2.アルゴリズムの高速化

アルゴリズムにおける大幅な性能アップ

- 多項式時間アルゴリズム　VS
  対数時間アルゴリズム
  （最大公約数の問題）

- 指数時間アルゴリズム　VS
  多項式時間アルゴリズム
  （フィボナッチ数列を求める問題）

最大公約数問題

最大公約数問題

入力：2つの整数a,b

（ここで、入力サイズは、

$$\max\{a,b\}$$

とします。）

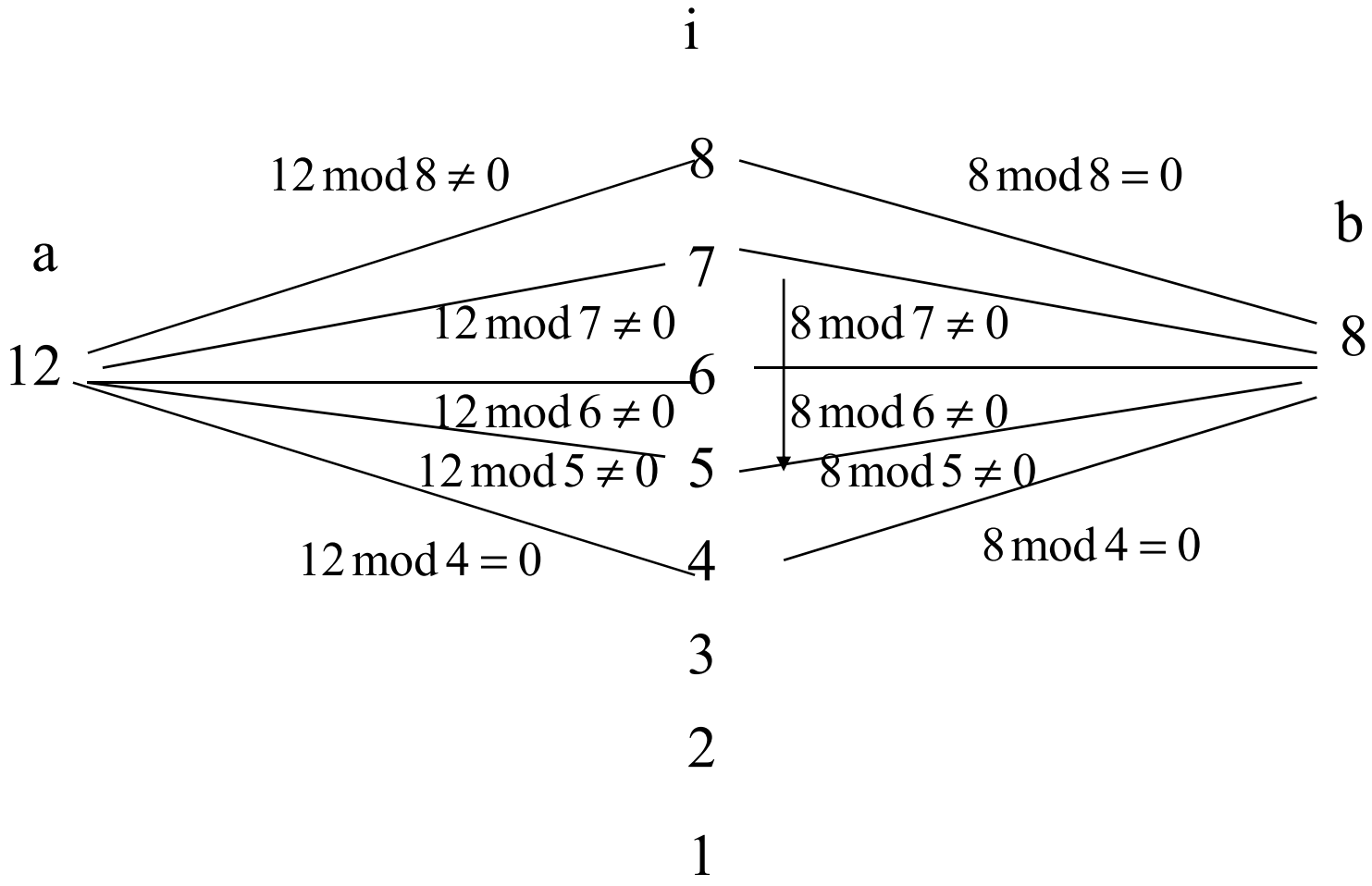
出力：a,bの最大公約数

$$\gcd(a,b)$$

素朴な最大公約数発見法

- 注目点
  - すべて整数

- アィディア
  - $1 \sim \min\{a,b\}$ の整数をすべて調べる。
  - $\min\{a,b\}$ から初めてカウンタを減らしながら繰り返す。


