \cancel{\frac{T(n-1)}{n}} \le 2c_1 \frac{1}{n}$$
$$\cancel{\frac{T(n-1)}{n}} - \cancel{\frac{T(n-2)}{n-1}} \le 2c_1 \frac{1}{n-1}$$
$$\vdots$$
$$\cancel{\frac{T(3)}{4}} - \cancel{\frac{T(2)}{3}} \le 2c_1 \frac{1}{3}$$
$$+)\quad \cancel{\frac{T(2)}{3}} - \frac{T(1)}{2} \le 2c_1 \frac{1}{2}$$
$$\therefore \frac{T(n)}{n+1} - \frac{c_2}{2} \le 2c_1\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2}\right) = 2c_1(H_n - 1)$$

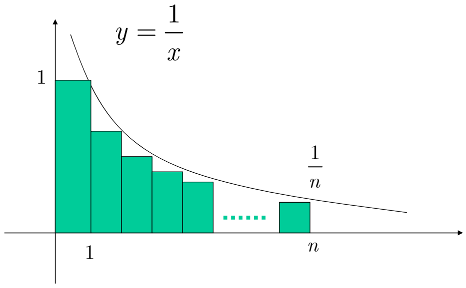
ここで、

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

調和級数 (Harmonic **Series**)

67

調和級数の見積もり



$$H_n - 1 < \int_{x=1}^{n} \frac{1}{x} dx = \log_e n$$

68

$$\therefore \frac{T(n)}{n+1} - \frac{c_2}{2} \le 2c_1(H_n - 1) < 2c_1 \log_e n$$
$$\therefore T(n) \le 2c_1(n+1)\log_e n + \frac{c_2}{2}(n+1)$$
$$\therefore T(n) = O(n \log n)$$

以上より、クイックソートの平均計算時間量は、

$$O(n \log n)$$

である。

69

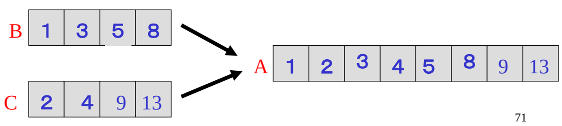
マージソート

70

マージソートの方針

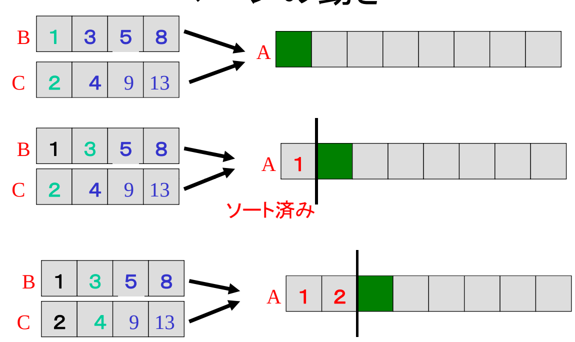
方針

- 問題を小分けにして、あとで組み合わせる。(分割統治法)
- 小分けした問題は、再帰的にソートする。
- もしソートされた2つの配列があれば、それらのそれらを組み合わせて、大きいソートの列をつくる。(マージ操作)
- 1要素だけの列はソート済みとみなせる。



71

マージの動き



72

分割

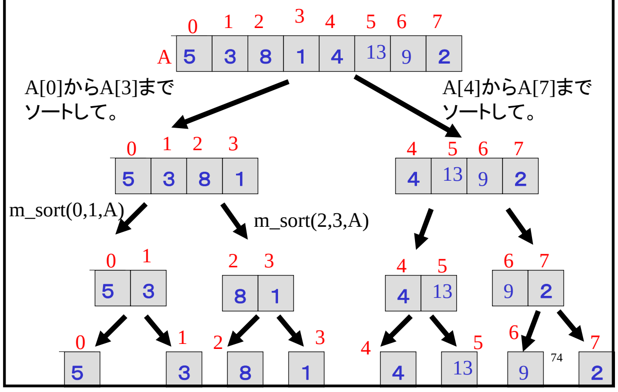
- もし2つのソート列があったら、
マージ操作によって、長いソート列がえられることが
わかった。
- どうやって、2つのソート列を作るのか？

おなじ問題で、
問題のサイズが小さくなっていることに
注意する。

列を二等分にして、再帰的にソートする。

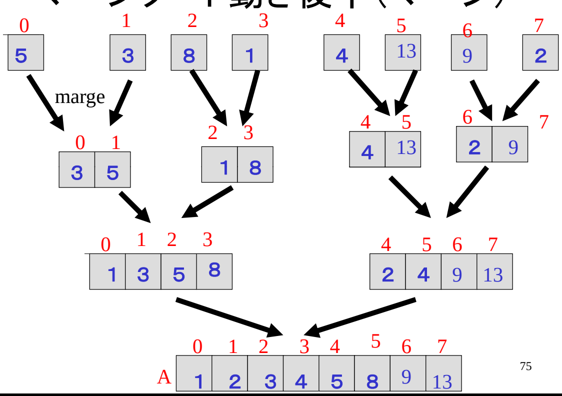
73

マージソート動き前半（分割）



74

マージソート動き後半（マージ）



75

練習

次の配列を、マージソートでソートするとき、
前のスライドに対応する図を作成せよ。

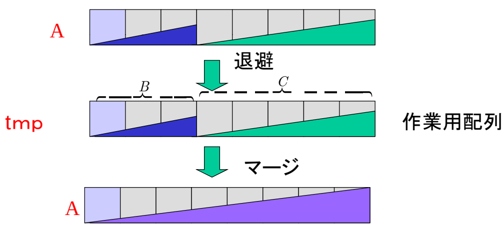
11	25	21	1	8	3	16	5

76

マージに関する注意

マージでは、配列の無いようをいったん別の作業用
配列に蓄える必要がある。

作業用の配列が必要



77

データ退避の実現

```
/* A[left]-A[right]をtmp[left]-tmp[right]に書き出す。*/
void write(int left,int right)
{
        int i;
        for(i=left;i<=right;i++){
            tmp[i]=a[i];
        }
        return;
}
```

78

マージの実現

```
/* tmp[left]-tmp[mid]とtmp[mid+1]-tmp[right]を
A[left]-A[right]にマージする。(細かい部分は省略)*/
void marge(int)
{
   int l=left,r=mid+1;/*tmp走査用*/
   int i=left;/*A走査用*/
        for(i=left;i<=right;i++){
           if(tmp[l]<=tmp[r ] && l<=mid){
                A[i]=tmp[l];l++;
           }else if(tmp[r]<tmp[l] && r<= right){
                A[i]=tmp[r];r++;
           }else if(l>mid){
                A[i]=tmp[r];r++;
           }else if(r>right){
                A[i]=tmp[l];l++;
           }
        }
        return;
}
```


