ソフトウェア工学

2007年
５セメスタ

履修にあたって

教科書:「アルゴリズムとデータ構造」
平田富夫著　森北出版

参考書:　「データ構造とアルゴリズム」
エイホ他著、倍風館

講義:５セメスター開講、専門科目、
K325 金曜3時限

担当:
草苅　良至
GI511(内線　2095)、kusakari@akita-pu.ac.jp

講義予定

１回 4/13	2回 4/20	3回 4/27 レポート提出	4回 5/11	5回 5/18 レポート提出	6回 5/25	7回 6/1 レポート提出
8回 6/8	９回 6/15	１０回 6/22 レポート提出	１１回 6/29	１２回 7/6	１３回 7/13 レポート提出	１４回 7/20

評価

- 出席15％
- レポート25％
- 試験60％

本講義の目的

- よいソフトウェアを作成するための基礎を身に着ける。
- 良いソフトウェアであることの客観的な評価法を身に着ける。

本講義のレポート

- 主にC言語によるプログラミングが伴う。

レポート作成の際には、プログラミング演習室を用いることができる。ただし、木曜日と、金曜日の午後は、３セメスターのプログラミング演習があるので、他の時間帯に利用すること。

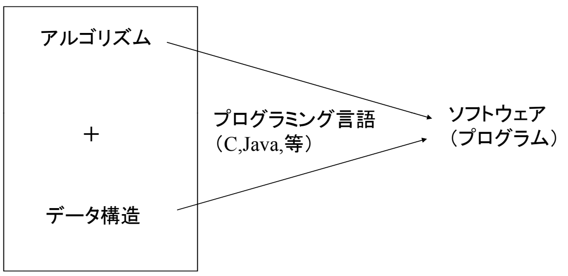
1.アルゴリズム入門

よいソフトウェアとは

本講義では、主にこの部分に注目する。

- 同じ処理を速く実行できるソフトウェア（同じハードウェアで動作させた場合。）
- 同じ処理を少ないメモリで実行できるソフトウェア
- 再利用が可能なソフトウェア
- 誤動作のないソフトウェア
- 使いやすいソフトウェア
- 等々

ソフトウェア作成の基礎



基礎

本講義での主な注目点

- 同じ処理を高速に実行できるアルゴリズムの作成と評価
  – なお、アルゴリズムとは、計算機の基本操作の有限個の組み合わせである。すわわち、機械的な手順で、有限であるもの。厳密には、チューリング機械やRAM(Random Access Machine)を用いて定義されるが、本講義では省略する。

アルゴリズムの解析

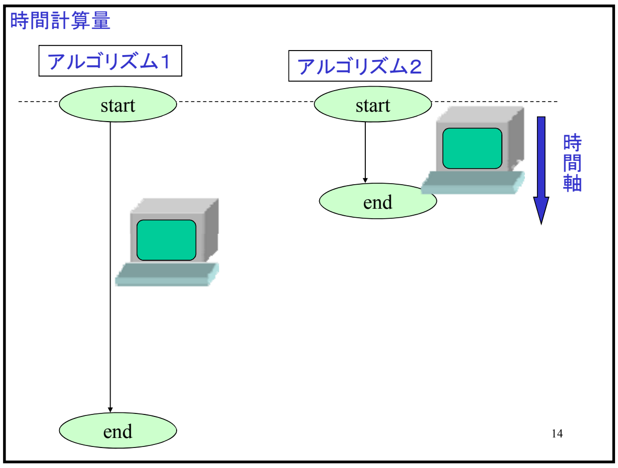
- 速度の解析
  – 数学的解析　O記法による時間量解析
  – 実験的解析　実装と時間計測
- 正当性
  – 数学的証明　帰納法や背理法
  – 実験的解析　実装とテスト

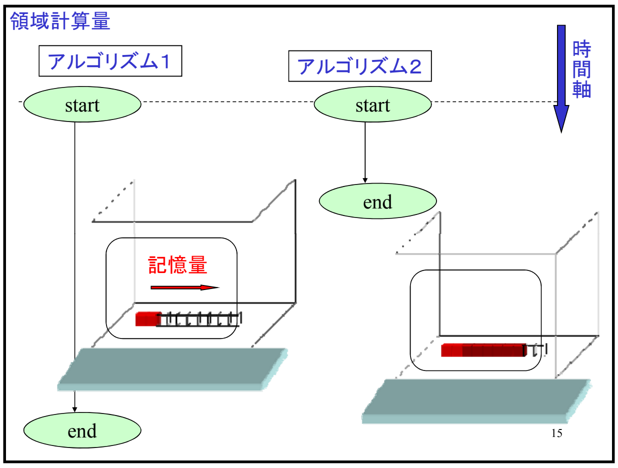
アルゴリズムの計算量
(complexity)