i
a
12
8
7
6
5
4
3
2
1
b
8
12 mod 8 ≠ 0
12 mod 7 ≠ 0
12 mod 6 ≠ 0
12 mod 5 ≠ 0
12 mod 4 = 0
8 mod 8 = 0
8 mod 7 ≠ 0
8 mod 6 ≠ 0
8 mod 5 ≠ 0
8 mod 4 = 0

アルゴリズムnaïve_gcd(a,b)
入力：a,b
出力：gcd(a,b)

```
1. for(i=min{a,b} ;i>0;i--){
2.   if(iがaとbの約数){
3.     return(i);
4.   }
5. }
```

- アルゴリズムnaïve_gcdの正当性は明らかなので省略する。（帰納法で証明もできる。）

- アルゴリズムnaïve_gcdの時間計算量

  高々 $\min\{a,b\}$ の繰り返し回数

  $O\left(\min\{a,b\}\right)$ の時間計算量

  $n \equiv a \approx b$ とすると、

  $O\left(n\right)$ 時間

  よって、naïve_gcdは線形時間アルゴリズムである。

ユークリッドの互除法

- 注意点
  - 全ての整数を調べる必要はない。
  - 整数における性質を利用（整数論）
- アイディア
  - 余りに注意して、互いに除算を繰り返す。
  - 前回の小さい方の数と余りを、新たな2数に置き換えて繰り返す。
  - 割り切れた時の小さい数が、最大公約数。