マージソートの実現

```
/*概略です。細かい部分は省略*/
void merge_sort(int  left,int  right)
{
    int  mid;       /*中央*/
   if(left>=right){
          return;
   }else{
        mid=(left+right)/2;

        merge_sort(left,mid);
        merge_sort(mid+1,right);

        write(left,right);
        merge(left,mid,right);
        return;
   }
}
```


命題M1(マージの正当性)

マージにより、2つの短いソート列から、
一つの長いソート列が得られる。

証明

配列Aの走査用のカウンタに関する帰納法で
証明することができる。(厳密な証明は省略)

QED

命題M2(マージソートの正当性)

マージソートにより、配列が昇順にソートされる。

証明

再帰の深さに関する帰納法や、
あるいはソートされている部分列の長さに関する帰納法
で証明できる。(厳密な証明は省略。)

QED

命題M3(マージソートの停止性)

マージソートは停止する。

証明

再帰呼び出しにおいて、必ずサイズが小さくなる(約半分)
ことに注意する。
また、要素数が1以下の時には、停止することにも注意する。
これらの考察から、帰納法で証明できる。
(厳密な証明は省略。)

QED

マージソートの計算量

まず、マージの計算量$M(n)$を考えます。

明らかに、出来上がるソート列の長さに比例した時間量です。

$$\therefore M(n) = O(n)$$

マージソートの時間量を $T(n)$ とします。

以下の再帰式を満たします。

$$\begin{cases} T(1) = c_1 \\ T(n) \le T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{2}) + M(n) = 2T(\frac{n}{2}) + c_2 n \end{cases}$$

解析を簡単にするため、データを $n=2^k$ 個あると仮定します。

$$\begin{cases} T(1)=c_1 \\ T(n)\le 2T(\frac{n}{2})+c_2 n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T'(0)=c_1 \\ T'(k)\le 2T'(k-1)+c_2 2^k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T'(k) &\le 2T'(k-1)+c_2 2^k \\ &\le 2(2T'(k-2)+c_2 2^{k-1})+c_2 2^k = 4T'(k-2)+2c_2 2^k \\ &\le 4(2T'(k-3)+c_2 2^{k-2})+2c_2 2^k = 8T'(k-3)+3c_2 2^k \\ &\vdots \\ &\le 2^k T'(0)+c_2 k 2^k = (c_1+c_2 k)2^k \end{aligned}$$

$$\therefore T(n)\le n(c_2\log n+c_1)=c_2 n\log n+c_1 n$$
$$\therefore T(n)=O(n\log n)$$

85

$n\ne 2^k$ であるような一般の入力サイズに対しては、もう一段階解析の途中を考察する。

任意の n に対して、$2^l\le n<2^{l+1}$ を満たす l が必ず存在する。

よって、 $T(2^l)\le T(n)<T(2^{l+1})$

$$\therefore T(n)\le T(2^{l+1})=\{c_1+c_2(l+1)\}2^{l+1}$$

一方 $l\le\log n<l+1$

$$\therefore \log n-1<l\le\log n$$

したがって、$\therefore T(n)\le\{c_1+c_2(\log n+1)\}2^{\log n+1}$

$$\begin{aligned} &=2c_1 n+2c_2 n\log n+2c_2 n \\ &=2c_2 n\log n+2n(c_1+c_2) \end{aligned}$$
$$\therefore T(n)=O(n\log n)$$

86

結局、どのような入力に対しても、マージソートの最悪時間計算量は、

$$O(n\log n)$$

である。

87

分割統治法について

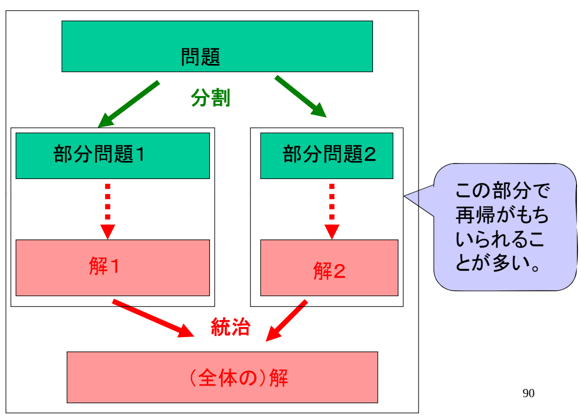
88

分割統治法とは

- 元の問題をサイズの小さいいくつかの部分問題に分割し、
- 個々の部分問題を何らかの方法で解決し、
- それらの解を統合することによって、元の問題を解決する方法のことである。
- (分割統治法に基づくアルゴリズムは、再帰を用いると比較的容易に記述することができる。)

89

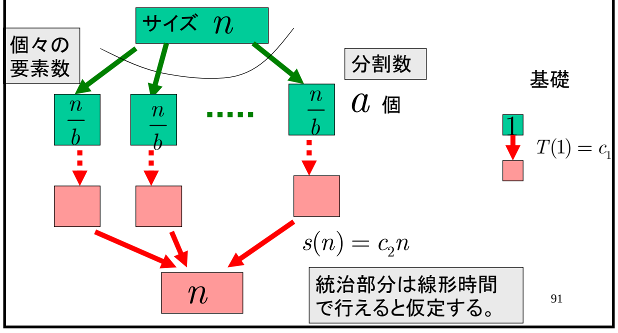
分割統治法のイメージ



90

分割統治法の時間計算量

ここでは、より一般的な分割統治法における計算量を考察する。



91

一般的な分割統治法における時間計算量$T(n)$は、次の漸化式で表されることが多い。

$$\begin{cases} T(1)=c_1 & (n=1) \\ T(n)=aT\left(\frac{n}{b}\right)+c_2 n & (n>1) \end{cases}$$

この漸化式を解く。

$$T(n)=aT\left(\frac{n}{b}\right)+c_2 n$$

$\frac{n}{b}$ を代入して次式を得る。

$$T\left(\frac{n}{b}\right)=aT\left(\frac{n}{b^2}\right)+c_2\frac{n}{b}$$

この式を上式に代入する。

92

$$\begin{aligned} T(n) &= aT\left(\frac{n}{b}\right)+c_2 n \\ &= a\left\{aT\left(\frac{n}{b^2}\right)+c_2\frac{n}{b}\right\}+c_2 n = a^2T\left(\frac{n}{b^2}\right)+c_2 n(1+\frac{a}{b}) \\ &= a^2\left\{aT\left(\frac{n}{b^3}\right)+c_2\frac{n}{b^2}\right\}+c_2 n(1+\frac{a}{b}) = a^3T\left(\frac{n}{b^3}\right)+c_2 n\left\{1+\frac{a}{b}+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right\} \\ &\ \vdots \\ &= a^kT\left(\frac{n}{b^k}\right)+c_2 n\left\{1+\frac{a}{b}+\cdots+\left(\frac{a}{b}\right)^k\right\} = a^kT\left(\frac{n}{b^k}\right)+c_2 n\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{a}{b}\right)^i \end{aligned}$$