アルゴリズムの計算量1

- 時間計算量(time complexity)
  - 総ステップ数(基本演算の総数、アルゴリズムでは∞にはならない。)
  - 同じハードウェアでも速く実行できるプログラム作成のための指標。
- 領域計算量(space complexity)
  - アルゴリズム実行時に、開始から終了までの間に使用するメモリやディスクなどの利用量
  - 記憶量ともいう。

13





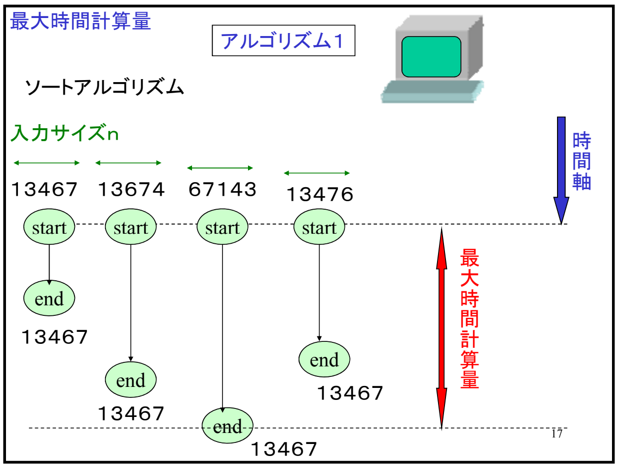
アルゴリズムの計算量2

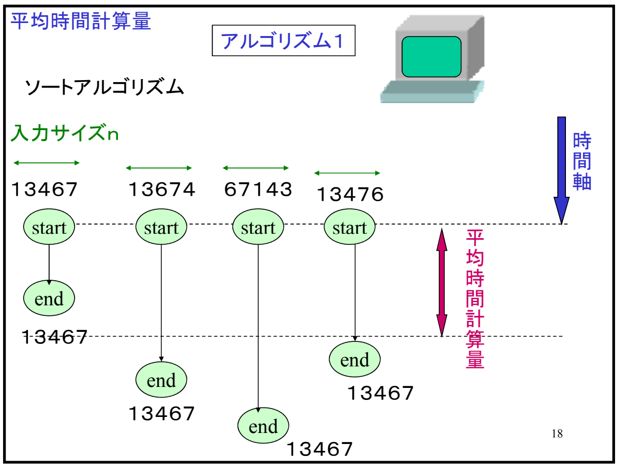
- 最大時間計算量

(worst case time complexity)
  - 同じ入力サイズの問題に対して、最も遅く動作する場合を想定したときの時間計算量。
  - 最悪計算量ともいう。
- 平均時間計算量

(average case time complexity)
  - 同じ入力サイズの問題に対して、入力の分布を考えて、時間計算量を平均したもの。

16





アルゴリズムの解析例

19

簡単なアルゴリズム例（最大値を求める。）

アルゴリズムmax

```
1. big=A[0];
2. for(i=1;i<n;i++){
3.   if(A[i]>big){
4.     big=A[i];
5.   }
6. }
```

1回の代入

n回の比較

n-1回の比較

最悪n-1回の代入

最大時間計算量T（n）＝3n－1のアルゴリズム

20

アルゴリズムmaxの正当性

次の命題を帰納法によって証明する。

命題１

forループがi回実行されたとき、
bigにはA[0]~A[i]の最大値が保持されている。

証明

基礎

i=0

このときは、bigにはA[0]が保持されており、明らかに命題は成り立つ。

帰納

i=kの時、命題１が成り立つと仮定する。（帰納法の仮定）
このとき、i=k＋１を考える。

21

帰納法の仮定より、

big=max{A[0],A[1],…,A[k]}

このとき、２つの場合に分けて考える。

場合１　A[k+1]>bigのとき。

このときは、アルゴリズムmaxの３．のif文の条件分岐が真なので、big=A[k+1]に更新される。
よって、k+1回目の繰り返し終了時には、
big=max{A[0],A[1],…,A[k+1]}