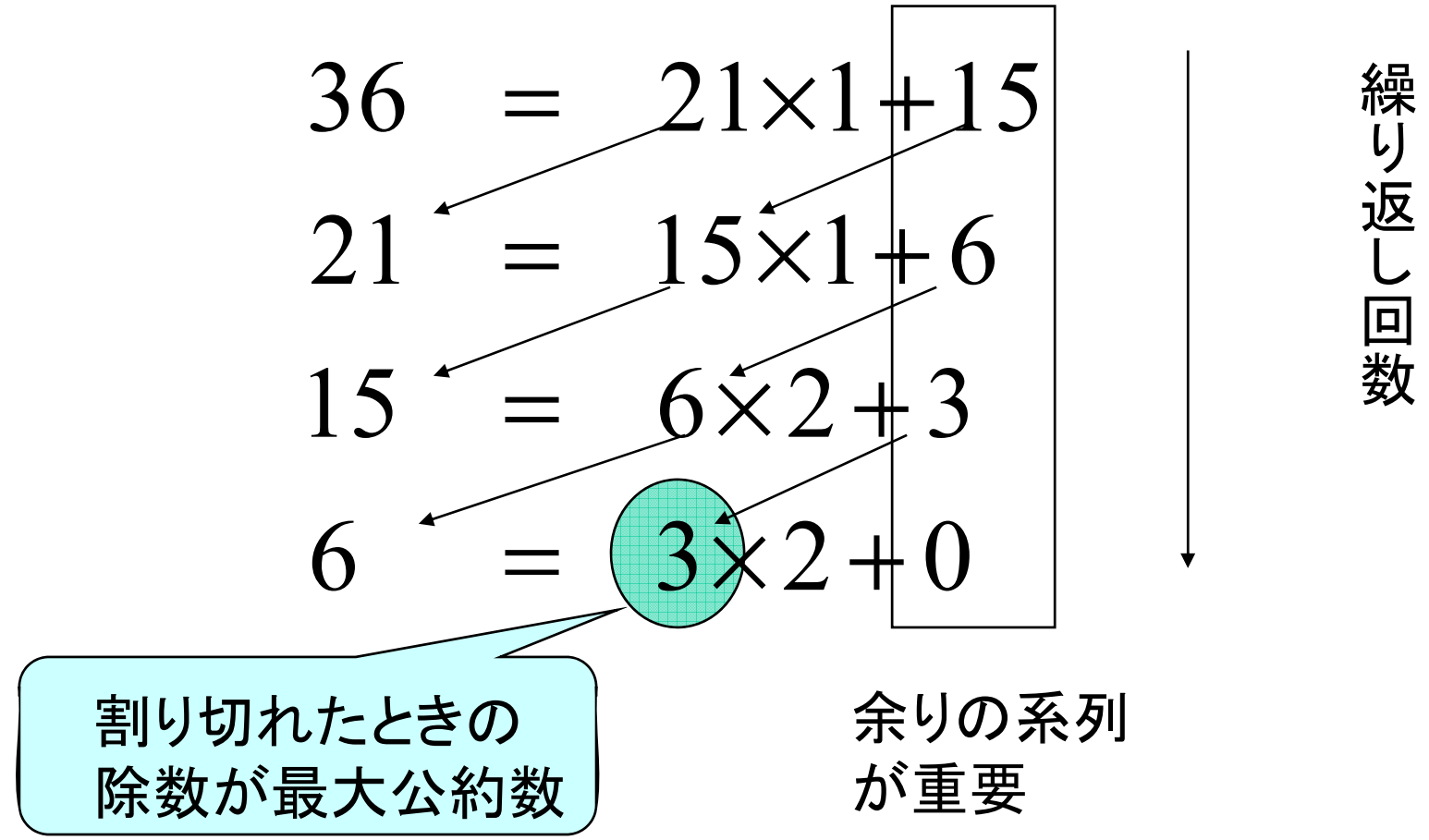
    →繰り返し回数を大幅に削減できる。

アルゴリズムeuclid_gcd(a,b)
入力：a,b(a>bとする。）
出力：gcd(a,b)

```
1. big=a;
2. small=b;
3. r=big % small;
4. While(割り切れない(r≠0) ){
5.       big=small;
6.       small=r;
7.       r=big % small;
8. }
9. return small;
```

ユークリッドの互除法の動作

$a = 36, b = 21$ の最大公約数を求める。



練習

$$a = 126, b = 70$$

に対して、ユークリッドの互除法を用いて、
最大公約数を求めよ。

ユークリッド互除法の正当性

整数論の初歩を用いる。ここでは、必要なものの証明を与える。

命題E1（割り算の性質）

2つの自然数a,b(a≧b＞0)に対して、
2つの自然数q,rを用いて、

$$a=bq+r \quad (0 \leqq r < b)$$

と表せる。

証明

bを固定し、aに関する帰納法で証明する。

基礎:

a=1のとき。

さらに、2つの場合に分ける。

場合1:a=1,b=1のとき。

1＝b＊1＋0

このとき、q＝1、r＝0

qを商、rを余りだと考える。

場合2:a=1,b＞1のとき

1＝b＊0＋1

このとき、q＝0、r＝1

帰納：

$a=n$のとき命題が成り立つと仮定する。（帰納法の仮定）
帰納法の仮定より、

$$n=bq+r\ (0\leqq r<b) \quad \text{――――――――――} ①$$

が成り立つ。

rは自然数なので、

$$0\leqq r<b$$

は、

$$1\leqq r+1\leqq b \quad \text{――――――――――} ②$$

と同じである。

①の両辺に1を加える。

$$n+1=bq+r+1$$

これも ②の等号の有無で2つの場合に分ける。

場合１：b=r+1のとき。

$$n+1=bq+r+1$$
$$\therefore n+1=bq+b$$
$$\therefore\ n+1=(q+1)b+0$$

商q＋１、余り0

場合2：b>r+1のとき。

$$n+1=bq+r+1$$
$$\therefore n+1=bq+(r+1)$$

商q、余りr＋１

QED

命題E2（割り算の一意性）

２つの自然数a,b(a≧b＞0)に対して、
２つの自然数q,rを用いて、

$$a=bq+r \quad (0 \leqq r < b)$$

と表すとき、その表現法は一意である。

証明　背理法による。

２通りに表せると仮定する。（背理法の仮定）

背理法の仮定より、

$$a=bq+r \ (0 \leqq r<b)$$
$$a=bq'+r'(0 \leqq r'<b')$$

と表現できる。ここで、qとq’か、rとr‘のどちらかは、
異なってなければならない。

両辺を減算する。

$$a=bq+r \ (0 \leqq r<b)$$
$$-) \ a=bq'+r' \ (0 \leqq r'<b)$$

$$0=(q-q')b+r-r' \quad (-b<r-r'<b)$$

$$\therefore (q'-q)b=r-r'$$

これは、r-r’がbの倍数であることを意味する。
一方、(-b<r-r’<b)であり、全て整数なので、
r-r’=0
∴r=r’
これより、q’=qが導けるが、背理法の仮定と矛盾する。
よって、命題が成り立つ。

QED

$a,b(a \geq b)$ の公約数を $\{\mathrm{cd}(a,b)\}$ と書く。

例えば、

$$\{\mathrm{cd}(32,20)\} = \{4,2,1\}$$

Common Divisor
(公約数)

命題E3 （約数集合の普遍性）

$a,b(a \geq b)$ に対して、先の命題E1，E2で定まる表現を

$$a = bq + r \quad (0 < r < b)$$

とする。このとき、

$$\{\mathrm{cd}(a,b)\} = \{\mathrm{cd}(b,r)\}$$

証明の前に、具体例で調べる。

$a=32, b=20$ とする。

$$32=20\times1+12$$

より、$q=1, r=12$

公約数をみると、

$$\{\mathrm{cd}(32,20)\}=\{4,2,1\}$$

$$\{\mathrm{cd}(20,12)\}=\{4,2,1\}$$

また、

$$20=12\times1+8$$

より、

$$\{\mathrm{cd}(12,8)\}=\{4,2,1\}$$

証明

任意の $e \in \{cd(a,b)\}$ に対して、$e \in \{cd(b,r)\}$ を示す。

$e \in \{cd(a,b)\}$ より、自然数 l,m を用いて、

$$\begin{cases} a = le \\ b = me \end{cases}$$

と書ける。 $a = bq + r$ を用いると、次式が成り立つ。

$$bq + r = le$$

$b = me$ を代入してまとめる。

$$r = (l - mq)e$$

この式は、e が r の約数であることを示している。

QED

ユークリッドの互除法の停止性

命題E4 （ユークリッド互除法の停止性）

ユークリッドの互除法は停止する。

証明

ユークリッドの互除法によって次のような系列が得られたする。

$$a = bq_1 + r_1 \quad (0 < r_1 < b)$$
$$b = r_1 q_2 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1)$$
$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2)$$
$$\vdots$$