等比級数の和

a と b の大小関係で式が異なる。

ここで、 $n=b^k$ と仮定する。 $k=\log_b n$
（一般のnでもほぼ同様に求めることができる。）

93

場合1: $a<b$ すなわち $\frac{a}{b}<1$ のとき

$$\begin{aligned} T(n) &= a^kT\left(\frac{n}{b^k}\right)+c_2 n\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{a}{b}\right)^i \\ &= a^kT(1)+c_2 n\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^k}{1-\frac{a}{b}} \\ &\le c_1 b^k+c_2 n\frac{1}{1-\frac{a}{b}} = (c_1+c_2\frac{b}{b-a})n \end{aligned}$$

$$\therefore T(n)=O(n)$$

この場合は線形時間アルゴリズムが得られる。

94

場合2: $a=b$ すなわち $\frac{a}{b}=1$ のとき

$$\begin{aligned} T(n) &= a^kT\left(\frac{n}{b^k}\right)+c_2 n\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{a}{b}\right)^i \\ &= a^kT(1)+c_2 n\sum_{i=0}^{k-1}1 \\ &= c_1 b^k+c_2 nk \\ &= c_1 n+c_2 n\log_b n \end{aligned}$$

$$\therefore T(n)=O(n\log n)$$

この場合は、典型的な $O(n\log n)$ 時間のアルゴリズムが得られる。

95

場合3: $a>b$ すなわち $\frac{a}{b}>1$ のとき

$$\begin{aligned} T(n) &= a^kT\left(\frac{n}{b^k}\right)+c_2 n\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{a}{b}\right)^i \\ &= a^kT(1)+c_2 n\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^k-1}{\frac{a}{b}-1} \\ &= c_1 a^k+c_2\frac{b}{a-b}\left(a^k-n\right) \quad \left(\because n=b^k\right) \\ &\le \left(c_1+c_2\frac{b}{a-b}\right)a^k = \left(c_1+c_2\frac{b}{a-b}\right)n^{\log_b a} \end{aligned}$$

ここで、$p\equiv\log_b a>1$ とおく。

$$\therefore T(n)=O(n^p)$$

この場合は指数時間アルゴリズムになってしまう。

96

分割統治法の計算時間のまとめ

- 分割数(a)がサイズ縮小(b)より小さい場合には、線形時間アルゴリズム
- 分割数(a)とサイズ縮小(b)が等しい場合には、$O(n \log n)$ 時間のアルゴリズム
  (マージソートがこの場合に相当する。)
- 分割数(a)がサイズ縮小(b)より大きい場合
  指数時間アルゴリズムになってしまう。

97

3－3:高度なソートアルゴリズム②
(データ構造にもとづくソート)

98

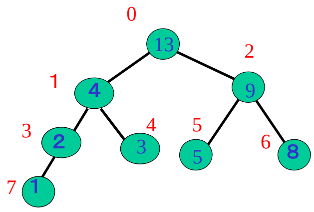
ヒープソート

99

ヒープソートの方針

方針

- ヒープを使ってソートする。
- 先頭から順にヒープに挿入し、データ全体をヒープ化する。
- 最大値を取り出して、最後のデータにする。



100

ヒープとは

データ構造の一種。
(最大や、最小を効率良く見つけることができる。)
n 点からなるヒープとは、次の条件を満足する2分木。

- 深さ $\lfloor \log_2 n \rfloor - 1$ までは、完全2分木。
- 深さ $\lfloor \log_2 n \rfloor$ では、要素を左につめた木。
- 全ての節点において、
  親の値が子の値より小さい(大きい。)

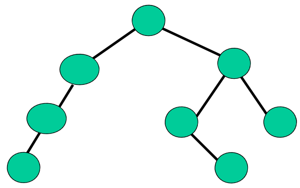
この条件は、ある節点の値は、その子孫の節点全ての値より、小さい(大きい)とすることもできる。

まず、このデータ構造(ヒープ)に関することを順に見ていく。

101

2分木

- 高々2つ子しかない木。
- 左と右の子を区別する。

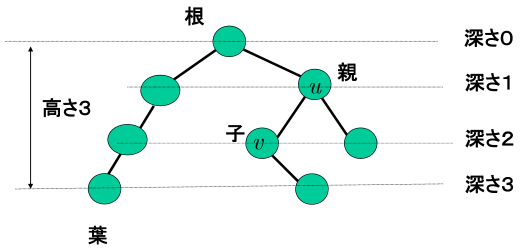


102

2分木においては、左と右の子を区別するので、
次の2つの2分木は同一ではない。

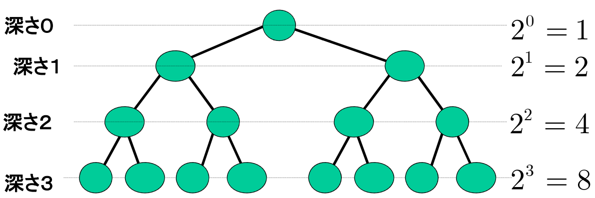
木に関する用語

- 深さ：根までの道の長さ
- 高さ：木中の最大の深さ



完全2分木

- 全ての内部節点（葉以外の節点）が、すべて2つの子を持つ2分木。



命題HP1（完全2分木と節点数）

（1）完全2分木の、深さ d には 2^d 個の節点がある。

（2）高さ h の完全2分木には $2^{h+1}-1$ 個の節点がある。

証明

（1）
深さdに関する数学的帰納法で証明できる。
基礎：
このときは、深さ0の頂点は根ただ一つなので、命題は成り立つ。

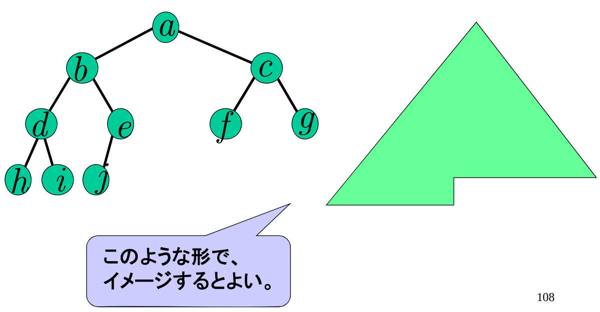
帰納：
深さ d の節点が 2^d 個あると仮定する。
このとき、これらの節点すべてが、2つの子を持つので、
深さ $d+1$ の節点数は、$2\times 2^d = 2^{d+1}$ あり、命題は成り立つ。

（2）（1）より、節点の総数は、次式で表される。

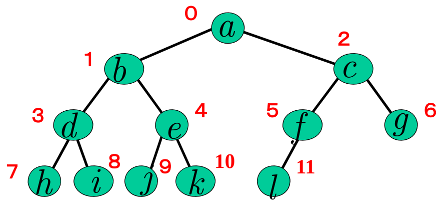
$$\sum_{d=0}^{h} 2^d = \frac{2^{h+1}-1}{2-1} = 2^{h+1}-1$$

