3. 多項式計算のアルゴリズム

- べき乗の計算
- 多項式の計算

1

3－1:べき乗問題

入力: x, n

(ここで、入力サイズは、n とします。)

出力: $f(x) = x^n$

2

素朴なべき乗の求め方

- アィディア
  - x を繰り返し、 n 回乗算する。

$$x^n = \prod_{i=1}^{n} x = \underbrace{x \bullet x \bullet \cdots \bullet x}_{n}$$

3

アルゴリズムnaïve_pow(x,n)
入力:x,n
出力:xのn乗

初期化が重要

```
1. f=1.0;
2. for(i=0;i<N;i++){
3.   f=f*x;
4. }
5. return f;
```

4

- アルゴリズムnaïve_powの正当性。

(ほとんど明らかだが、証明することもできる。)

練習

(1)

アルゴリズムnaïve_powの正当性に関する命題を設定せよ。(不変条件を定めよ。)

(2)(1)で設定した命題を数学的帰納法で証明せよ。

(1)のような命題(条件)を、不変条件(invariant)という。ループ内の条件等は、特にループ不変条件という。アサーション(assertion、表明)ともいう。

5

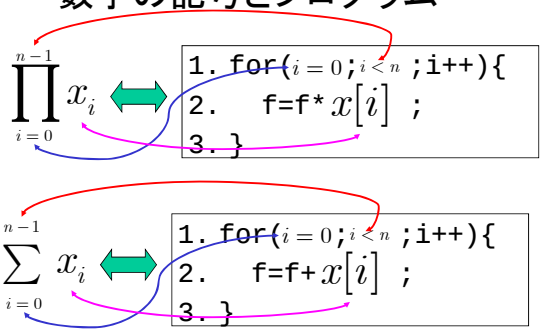
アルゴリズムnaïve_powの時間計算量

- 高々 n 回の繰り返し。
- 各繰り返し中では、1回の乗算と、1回の代入が行われているだけである。

$\therefore O(n)$ の時間計算量である。

6

数学の記号とプログラム



7

高速なべき乗の求め方。

- 注意
  - とりあえず、入力に制限を加える
  - n が2のべき乗と仮定する。すなわち、ある整数 k が存在して、 $n = 2^k$ と表せる。
- アィディア
  - 倍、倍に計算した方が高速に値を求められる。

$$x^i \bullet x^i = x^{2i}$$

  - (一方、 $x^i \bullet x = x^{i+1}$)

8

例

3^8 を求める。

素朴な方法

$3^0 = 1 \rightarrow 3^1 = 1 \bullet 3 = 3 \rightarrow 3^2 = 3 \bullet 3 = 9 \rightarrow 3^3 = 9 \bullet 3 = 27$

$\rightarrow 3^4 = 27 \bullet 3 = 81 \rightarrow 3^5 = 81 \bullet 3 = 243 \rightarrow 3^6 = 243 \bullet 3 = 729$

$\rightarrow 3^7 = 729 \bullet 3 = 2187 \rightarrow 3^8 = 2187 \bullet 3 = 6561$

高速な方法

$3^1 = 3 \rightarrow 3^2 = 3 \bullet 3 = 9 \rightarrow 3^4 = 9 \bullet 9 = 81 \rightarrow 3^8 = 81 \bullet 81 = 6561$

9

アルゴリズムfast_pow(x,n)
入力:x,n(ただし、 $n = 2^k$)
出力:xのn乗

```
1. f=x;
2. for(i=1;i<k;i++){
3.   f=f*f;
4. }
5. return f;
```

10

命題FP1(fast_powの正当性)

forループが k回繰り返されたとき、
fの値は、

$$f = x^{2^k}$$

である。

証明 繰り返し回数kによる帰納法による。
繰り返し回数kのときのfの値を f_k と表す。

基礎: $k = 0$

アルゴリズム中のステップ1より、 $f_0 = x$ である。
一方、右辺= $x^{2^0} = x^1 = x$
よって、命題は成り立つ。

11

帰納: $0 < k$

$0 \le k' < k$ なる全ての k' に対して、
命題が成り立つと仮定する(帰納法の仮定)
$k' = k - 1$ として、 $k - 1$ 回の繰り返しで、

$$f_{k-1} = x^{2^{k-1}}$$

である。よって、 k 回めの繰り返しでは、

$$f_k = f_{k-1} \bullet f_{k-1} = x^{2^{k-1}} \bullet x^{2^{k-1}} = x^{2 \bullet \left(2^{k-1}\right)} = x^{2^k}$$