場合2　A[k+1]<=bigのとき。

max{A[0],A[1],…,A[k+1]}
=max{max{A[0],A[1],…,A[k]},A[k+1]}
=max{big,A[k+1]}
=big

どちらの場合も命題が成り立つ。

QED

22

アルゴリズムmaxの停止性

次の命題を証明する。

命題2

forループの反復部分は、丁度n-1回実行される。

証明

ループカウンタiは１からはじまる。
また、ループカウンタiが繰り返し事に１増加する。
ループカウンタがi＝nになったときには、ループの反復部分は実行されない。したがって、丁度n-1回反復部分は実行される。

QED

命題１と命題2より、アルゴリズムmaxは正しいことがわかる。

23

漸近的解析
（Asymptotic Analysis)

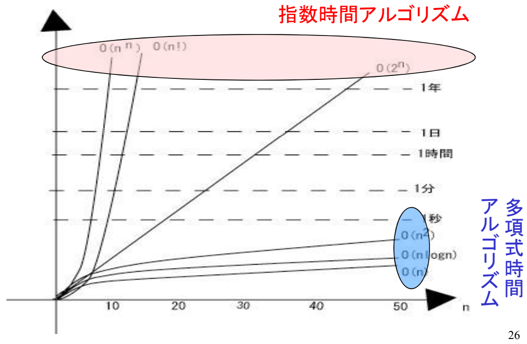
24

入力サイズ ＼ アルゴリズム	A n	B $n\log n$	C n^2	D n^3	E 2^n	F $n!$
$n=10$	1.0×10^{-7}	3.3×10^{-7}	1.0×10^{-6}	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}	0.04
15	1.5×10^{-7}	0.6×10^{-6}	2.3×10^{-6}	0.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}	$3.6(h)$
20	2.0×10^{-7}	0.8×10^{-6}	0.4×10^{-5}	0.8×10^{-4}	1.1×10^{-2}	$772(y)$
30	3.0×10^{-7}	1.5×10^{-6}	0.9×10^{-5}	0.3×10^{-3}	11	
50	5.0×10^{-7}	2.8×10^{-6}	1.6×10^{-5}	1.3×10^{-3}	$4\times10^{14}(y)$	
100	1.0×10^{-6}	6.6×10^{-6}	1.0×10^{-4}	0.01		
500	5.0×10^{-6}	4.5×10^{-5}	2.5×10^{-3}	1.3		
1000	1.0×10^{-5}	0.1×10^{-3}	1.0×10^{-2}	10		
10000	1.0×10^{-4}	1.3×10^{-3}	1.0	$2.8(h)$		
10^5	1.0×10^{-3}	1.7×10^{-2}	100	$116(d)$		

100MIPSの計算機（１命令あたり 10^{-8} 秒）　単位：秒(sec)

25

関数の漸近的ふるまい（関数の増加率による分類）

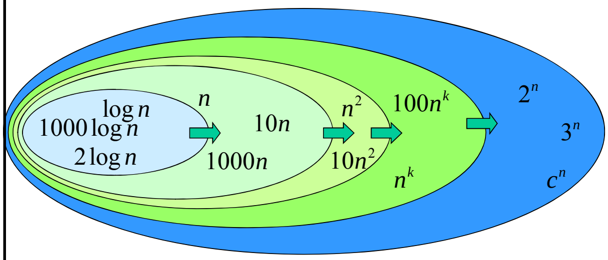


26

関数の分類１（計算量の漸近的評価１）：オーダー記法

重要！

関数の増加傾向により、関数を大まかに分類したい。



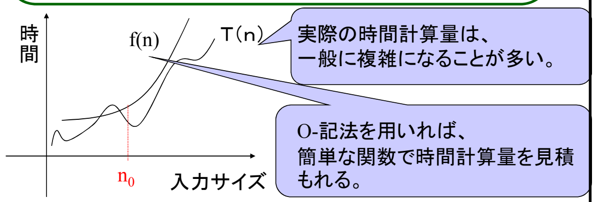
$O(\log n) \Rightarrow O(n) \Rightarrow O(n^2) \Rightarrow O(n^k) \Rightarrow O(c^n)$