QED

ヒープの形



ヒープ番号と配列での実現



配列

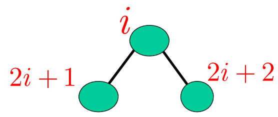
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
HP	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l

109

ヒープにおける親子関係

命題HP2（ヒープにおける親子関係）

ヒープ番号 i の節点に対して、
左子のヒープ番号は $2i+1$ であり、
右子のヒープ番号は $2i+2$ である。



110

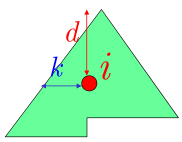
証明

右子は、左子より1大きいヒープ番号を持つことはあきらかなので、
左子が $2i+1$ であることだけを示す。

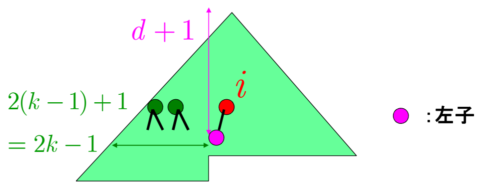
今、節点 i の深さを d とし、左から k 番目であるとする。
すなわち、

$$i = \left(2^d - 1\right) + (k) - 1 = 2^d + k - 2$$

が成り立つ。



111



このとき、左子は、深さ $d+1$ で左から $2k-1$ 番目
の節点である。
今、左子のヒープ番号を h_l とすると次の式がなりたつ。

$$h_l = 2^{d+1} + 2k - 1 - 2$$

$$= 2(d^d + k - 2) + 1$$

$$= 2i + 1$$

QED

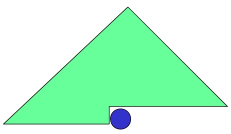
112

ヒープにおける挿入

（ヒープ条件）

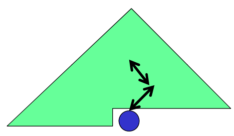
全ての節点において、親の値が子の値より小さい

n 点保持しているヒープに新たに1点挿入することを考える。
このとき、ヒープの形より、ヒープ番号 $n+1$ の位置に最初に
おかれる。



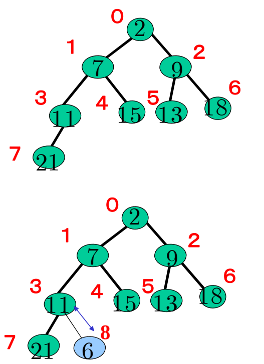
113

しかし、これだけだと、ヒープ条件を満たさない可能性
があるので、根のほうに向かって条件がみたされるまで
交換を繰り返す。（アップヒープ）



114

挿入の例

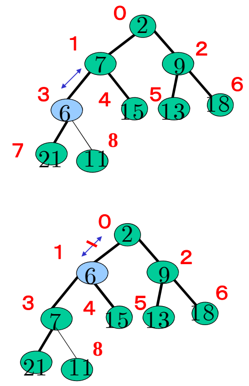


配列 HP

0	1	2	3	4	5	6	7
2	7	9	11	15	13	18	21

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	7	9	11	15	13	18	21	6

115



0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	7	9	6	15	13	18	21	11

0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	6	9	7	15	13	18	21	11

挿入終了

116

練習

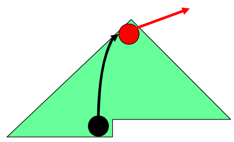
前のスライドのヒープに新たに、3を挿入し、
その動作を木と、配列の両方で示せ。

117

ヒープにおける削除

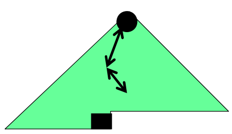
（ヒープ条件）
全ての節点において、親の値が子の値より小さい

ヒープにおいては、先頭の最小値のみ削除される。
削除の際には、ヒープの形を考慮して、
ヒープ番号 n の節点の値を根に移動する。



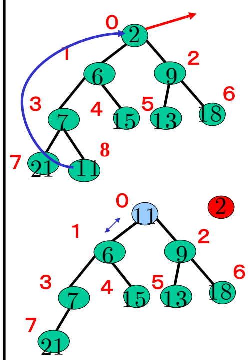
118

しかし、これだけだと、ヒープ条件を満たさない可能性
があるので、葉のほうに向かって条件がみたされるまで
交換を繰り返す。（ダウンヒープ）
交換は、値の小さい子供の方と交換する。
これをヒープ条件が満たされるまで繰り返す。



119

削除の例

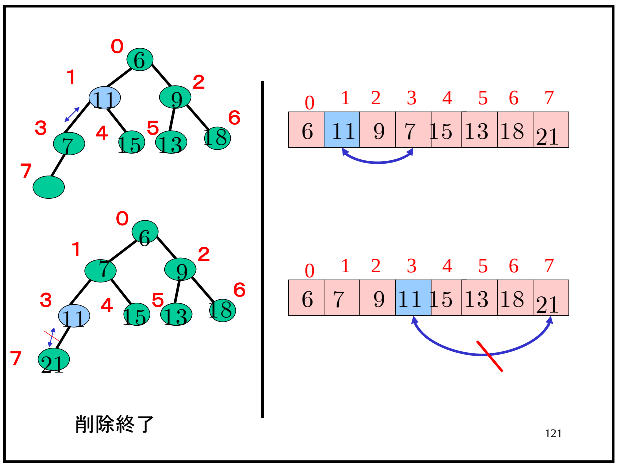


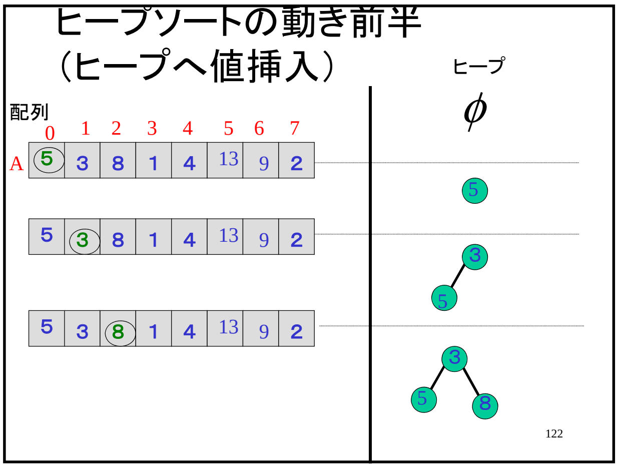
配列 HP

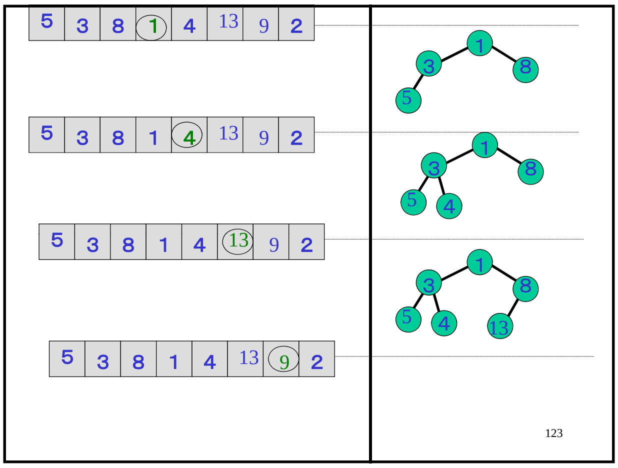
0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	6	9	7	15	13	18	21	11