このとき、余りの系列は、単調減少する。すなわち、

$$b > r_1 > r_2 > \cdots$$

余りは、非負整数なので、ある繰り返し回数で必ず0になる。
したがって、停止する。

QED

ユークリッドの互除法の時間計算量

ユークリッド互除法の時間計算量を見積もるために、
次の命題が成り立つことに注意する。

命題E5 （余りの性質）

$a, b (a \geq b)$ に対して、先の命題E1，E2で定まる表現を

$$a = bq + r \quad (0 < r < b)$$

とする。このとき、

$$r < \frac{a}{2}$$

証明の前に、具体例で確認する。

$$a = 36, b = 21$$

$$36 = 21 \times 1 + 15$$

$$21 = 15 \times 1 + 6$$

$$15 = 6 \times 2 + 3$$

$$6 = 3 \times 2 + 0$$

$$< \frac{36}{2}$$

$$< \frac{21}{2}$$

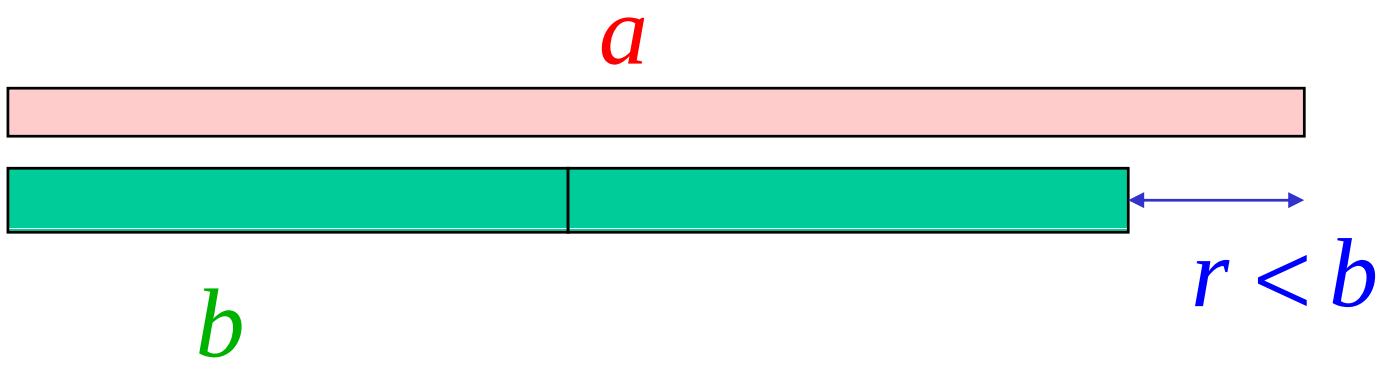
$$< \frac{15}{2}$$

証明

２つの場合に分けて、$r < \frac{a}{2}$ を示す。

場合１：$b \leq \frac{a}{2}$ のとき、

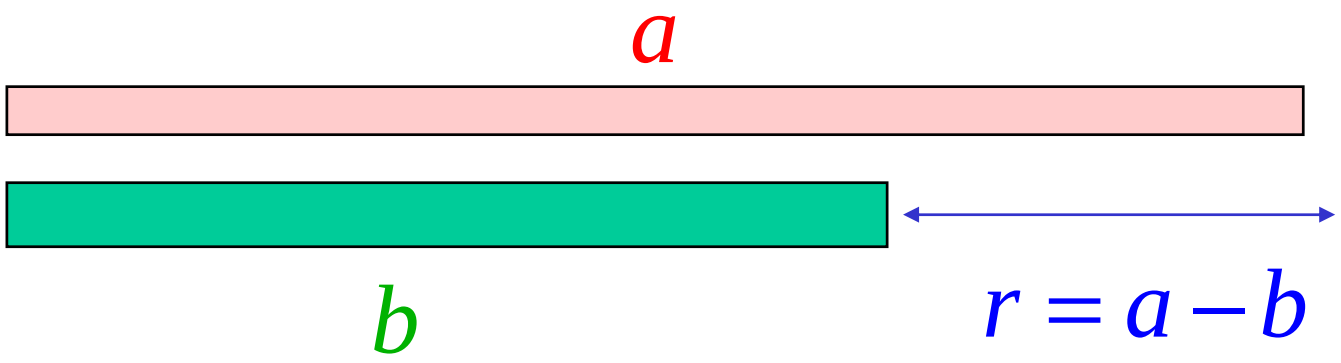
$$r < b \leq \frac{a}{2}$$



QED

場合２：　$b > \frac{a}{2}$　のとき、

このとき、$a - b < \frac{a}{2}$ に注意する。

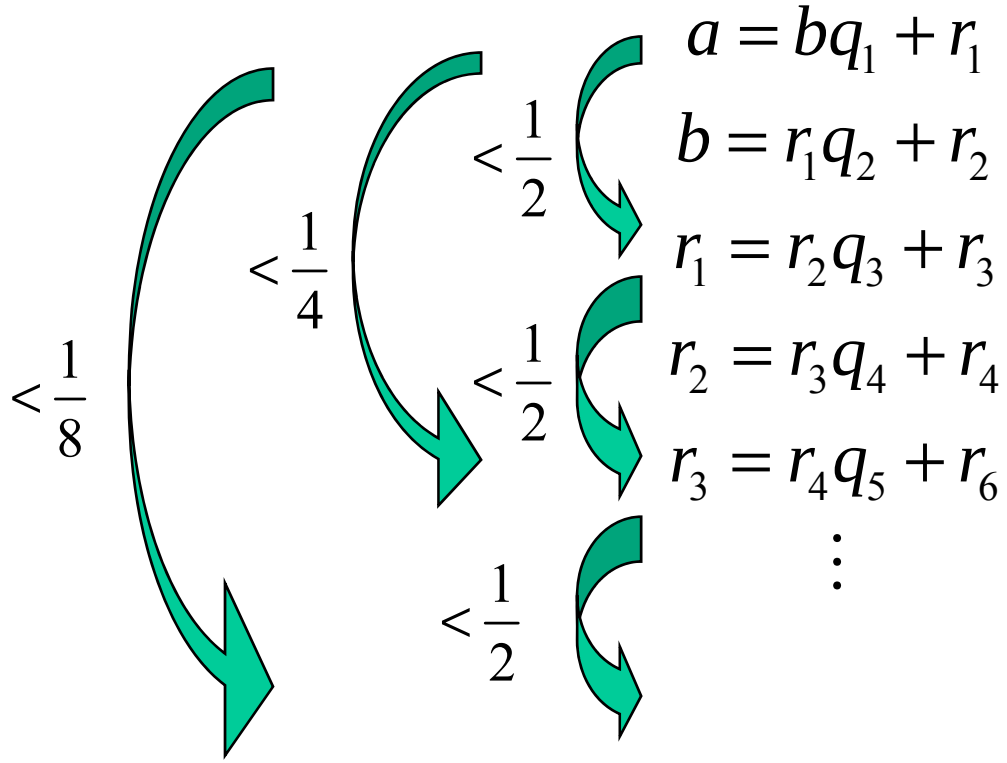


$$a = bq + r$$

において、商として $q = 1$　にしかならない。
したがって、

$$r = a - b < \frac{a}{2}$$

命題E5より、ユークリッド互除法の計算量を求められる。



繰り返し回数は、高々 $O(\log_2 a)$ 回である。

したがって、ユークリッドの互除法は、
時間計算量 $O(\log_2 a)$ のアルゴリズムである。

最大公約数問題のまとめ

- 素朴な方法
  - $O(n)$　時間のアルゴリズム

- ユークリッドの互除法
  - $O(\log n)$　時間のアルゴリズム