対数（時間）　多項式（時間）　指数（時間）

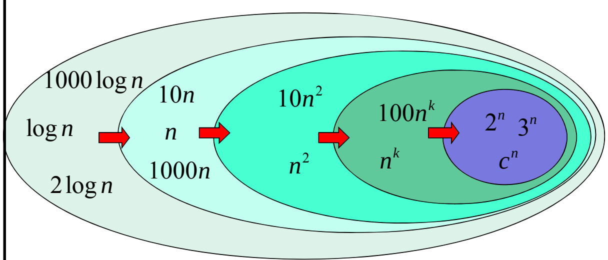
定義：オーダー記法

ある関数f(n)に対して、計算量T(n)がO(f(n))であるとは、適当な２つの正定数n_0とcが存在して、n_0以上のすべてのnに対して
T(n)≦cf(n)
が成り立つことである。

O-記法は“以下”を表す記法。計算時間の上界を見積もる。



関数の分類２（計算量の漸近的評価２）：オメガ記法



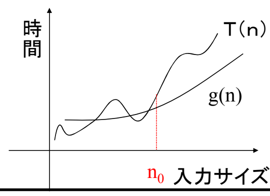
$\Omega(\log n) \Rightarrow \Omega(n) \Rightarrow \Omega(n^2) \Rightarrow \Omega(n^k) \Rightarrow \Omega(c^n)$

対数（時間）　多項式（時間）　指数（時間）

定義：オメガ記法

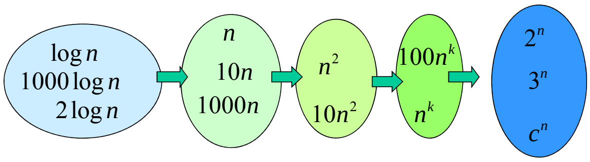
ある関数g(n)に対して、計算量T(n)がΩ(g(n))であるとは、適当な２つの正定数n_0とcが存在して、n_0以上のすべてのnに対して
T(n)≧cg(n)
が成り立つことである。

Ω記法は“以上”を表す記法。計算時間の下界を見積もる。



30

関数の分類3（計算量の漸近的評価3）: シータ記法



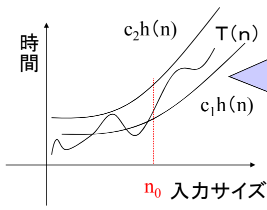
$\Theta(\log n) \Rightarrow \Theta(n) \Rightarrow \Theta(n^2) \Rightarrow \Theta(n^k) \Rightarrow \Theta(c^n)$

対数（時間）　多項式（時間）　指数(時間）

定義:シータ記法

ある関数h(n)に対して、計算量T(n)がΘ(h(n))であるとは、適当な3つの正定数n_0、c_1、c_2 が存在して、n_0以上のすべてのnに対して
$c_1h(n) \leqq T(n) \leqq c_2h(n)$
が成り立つことである。