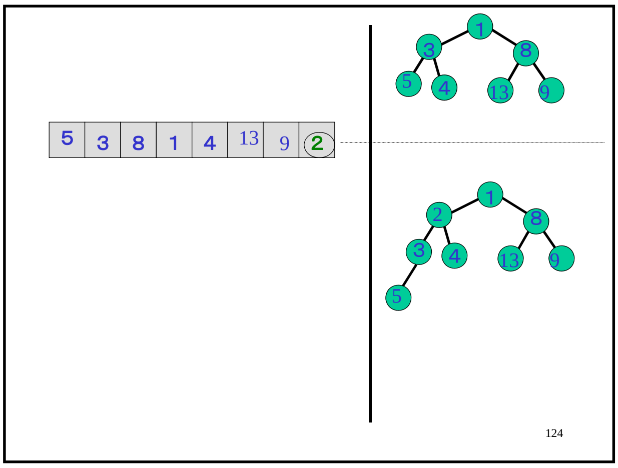
0	1	2	3	4	5	6	7
11	6	9	7	15	13	18	21

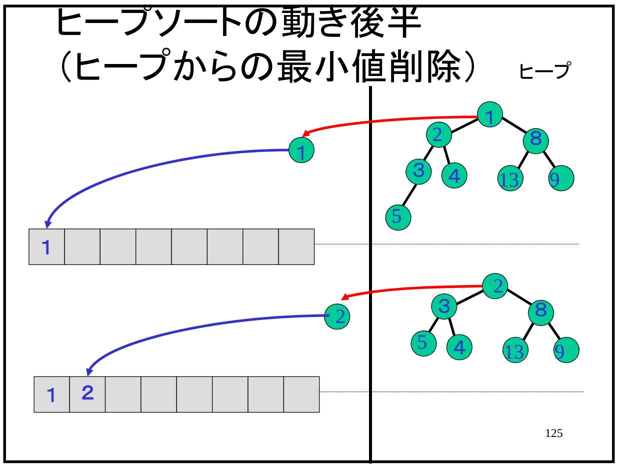
120

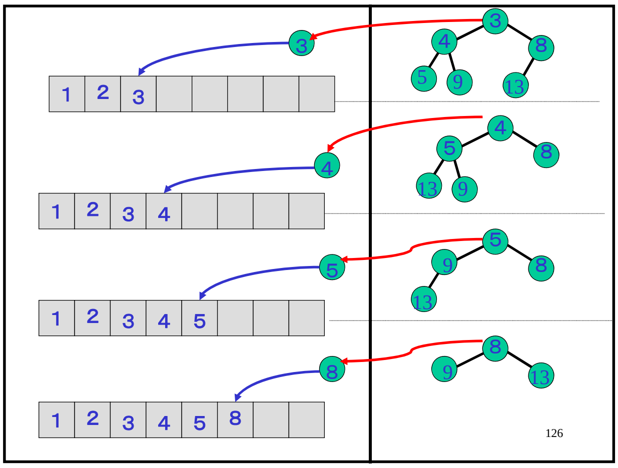

削除終了
121

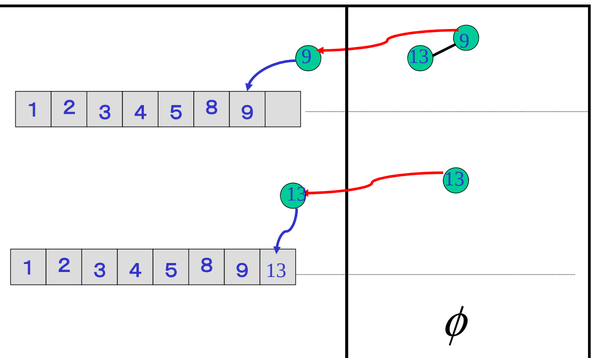

ヒープソートの動き前半
（ヒープへ値挿入）
ヒープ
配列
A
122


123


124


ヒープソートの動き後半
（ヒープからの最小値削除）
ヒープ
125


126



127

練習

次の配列を、ヒープソートでソートするとき、
ヒープの動作と配列の動きをシミュレートせよ。

11	25	21	1	8	3	16	5

128

ヒープソートの実現

```
void heap_sort()
{
    int  i;        /* カウンタ */
     make_heap();/*空のヒープの作成*/
     /*  ヒープ挿入  */
    for(i=0;i<n;i++){
            insert_heap(A[i]);
     }

    /*ヒープからのデータの取り出し*/
     for(i=0;i<n;i++){
            A[i]=get_min();
     }
    return ;
}
```