n：入力サイズ

ユークリッドの互除法の再帰的な実現

ユークリッドの互除法は、再帰的にも実現できる。

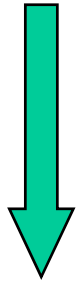
$$a = 36, b = 21$$

$$36 = 21 \times 1 + 15 \longleftarrow \gcd(36, 21)$$

$$21 = 15 \times 1 + 6 \longleftarrow \gcd(21, 15)$$

$$15 = 6 \times 2 + 3$$

$$6 = 3 \times 2 + 0 \longleftarrow \text{割り切れるときが基礎}$$

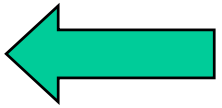


サイズが小さい同じ
問題を解くことに注意する。

アルゴリズムrecucive_gcd(a,b)
入力:a,b
出力:gcd(a,b)

```
1.int gcd(a,b){
2.  r=a%b;
2.  if(r==0){
3.      return b;
4.    }
5.   else{
6.      return gcd(b,r);
7.   }
8.}
```


基礎


帰納

フィボナッチ数列問題

フィボナッチ数列問題

入力：整数N

出力：フィボナッチ数列の第N項

$$\begin{cases} f(0) & = 0 & n = 0 \\ f(1) & = 1 & n = 1 \\ f(n) & = f(n-1) + f(n-2) & n \geq 2 \end{cases}$$

漸化式と再帰アルゴリズム

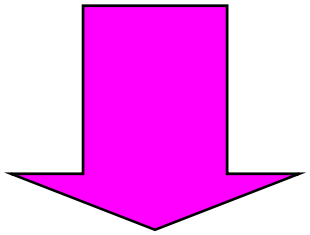
アルゴリズムfibo_rec
入力：N
出力：fibo(N)

```
1.int f(n){
2.  if(n==0){
3.    return 0;
4.  }else if(n==1){
5.    return 1;
6.  }else {
7.   return f(n-1)+f(n-1);
8.  }
9.}
```

$$\begin{cases} f(0) = 0 & n=0 \\ f(1) = 1 & n=1 \\ f(n) = f(n-1)+f(n-2) & n \geq 2 \end{cases}$$