Θ記法は“ほぼ等しい”を表す記法。



Θ記法は漸近的な時間計算量を定数倍の差の範囲で見積もれる。
Θ記法で表されるとき、その時間計算量はタイト(tight)といわれる。

O記法の例

(1) $f(n) = 2n$

$n_0 = 1, c = 2, g(n) = n$ とすれば、

$n \geq 1$ に対して、 $f(n) \leq 2g(n)$

よって、 $2n = O(n)$

(2) $f(n) = 5n^2 + 100n$

$n_0 = 100, c = 6, g(n) = n^2$ とすれば、

$n \geq 100$ に対して、 $f(n) \leq 6g(n)$

よって、 $5n^2 + 100n = O(n^2)$

注意2：通常O記法では、最も簡単な関数で表す。

33

O記法の例

(3) $f(n) = 10000000000$

$n_0 = 1, c = 10000000000, g(n) = 1$ とすれば、

$n \geq 1$ に対して、 $f(n) \leq cg(n)$

よって、 $10000000000 = O(1)$

(4) $f(n) = 2^n + n^{100}$

$n_0 = 1000, c = 2, g(n) = 2^n$ とする。

$2^{1000} = \left(2^{10}\right)^{100} = (1024)^{100} > (1000)^{100}$ なので、

$n \geq 1000$ に対して、 $f(n) \leq cg(n)$

よって、$2^n + n^{100} = O(2^n)$

34

O記法の練習問題

次の数列の一般項（関数）をO記法で表せ。

(1) $f(n) = 10n - 500$

(2) $f(n) = 10n\sqrt{n} + 100000n^2$

(3) $f(n) = 1000\log_2 n + 10\log_{10} n$

(4) $f(n) = \sqrt{n} + \log_2 n$

(5) $f(n) = 2^n + 3^n$

35

プログラムと漸近的評価

仮定1

プログラム内の加減算は、ある定数 c_1時間以下で実行できる。

仮定2

プログラム内の乗除算は、ある定数 c_2時間以下で実行できる。

仮定3

プログラム内の比較は、ある定数 c_3 時間以下で実行できる。

仮定4

プログラム内の代入は、ある定数 c_4時間以下で実行できる。

・
・

プログラムでは、このように仮定できることが多い。

36

プログラグラムの漸近的評価

37

仮定１－４より、$c > \max\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ なる c をとると、

プログラム内の4則演算、比較等はある定数時間以下で実行できる。

つよめて

プログラム内では、
繰り返し構造、
（再帰関数を含む）関数呼び出し、
以外は定数時間で実行できると仮定できることが多い。

38

プログラムにおける計算時間の漸近評価例

```
function1()
{
        for(k=0;k<n;k++)
         {
                ....
          }
}
```

forループは、この部分だけで漸近時間計算量が見積もれる。

この部分がn回実行されることに注意する。

function1の計算時間は、$O(n)$ である。

39

プログラムにおける計算時間の漸近評価例2

```
function2()
{
        for(k=0;k<n;k++)
        {
                for(j=0;j<n;j++)
                {
                        ....
                }
        }
}
```

この部分は n 回実行されることに注意する。

この部分は n^2 回実行されることに注意する。

この部分はn 回実行されることに注意する。

function2の計算時間は、$O(n^2)$で ある。

40

プログラムにおける計算時間の漸近評価例3

```
function3()
{
        for(k=0;k<n;k++)
        {
                for(j=0;j<k;j++)
                {
                        ......
                }
        }
}
```

外側のループカウンタが、内側のループ回数に影響を与える。一見、nと無関係に見える。

function3の計算時間 $f(n)$ を評価する。。

$$f(n) = c(1+2+3+\cdots+n) = c\frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$$

41

プログラムにおける計算時間の漸近評価例4

```
int function4(int n)
{
        if(n<1)
        {
                return(0);
        }
        else
        {
                function4(n-1);
        }
}
```

function4の計算時間 $f(n)$ を評価する。

$$\begin{cases} f(1) = c_1 \\ f(n) = f(n-1) + c_2 \end{cases}$$

この漸化式より、

$f(n) = O(n)$ である。

再帰関数の時間計算量は、見た目では分かりにくい。

42

プログラムにおける計算時間の漸近評価例5

```
int function5(int n)
{
        if(n<1)
        {
                return(0);
        }
        else
        {
                function5(n/2);
        }
}
```

function5の計算時間 $f(n)$ を評価してみましょう。

$$\begin{cases} f(1) = c_1 \\ f(n) = f(\frac{n}{2}) + c_2 \end{cases}$$

この漸化式より、

$f(n) = O(\log n)$ である。

43

プログラムにおける計算時間の漸近評価例6

```
int function6(int n)
{
        if(n<1)
        {
                return;
        }
        else
        {
                function6(n-1);
                function6(n-1);
        }
}
```

function6の計算時間 $f(n)$ を評価してみましょう。

$$\begin{cases} f(1) &= c_1 \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-1) + c_2 \\ &= 2f(n-1) + c_2 \end{cases}$$

この漸化式より、

$f(n) = O(2^n)$ である。

44

プログラムにおける計算時間の漸近評価練習1

次のプログラムの計算時間をO記法で求めよ。
ただし、入力サイズは仮引数nに入っている数とする。

45

(1)

```
exercise1(int n)
{
        for(j=0;j<n;j++)
        {
                for(k=0;k<n;k++)
                {
                        ......
                }
        }
        for(l=0;l<n;l++)
        {
                ××××
        }
}
```

46

(2)

```
exercise2(int n)
{
        if(n<2)
        {
                return;
        }
        else
        {
                exercise2(n-1);
                exercise2(n-2);
        }
}
```

47

アルゴリズムの入力について

・問題と問題例
・入力サイズ

48

問題と問題例
(problem and problem instances)