細かい部分は省略します。

129

命題HP3（ヒープソートの正当性）

ヒープソートにより、配列はソートされる。

証明

ヒープの削除（get_min()）により、
繰り返し最小値を求められることに注意すれば、
帰納法により証明できる。

QED

130

ヒープソートの計算量

ヒープへのデータ挿入

操作insert_heap(A)　1回あたり、時間量 $O(\log n)$

n回行うので、時間量 $O(n \log n)$

整列（最小値の削除の反復）

操作get_min()　1回あたり、時間量 $O(\log n)$

n回行うので、時間量 $O(n \log n)$

最悪時間量 $O(n \log n)$ のアルゴリズム

131

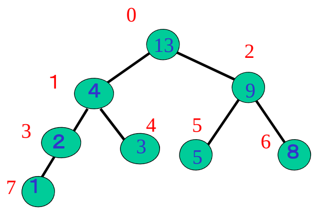
単一配列でのヒープソート

132

単一配列に変更する方針

方針

- 根が最大値になるように変更する。
- 先頭から順にヒープに挿入し、データ全体をヒープ化する。
- 最大値を取り出して、最後のデータにする。



133

ヒープ条件の変更

（ヒープ条件）
全ての節点において、親の値が子の値より大きい

134

ヒープ化（ヒープソート前半）

配列

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	5	3	8	1	4	13	9	2

5	3	8	1	4	13	9	2

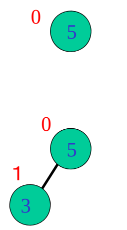
ヒープ　未ヒープ

5	3	8	1	4	13	9	2

ヒープ　未ヒープ

ヒープ

ϕ



135

配列

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	8	3	5	1	4	13	9	2

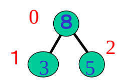
ヒープ　未ヒープ

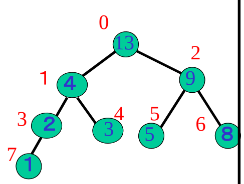
ちょっと省略

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	13	4	9	2	3	5	8	1

ヒープ

ヒープ





136

最大値の削除とソート

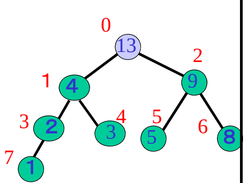
	0	1	2	3	4	5	6	7
A	13	4	9	2	3	5	8	1

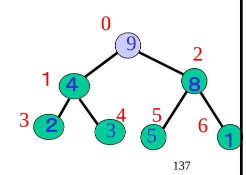
ヒープ

最大要素を、ヒープから削除し
後ろに挿入

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	9	4	8	2	3	5	1	13

ヒープ　ソート済





137

ヒープソート2の動き後半2

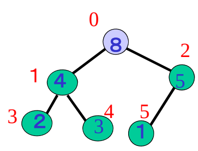
	0	1	2	3	4	5	6	7
A	8	4	5	2	3	1	9	13

ヒープ　ソート済

ちょっと省略

A	1	2	3	4	5	8	9	13

ソート済



ϕ

138

練習

次の配列を、単一配列ヒープソートを用いてソートするとき、配列の動きをシミュレートせよ。

11	25	21	1	8	3	16	5

139

単一配列ヒープの実現

```
void heap_sort()
{
    int  i;       /* カウンタ */
     make_heap();/*空のヒープの作成*/
     /*   ヒープ化   */
    for(i=0;i<n;i++){
            insert_heap(A[i]);
     }

    /*ヒープからのデータの取り出し*/
     for(i=n-1;i<=0;i--){
            A[i]=get_max();
      }
    return ;
}
```

仔細省略、ヒープの動作も変更する必要がある。

140

単一配列ヒープソートの計算量

ヒープ化

操作insert_heap(A)　１回あたり、時間量 $O(\log n)$

n回行うので、時間量 $O(n\log n)$

整列（最小値の削除の反復）

操作get_max()　１回あたり、時間量 $O(\log n)$

n回行うので、時間量 $O(n\log n)$

ヒープ化、整列は、１回づつ行われるので、

最悪時間量 $O(n\log n)$ のアルゴリズム

141

ヒープ化の高速化

142

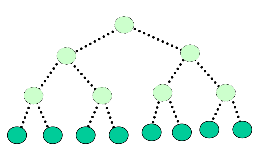
ヒープ化の高速化におけるアィディア

方針

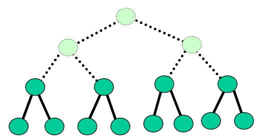
- ヒープをボトムアップに生成する。
- 各接点では、2つの部分木を結合しながら、ダウンヒープで修正を繰り返す。

143

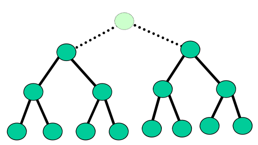
イメージ



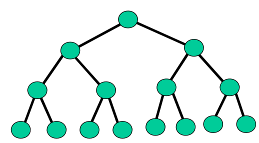
１点だけからなる 約n/2個のヒープがあると考えてもよい。



3点のヒープが約n/4個



7点のヒープが約n/8=2個



$2^h-1=15$ **点のヒープが１個**

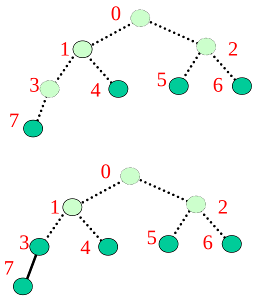
144

高速ヒープ化の動き

配列

0	1	2	3	4	5	6	7
5	3	8	1	4	13	9	2

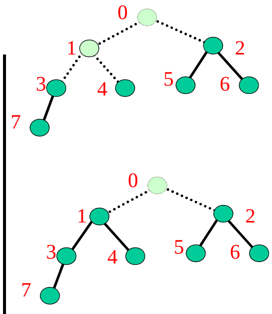
0	1	2	3	4	5	6	7
5	3	8	2	4	13	9	1



145

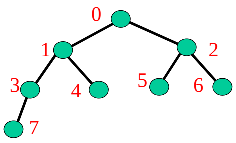
0	1	2	3	4	5	6	7
5	3	13	2	4	8	9	1

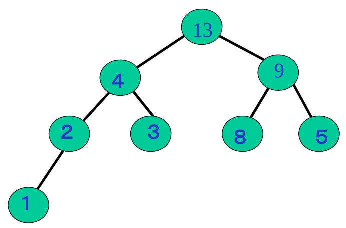
0	1	2	3	4	5	6	7
5	4	13	2	3	8	9	1



146

0	1	2	3	4	5	6	7
13	4	9	2	3	8	5	1





147

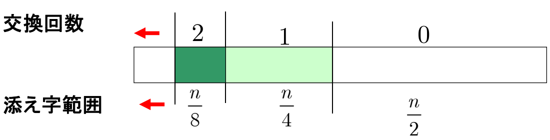
```
void heap_sort()
{
     int  i;        /* カウンタ */
     make_heap();/*空のヒープの作成*/
     /*  ヒープ化  */
     for(i=n/2;i>=;i--){
          down_heap(A[i]);
     }

     /*ヒープからのデータの取り出し*/
     for(i=n-1;i<=0;i--){
          A[i]=get_max();
     }
     return ;
}
```

148

命題HP4(高速ヒープ化の最悪時間計算量)

高速ヒープ化の最悪計算時間計算量は、$O(n)$である。

証明



149

このことより、ヒープ化に必要な最悪計算時間量を
$T_h(n)$
と書くと次式が成り立つ。

$$T_h(n) \le \frac{n}{4}\times 1 + \frac{n}{8}\times 2 + \frac{n}{16}\times 3 \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\log_2 n-1}\frac{i}{2^i}$$

150

$$2T_h(n) \leq \frac{n}{2}\times 1 + \frac{n}{4}\times 2 + \frac{n}{8}\times 3 \cdots$$

$$-)\quad T_h(n) \leq \frac{n}{4}\times 1 + \frac{n}{8}\times 2 + \frac{n}{16}\times 3 \cdots$$

$$T_h(n) \leq \frac{n}{2}\times 1 + \frac{n}{4}\times 1 + \frac{n}{8}\times 1 \cdots + 1$$

$$\leq n\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{\log_2 n}}\right)}{1-\frac{1}{2}} \leq n$$