QED

12

fast_powの時間計算量

アルゴリズムは、明らかに、k回繰り返す。
繰り返し中は、1回の乗算しか行っていない。
したがって、

$O(k)$

の時間計算量である。

$$n = 2^k$$
$$\therefore k = \log_2 n$$

なので、結局

$O(\log n)$

の時間計算量である。

13

一般の自然数に対する高速なべき乗アルゴリズム

n **が2のべき乗でないときを考える。**

このとき、前の高速なべき乗アルゴリズムをサブルーチンとして用いることができる。
n **の2進数表現を次のように表す。**

$$(n)_{10} = \left(b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0\right)_2$$
$$= 2^m \times b_m + 2^{m-1} \times b_{m-1} + \cdots + 2^0 \times b_0$$

14

このとき、 x^n **は次のように表せる。**

$$x^n = x^{2^m b_m + 2^{m-1} b_{m-1} + \cdots + 2^0 b_0}$$
$$= \left(x^{2^m}\right)^{b_m} \bullet \left(x^{2^{m-1}}\right)^{b_{m-1}} \bullet \cdots \bullet \left(x^1\right)^{b_0}$$
$$= \prod_{i=0}^{m} \left(x^{2^i}\right)^{b_i}$$

これより、一般のnに対する高速なアルゴリズムが得られる。

15

アルゴリズムgeneral_fast_pow(x,n)
入力：x,n(nは一般の数)
出力：xのn乗

```
1. f=1.0;
2. nを2進数 (b_m b_{m-1} ... b_1 b_0)_2 に変換する。
3. for(i=0;i<m;i++){
4.   if( b_i == 1 ){
5.      f=f*fast_pow(x, 2^i );
6.   }
7. }
8. return f;
```

16

general_fast_pow(x,n)の時間計算量

general_fast_pow(x, n)の時間計算量を$T_G(n)$ と表し、
fast_pow(x, 2^i) **の時間計算量を** $T_F(i)$ **と表す。**

3−7のループの繰り返しは、$m = \log n$ 回繰り返される。

ループの各繰り返しにおける実行時間の総和により $T_G(n)$を求める。

17

$$T_G(n) \le \underbrace{T_F(0) + T_F(1) + \cdots + T_F(m)}_{\log n} + c_1$$
$$\le \underbrace{\log 1 + \log 2 + \cdots + \log n}_{\log n} + c_1$$
$$\le \underbrace{\log n + \log n + \cdots + \log n}_{\log n} + c_1$$
$$\le \log^2 n + c_1$$
$$\therefore T_G(n) = O(\log^2 n)$$

18

さらなる高速化

$$x^n = x^{2^m b_m + 2^{m-1} b_{m-1} + \cdots + 2^0 b_0}$$

$$= \left(x^{2^m}\right)^{b_m} \bullet \left(x^{2^{m-1}}\right)^{b_{m-1}} \bullet \cdots \bullet \left(x^1\right)^{b_0}$$

であるが、x^{2^m} を求めるための高速べき乗アルゴリズム fast_pow(x, 2^m)の途中段階で全てべき乗

$$x^{2^{m-1}}, x^{2m-2}, \cdots, x^1$$

が出現していることに注意する。

19

アルゴリズムsuper_fast_pow(x,n)
入力:x,n(nは一般の整数)
出力:xのn乗

```
1. f=1.0;
2. tmp=x;
3. nを2進数 (b_m b_{m-1} ... b_1 b_0)_2 に変換する。
4. for(i=0;i<=m;i++){
5.   if(b_i == 1){
6.       f=f*tmp;
7.   }
8.   tmp=tmp*tmp;
9. }
10.return f;
```