- 再帰アルゴリズムの利点の一つに、
  漸化式で表された数列を直接プログラム
  にすることができることがある。

- ある問題を解くときに、同じ問題でよりサイズが小さい問題インスタンスの解が、元の問題の解放に大きな役割を果たせることが多い。



再帰アルゴリズムが便利

ただし、再帰アルゴリズムは、性能に大幅な差異があるので、最悪時間計算量をきちんと見積もる必要がある。

- アルゴリズムfibo_recの正当性は明らかなので省略する。

- アルゴリズムfibo_recの時間計算量T(n)は漸化式で表される。この漸化式を解くことで、時間計算量が求まる。

アルゴリズムfibo_rec(N)　　の最悪時間量

求める時間量をT(N)とすると次式が成り立つ。

```
1.int f(n){
2.  if(n==0){
3.    return 0;
4.  }else if(n==1){
5.    return 1;
6.  }else {
7.   return f(n-1)+f(n-2);
8.  }
9.}
```

$$T(0) = c_1$$

$$T(1) = c_2$$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + c_3$$

$$\begin{cases} T(0) = c_0 & n=0 \\ T(1) = c_1 & n=1 \\ T(n) = T(n-1)+T(n-2)+c_2 & n \geq 2 \end{cases}$$

このように、
再帰アルゴリズムの
時間計算量は、
始め漸化式で導かれ
ることが多い。

漸化式を簡単に解くには、時間の関数は単調増加であることを利用する。

$$T(n-1) \geq T(n-2)$$

を利用すると、与式の帰納部分は、

$$T(n) \leq 2T(n-1) + c_2$$

とかける。

この漸化式を解く。

$$
\begin{aligned}
&T(n) \le 2T(n-1) + c_2 \\
&\le 2(2T(n-2) + c_2) + c_2 = 4T(n-2) + 3c_2 \\
&\le 2(4T(n-3) + 3c_2) + c_2 = 8T(n-3) + 7c_2 \\
&\le \cdots \\
&\le 2^{n-1}T(1) + (2^{n-1})c_2 \\
&\le c_1 2^{n-1} + c_2 2^{n-1} \\
&\le c2^n \qquad (c \equiv \max\{c_1, c_2\}) \\
&\therefore T(n) = O(2^n)
\end{aligned}
$$

厳密に解くには、帰納法を用いるか、あるいは差分方程式の解を求める必要がある。

しかし、オーダー記法による漸近的評価では、不等式で計算していった方が、簡単に時間計算量が求まることが多い。

問題の考察による高速化

- フィボナッチ数列のような漸化式で表される数列は、N以下の全ての項が計算されていれば、定数時間で計算することができる。

$$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \longrightarrow a_n$$

漸化式は、その項より前の項番号を持つ式を組み合わせて定義される。

小さい項番号から、全ての数列を保持していれば、高速化が図れる。

配列を用いたアルゴリズム

アルゴリズムfibo_array
入力:N
出力:fibo(N)

```
1.int f(n){
2.  A[0]=0;
3.  A[1]=1;
4.  For(i=2;i<=n;i++){
5.     A[i]=A[i-1]+A[i-2];
6.  }
7.   return A[n];
8.}
```