151

ヒープソートの計算量

ヒープ化の部分 $O(n)$

最大値発見と移動の部分

操作delete_max(A) 1回あたり、時間量 $O(\log n)$

n回行うので、時間量 $O(n\log n)$

結局

最悪時間計算量 $O(n\log n)$ のアルゴリズム

152

3ー4:比較によらないソート

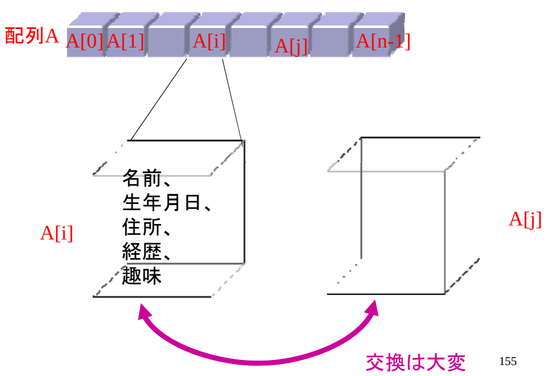
153

準備:容量の大きいデータの処理

154

ちょっと寄り道

(一個一個が大きいデータを処理する工夫)



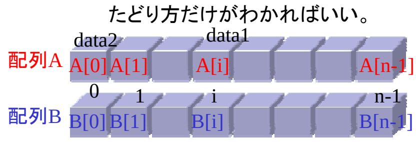
交換は大変

155

大きいデータを処理する工夫2

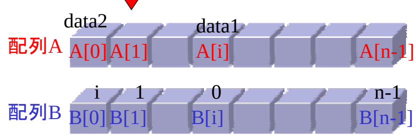
工夫:大きいデータは動かさずに、

たどり方だけがわかればいい。



添字の配列Bだけを操作して、配列Aは動かさない。

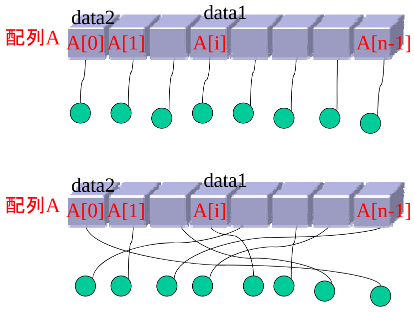
swap(&B[0],&B[i]); (data1が最小値のとき。)



156

大きいデータを処理する工夫3

イメージ



ソート順は、下の情報からえられる。
(配列の添字の利用だけでなく、ポインタでも同様のことができる。)

157

実現

細かい部分は省略します。

```
void selection_sort(struct data A[]){
    int  B[N];   /*配列Aの要素を指す*/
    int i,j;         /*カウンタ*/
    for(i=0;i<N;i++){
         B[i]=i;
    }
    for(i=0;i<N;i++){
        min=i;
        for(j=i+1;j<N;j++){
         if(A[B[min]].item>A[B[j]].item){
           min=j;
         }
         swap(&B[i],&B[min]);
    }
    return;
}
```

158

比較によらないソート

- バケットソート

  データが上限のある整数のような場合に用いる。
  データの種類が定数種類しかない場合には、
  関数で整数に写像してから用いてもよい。
  (ハッシュ関数)

- 基数ソート

  大きい桁の数に対して、
  桁毎にバケットソートをしてソートする。

159

バケットソート

160

バケットソートの方針

とりあえず、簡単のために、
データは、
　1. 重複がなく、
　2. 0からm－1の整数
という性質を満足するとしましょう。
(例えば、学籍番号の下2桁とか。)

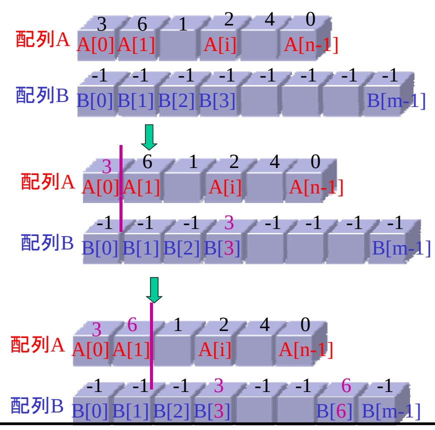
方針

- m個のバケット(配列)を用意して、
  データを振り分けていく。

- データそのものを配列の添字として使う。

161

バケットソートの動き1



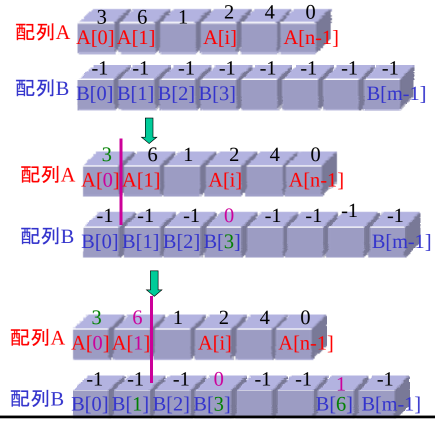
162

バケットソートの実現

```
/*概略です。細かい部分は省略
  入力データの配列の型がintであることに注意*/
void bucket_sort(int A[],int B[])
{
    int  i;        /*カウンタ*/

    for(i=0;i<n;i++)
      {
          B[A[i]]=A[i];
       }
    return;
}
```

163

バケットソートの動き2(添字を用いた場合)



164

バケットソートの実現2

```
/* 配列の添字を用いて、間接的にソート*/
void bucket_sort(int A[],int B[])
{
    int  i;        /*カウンタ*/

    for(i=0;i<n;i++)
      {
          B[A[i]]=i;
       }
    return;
}
```

i番目のデータの参照は、A[B[i]]で行う。

165

バケットソートの計算量

配列1回のアクセスには、定数時間で実行できる。
繰り返し回数は、明らかにデータ数n回です。
また、
配列Bの準備や、走査のために、$O(m)$ の時間量必要です。

最悪時間量 $O(m+n)$ のアルゴリズムです。

166

基数ソート

167

基数ソート

方針

- 大きい桁の数に対して、
  桁毎にバケットソートをしてソートする。
- 下位桁から順にバケットソートする。

168

基数ソートの動き(3桁)

	A	0桁でソート → A	1桁でソート → A	2桁でソート → A
0	221	650	2	2
1	650	250	106	23
2	23	221	215	33
3	2	2	221	47
4	106	372	23	106
5	226	23	226	126
6	250	33	126	215
7	126	215	33	221
8	372	106	47	226
9	47	226	650	250
10	215	126	250	372
11	33	47	372	650

練習

次の配列に基数ソートを適用したときの動作を示せ。

	A
0	123
1	32
2	612
3	4
4	821
5	621
6	100
7	754
8	253
9	558
10	56
11	234

170

基数ソートの実現

```
/*細かい実現は省略*/
void radix_sort(int A[])
{
    int  i,j;         /*カウンタ*/

    for(k=0;k<max_k;k++)
      {
         bucket_sort(A,k);
 /*第k桁を基にして、バケットソートでソートして、
    もとの配列に戻すように拡張する。*/
      }

    return;
}
```