20

super_fast_pow(x,n)の時間計算量

super_fast_pow(x, n)の時間計算量を $T_S(n)$と表す。

3−7のループの繰り返しは、$m+1 = \log n + 1$ 回繰り返される。

ループの各繰り返しは、 $O(1)$ 時間で実現可能である。
よって、

$$T_S(n) = O(\log n)$$

である。

21

3−2:多項式の計算

- 入力: $x, n, a_0, a_1, \cdots, a_n$
- (ここで、入力サイズは、n とします。)
- 出力:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

22

素朴な多項式の求め方

- アィディア
  - 各項を素朴な乗算で計算し、総和を求める。

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\prod_{j=0}^{i-1} x\right)$$

23

アルゴリズムnaive_poly()
入力:x,次数n,係数a[n]
出力: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a[i] x^i$

```
1. fx=0;
2. for(i=0;i<=N;i++){
3.   tmp=a[i];
4.   for(j=0;j<i;j++){
5.       tmp=tmp*x;
6.   }
7.  fx=fx+tmp;
8. }
9. return fx;
```

3-6は、第i項の計算

24

素朴な多項式計算アルゴリズムの正当性

命題NP1（naive_polyの正当性1）

2.のforループが i回繰り返されたとき、
tmpの値は、

$$a_i x^i$$

である。

25

証明

アルゴリズム中のステップ3より、$tmp = a_i$に設定される。

また、4の繰り返しは明らかにi回である。

したがって、 x はi回乗算される。
よって、

$$tmp = a_i x^i$$

より厳密な帰納法でも証明できる。

である。

QED

26

命題NP2（naive_polyの正当性2）

naïve_polyは

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

を計算する。

証明　次数 n に関する帰納法による。

基礎 $n = 0$

$tmp = a_0 = f(x)$ **であり正しい。**

帰納 $n > 0$

$0 \le n' < n$ **の時正しいと仮定する。**

27

$n' = n - 1$ **とする。**
n-1の繰り返しのときのfxの値を $f_{n-1}(x)$ **と書く。**
このとき、帰納法の仮定より、

$$f_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

が成り立つ。 n **回目の繰り返しでは、** $i = n$ **なので、**

$tmp = a_n x^n$ **（命題PL1より）**

また、ステップ7より、

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{n-1}(x) + tmp \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) + a_n x^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{aligned}$$

QED

28

素朴な多項式計算アルゴリズムの計算時間

- **ステップ5の部分が最も時間を多く繰り返される。**

ステップ4のforループは、i の値にしたがって、
i 回繰り返される。
よって、時間計算量を $T(n)$ とすると、
$T(n)$ は、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=0}^{n} i \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \\ &= O(n^2) \end{aligned}$$

29

以上から、naive_polyの最悪時間計算量は、

$O(n^2)$

であることがわかる。
また、繰り返し回数は、入力サイズ（n）だけに依存し、
問題例（係数配列の状態）に依存しない。
よって、

$\Theta(n^2)$

の時間計算量を持つこともわかる。

30

補足：べき乗に高速なアルゴリズムを用いた場合

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} \log i$$
$$\leq \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n$$
$$< \log n + \log n + \cdots + \log n$$
$$= n \log n$$
$$\therefore T(n) = O(n \log n)$$

と計算できるので、 $O(n \log n)$ のアルゴリズムといえる。

（べき乗の計算に、mathライブラリのpowを用いた場合、この計算量になると考えられる。）

31

ホーナーの方法

- アィディア
  - xをできるだけくくりだしながら計算する。

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
$$= (a_0 + (a_1 + (\cdots (a_{n-1} + (a_n) * x) * x) \cdots) * x * x)$$

32

アルゴリズムを示すまえに、等式の正当性を証明する。

命題H1（hornerの正当性1）

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
$$= (a_0 + (a_1 + (\cdots (a_{n-1} + (a_n) * x) * x) \cdots) * x * x)$$

証明 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ **に対して、**

$$f_k(x) \equiv a_{n-k} + a_{n-k+1} x + a_{n-k+2} x^2 + \cdots + a_n x^k$$
$$= \sum_{i=0}^{k} a_{n-k+i} x^i$$

と定義する。

33

このとき、各関数は次のような系列になる。

$$f_0(x) = a_n$$
$$f_1(x) = a_{n-1} + a_n x$$
$$f_2(x) = a_{n-2} + a_{n-1} x + a_n x^2$$
$$\vdots$$
$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = f(x)$$