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

アルゴリズムfibo_arrayの時間計算量

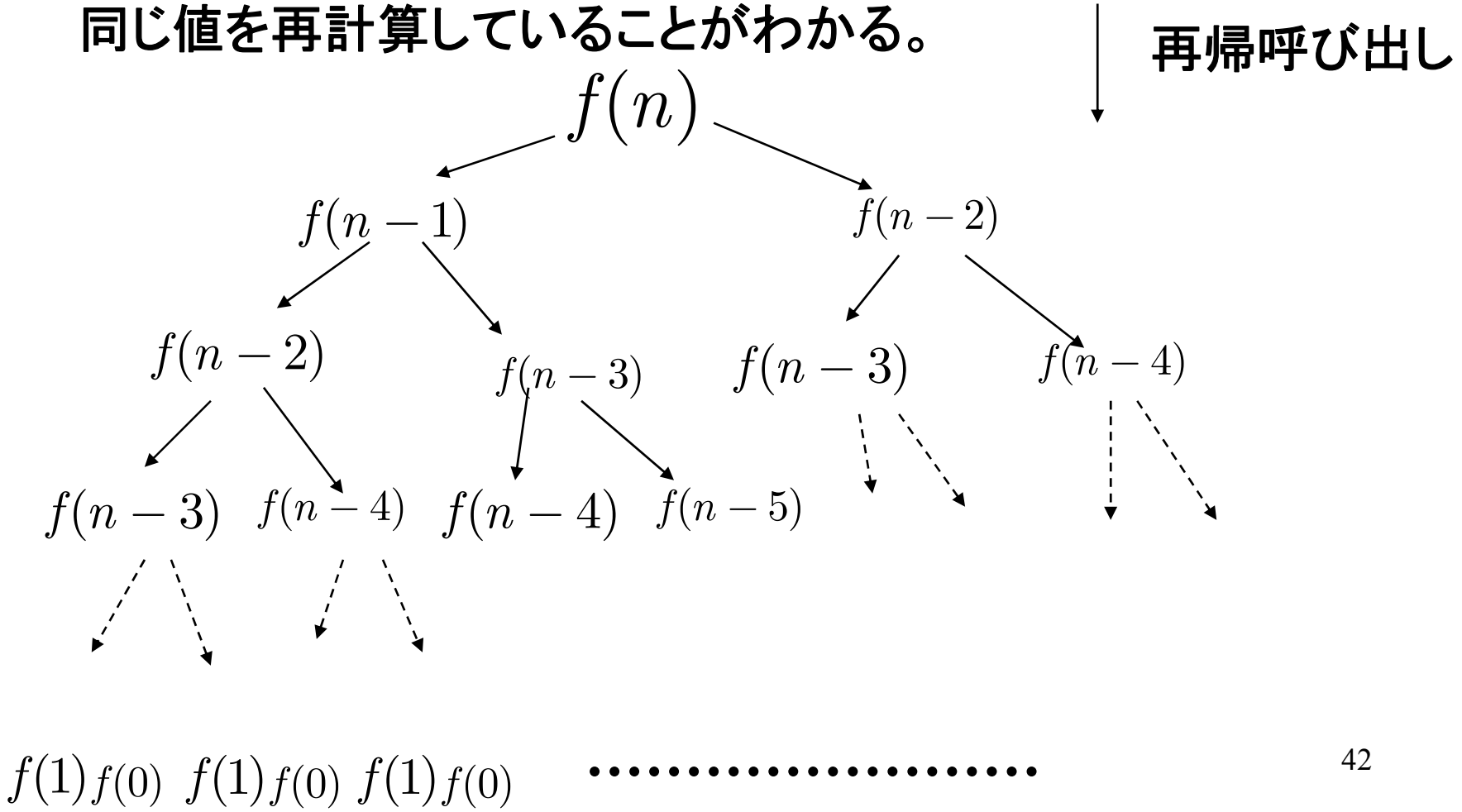
forループを**n-1**回繰り返しているだけなので、
Ｏ（ｎ）時間

この問題の場合は、再帰を用いると性能が悪くなる。
（問題によっては、高性能の再帰アルゴリズムもあるので、
十分な考察が必要となる。）

fibo_recが低速な理由

- 主に、不必要な再計算を行っていることが原因。

再帰呼び出しを注意深くトレースすると、
同じ値を再計算していることがわかる。



更なる高速化

○近似値でよければ、さらに高速化できる。

数学的には、フィボナッチ数列の一般項は次式である。

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}{\phi_1}^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}{\phi_2}^{n+1}$$

$x^2 + x + 1 = 0$

の解。

黄金比

高速なべき乗アルゴリズムを用いれば、

$$O(\log_2 n)$$

の時間計算量で解くことができる。