171

基数ソートの計算量

バケットソートを桁数分行えばよいので、
k桁数を基数ソートするには、

最悪時間量 $O(k(m+n))$ のアルゴリズムです。

また、
N 種類のデータを区別するには、$k=\log_m N$ 桁必要です。

$N \simeq n$ のときには、 結局

$O(m\log n + n\log n)$ の時間量を持つアルゴリズムです。

だから、バケットソートや基数ソートは、
データ範囲mや、桁数kに注意しましょう。

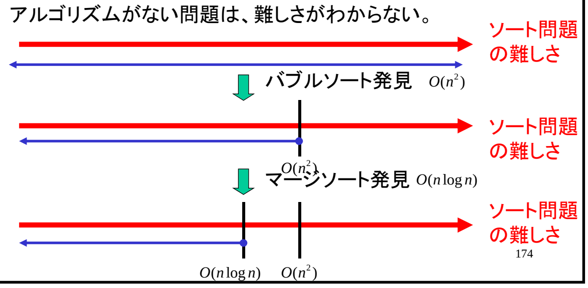
172

3−5:ソート問題の下界

173

問題とアルゴリズム

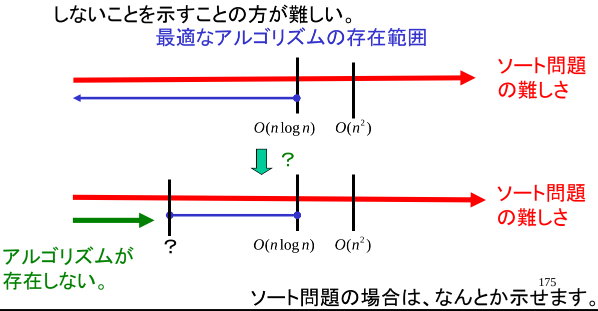
具体的なアルゴリズムを作ることは、
問題の難しさ(問題固有の計算量)の上界を与えています。
最適なアルゴリズムの存在範囲
アルゴリズムがない問題は、難しさがわからない。



174

問題と下界

一方、問題の難しさの範囲を下の方から狭めるには、
問題を解くアルゴリズムが無いことを示さないといけない。
実は、1つのアルゴリズムを作ることより、アルゴリズムが存在しないことを示すことの方が難しい。



ソート問題の場合は、なんとか示せます。

175

アルゴリズムと決定木（比較によるソートの下界証明の準備）

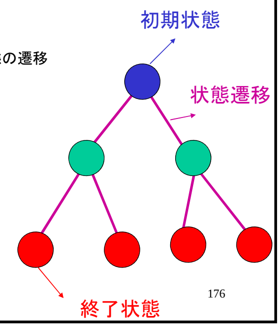
決定木の根：初期状態

決定木の節点：それまでの計算の状態

決定木の枝　：アルゴリズムの進行による状態の遷移

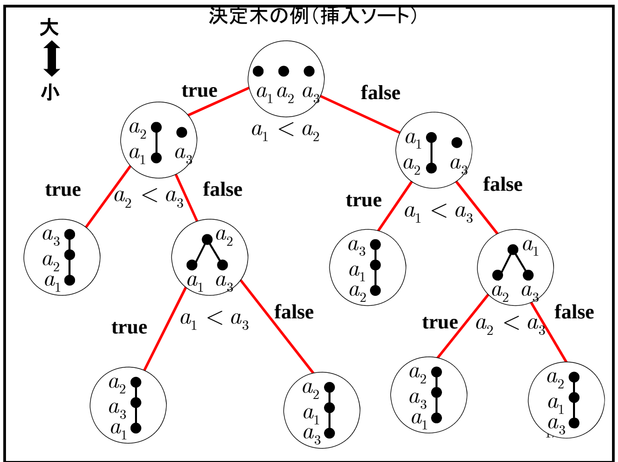
決定木の葉：終了状態

(ヒープのような)データ構造の木ではなくて、
概念的、抽象的なもの。
根がアルゴリズムの初期状態に対応し、
葉がアルゴリズム終了状態に対応し、
根からの道がアルゴリズムの実行順に対応し、
根から葉までの道の長さが時間量に対応する。

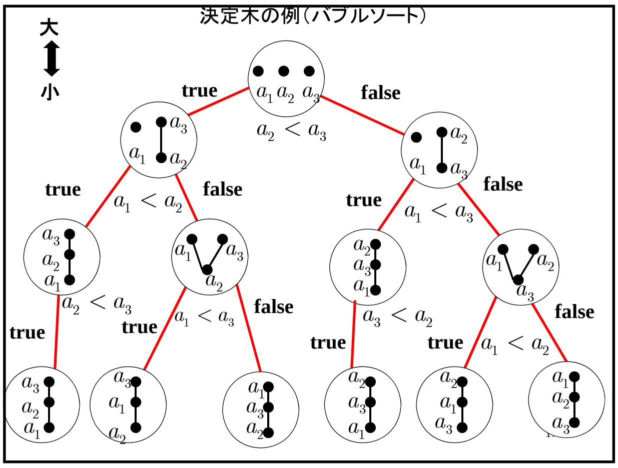


176

決定木の例（挿入ソート）



決定木の例（バブルソート）



練習

(1)3要素の選択ソートのアルゴリズムに対応する決定木を作成せよ。

(2)4要素の決定木を作成せよ。
(どんなアルゴリズムを用いても良い。)

179

ソート問題の下界

どんな入力でもきちんとソートするには、
決定木にn!個以上の葉がなければならない。
それで、アルゴリズムの比較回数は、
決定木の高さで定まる。

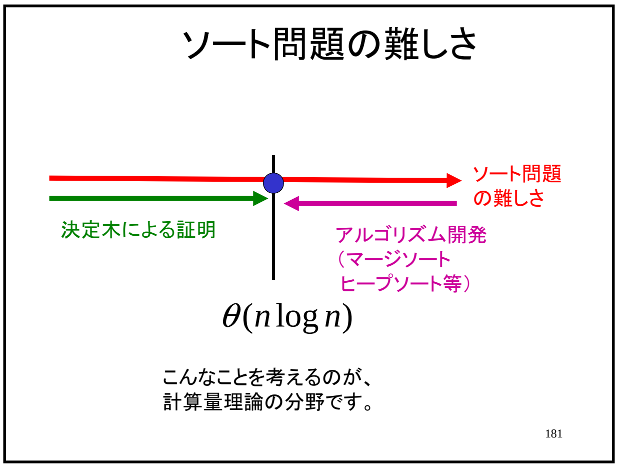
最悪時間が良いアルゴリズムは高さが低く、
悪いアルゴリズムは高さが高い。

高さがhの決定木では、高々2^h個の葉 しかない。

よって、 $h \geq \log_2 n! \geq n \log n$

よって、 ソートアルゴリズムでは少なくとも
$\Omega(n \log n)$ の時間量が必要である。

180


ソート問題の難しさ
ソート問題
の難しさ
決定木による証明
アルゴリズム開発
（マージソート
ヒープソート等）
$\theta(n \log n)$
こんなことを考えるのが、
計算量理論の分野です。
181