この $f_k(x)$ **に関して、**
次式を k **に関する帰納法で命題を証明する。**

$$f_k(x) = (a_{n-k} + (a_{n-k+1} + (\cdots (a_{n-1} + (a_n) * x) \cdots) * x) * x)$$

34

基礎 $k = 0$

$$f_0(x) = a_n = (a_n)$$

であり、満たされる。

帰納 $k > 0$

$0 \leq k' < k$ **なる全ての** k' **で**

$$f_{k'}(x) = a_{n-k'} + a_{n-k'+1} x + \cdots + a_n x^{k'}$$
$$= (a_{n-k'} + (a_{n-k'+1} + (\cdots (a_{n-1} + (a_n) * x) \cdots) * x) * x)$$

と仮定する。（帰納法の仮定）

$k' = k - 1$ **として**

$$f_{k-1}(x) = a_{n-k+1} + a_{n-k+2} x + \cdots + a_n x^{k-1}$$
$$= (a_{n-k+1} + (a_{n-k+2} + (\cdots (a_{n-1} + (a_n) * x) \cdots) * x) * x)$$

35

このとき、

$$a_{n-k} + a_{n-k+1} x + \cdots + a_n x^k$$
$$= a_{n-k} + (a_{n-k+1} + \cdots + a_n x^{k-1}) * x$$
$$= a_{n-k} + (a_{n-k+1} + (\cdots (a_{n-1} + (a_n) * x) \cdots) * x) * x$$
$$= (a_{n-k} + (a_{n-k+1} + (\cdots (a_{n-1} + (a_n) * x) \cdots) * x) * x)$$

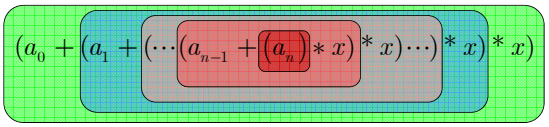
帰納法の仮定を用いている。

よって、命題は成り立つ。

QED

36

ホーナーの方法の計算手順



37

練習

次の多項式を通常の方法と、ホーナーの方法により計算せよ。

$$f(x) = x^5 - 12x^4 + 3x^3 - 8x^2 + x - 5$$

(1) $f(2)$ (2) $f(-3)$

38

アルゴリズムhorner_poly()
入力:x,次数n,係数a[n]
出力: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a[i]x^i$

```
1. horner(int k,double x){
2.   if(k==0){
3.       return a[n];
4.   }else{
5.       f_k=a[n-k]+horner(k-1,x)*x;
6.       return f_k;
7.    }
8. }
```

39

ホーナーの方法の計算時間

- **計算時間を** $T(n)$ **とすると次の漸化式を満たす。**

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & (n = 0) \\ c_1 + T(n-1) + c_2 & (n > 0) \end{cases}$$

ここで、 c_1 **を加算に必要な計算時間とし、**
c_2 **を乗算に必要な計算時間としている。**

$c = \max\{c_1, c_2\}$ **とすると、次のようにかける。**

$$T(n) \le \begin{cases} c_0 & (n = 0) \\ T(n-1) + 2c & (n > 0) \end{cases}$$

40

$$\begin{aligned} T(n) &\le T(n-1) + 2c \\ &\le (T(n-2) + 2c) + 2c \quad = T(n-2) + 4c \\ &\vdots \\ &\le T(0) + 2nc \qquad\qquad \le (c_0 + 2c)n \end{aligned}$$

これより、 $T(n) = O(n)$

よって、ホーナーの方法による多項式の計算は、線形時間アルゴリズムである。

41

ホーナーの方法の繰り返し版

ホーナーの方法は、次のように、繰り返しを用いても実現できる。

```
1. horner(int k,double x){
2.   double f_k=a[n];
3.   for(k=1;k<=n;k++){
4.      f_k=a[N-k]+( f_k )*x;
5.   }
6.    return f_k;
7. }
```

このアルゴリズムも明らかに線形時間で実行される。

42

練習

（1）ループによるホーナー法において、ループ不変条件を設定せよ。

（2）（1）を数学的帰納法で証明せよ。

43