問題：現実の問題を定義したもの。
　　同じような入力と出力の関係を定めたもの。

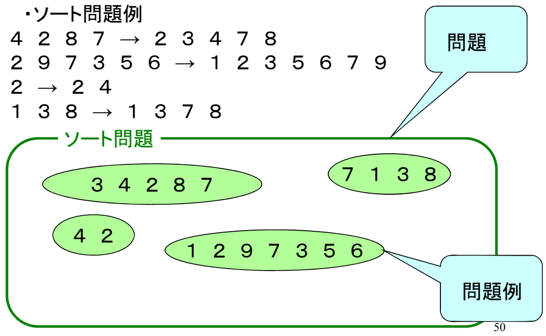
・でたらめに並んだ数値を順番にならべる。
　ー＞ソート問題（入力：でたらめな列、
　　　　　　　　出力：順序列）
・2つの数字の最大公約数を求める。
　ー＞gcd問題（入力：2つの整数、
　　　　　　　出力：1つの最大公約数）
・数の集合から最大値を求める
　ー＞最大値問題（入力：数の集合、
　　　　　　　　出力：入力中の最大値）

…

49

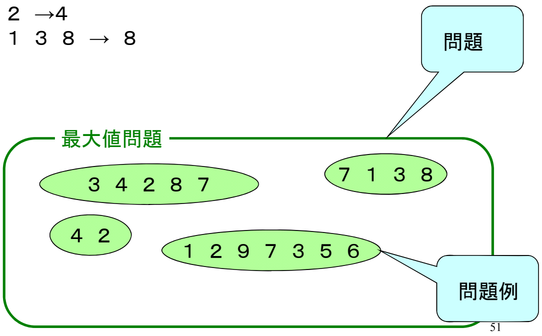
問題例：具体的に数値を与えたもの。
　問題は、問題例の集合としてとらえられる。

・ソート問題例
３ ４ ２ ８ ７ → ２ ３ ４ ７ ８
１ ２ ９ ７ ３ ５ ６ → １ ２ ３ ５ ６ ７ ９
４ ２ → ２ ４
７ １ ３ ８ → １ ３ ７ ８



50

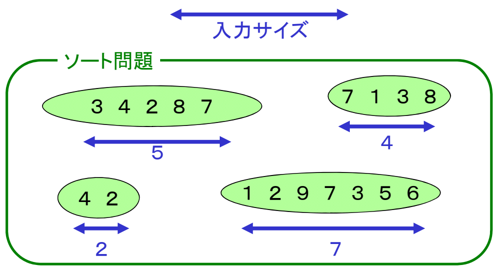
・最大値問題
３ ４ ２ ８ ７ → ８
１ ２ ９ ７ ３ ５ ６ → ９
４ ２ →4
７ １ ３ ８ → ８



51

入力サイズ

入力を計算機で表現するときの大きさ。
一つ問題例を定めると入力サイズも定まる。



52

本講義では
主にこの基準を用いる

- 一様コスト基準（一様コストモデル）
  どの数の計算も一定時間（定数時間）できるとき
  （一つの数の入力サイズは1）
- 対数コスト基準（対数コストモデル）
  数の表現を桁数まで考えて数を扱う。
  桁の大きい数同士の計算は大変なので。
  （数aの入力サイズはlog a）

この基準を用いるときは、
その都度ことわる

対数コストモデルについて
（計算機内での数の表現と桁数）

10進数　$d_n d_{n-1} \cdots d_0$　　$d_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

⇕

2進数　$b_m b_{m-1} \cdots b_0$　　$b_i \in \{0,1\}$

上のように相互変換されるとき、

$$m = O(n)$$

である。

n：10進数での桁数
m：2進数での桁数

54

証明

$$A \equiv d_n \times 10^n + d_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + d_0 = b_m \times 2^m + \cdots + b_0$$

$2^m \le A < 2^{m+1}$ に注意して、底2の対数をとる。

$$\log_2 2^m \le \log_2 A < \log_2 2^{m+1}$$

$$\therefore m \le \log_2 A < m+1$$

また、$10^n \le A < 10^{n+1}$ に注意して、底2の対数をとる。

$$\log_2 10^n \le \log_2 A < \log_2 10^{n+1}$$

$$\therefore n \log_2 10 \le \log_2 A < (n+1)\log_2 10$$

$c \equiv \log_2 10$ とおく。

$$m \le \log_2 A < (n+1)\log_2 10 = c(n+1)$$

$$\therefore m < c(n+1)$$

QED

・最大値問題の入力サイズ

33　424　21 996 1242 → 　1242