

第 6 回課題 06

(条件による繰り返し、2010/5/27(木))

課題に用いられる原理:ニュートン法

方程式 $f(x) = 0$ の解の真値を x^* とする. つまり, $f(x^*) = 0$ が満たされるとする. このとき, ニュートン法とは, 真値 x^* に収束する数列により, 真値 x^* の近似解を求める方法である. ニュートン法で用いられる数列 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ は, 次の漸化式で定められる. テキスト参照.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

このニュートン法を利用することにより, 実数 a の k 乗根 $\sqrt[k]{a}$ を求めることができる. すなわち, $f(x) = x^k - a$ とすれば, k 乗根 $\sqrt[k]{a}$ は方程式 $f(x) = 0$ の解 x^* と等しく, 式

$$x^* = \sqrt[k]{a}$$

を満たす.

基本問題

06-1:平方根

本提出期限 2010/5/27(木) 22:00

再提出期限 2010/6/10(木) 14:00

提出物: Makefile, ソースファイル (mysqrt.c), 入力ファイル (mysqrt.in), 出力ファイル (mysqrt.out)

ニュートン法を用いて, 与えられた実数の平方根を求めるプログラムを作成せよ. ただし, 要求仕様 1 ~ 4 全てを満たすこと.

要求仕様 1(プログラム外部仕様)

- プログラム出力 (近似解) x_n が、次式を満たすこと。

$$|(x_n)^2 - (x^*)^2| = |(x_n)^2 - a| \leq 10^{-5}$$

(なお、通常 (絶対) 誤差は、

$$|x_n - x^*| = |x_n - \sqrt{a}|$$

で定義されるが、プログラムの簡易化のため上記判定を用いる。)

- 数学的に解が存在しない場合や、上の誤差の要求 (精度要求) を満たす解を計算できなかった場合には、適切なメッセージにより通知すること。

要求仕様 2(入力)

- 入力は、任意の 1 つの実数値 a (double 値) を標準入力から行う。

要求仕様 3(出力)(実行例参照)

- すべて標準出力へ行なう。
- $x_0 = a$ としてニュートン法を適用した際に求められる数列 $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ 。すなわち、真値 $x^* = \sqrt{a}$ に収束する数列。ただし、各項は、小数点以下 8 桁まで出力すること。
- 入力値 a の平方根 $\sqrt{a}$ の近似解 x_n (小数点以下 8 桁までの実数)。
- 数学的に平方根が存在しない場合には、適切なメッセージを出力する。
- 近似解の精度が外部仕様の精度要求を保証できない場合には、適切なメッセージを出力する。

要求仕様 4(プログラム内部仕様)

- 0.0 で除算は行なわないこと。
- ニュートン法の繰り返しは、1000 回を上限とする。すなわち、収束条件ではなくて、繰り返し回数上限でニュートン法が終了した際には、解の精度は保証されなくても良い。
- 収束条件 (10^{-5}) はマクロ定義すること。
- 繰り返し回数上限 (1000) はマクロ定義すること。

実行例 1

```
b11b0xx@tyy:~/prog/06$./mysqrt
平方根を求めます。
実数値を入力して下さい。
0.0
    0.00 の平方根は、    0.000000000  です。
b11b0xx@tyy:~/prog/06$
```

実行例 2

```
b11b0xx@tyy:~/prog/06$./mysqrt
平方根を求めます。
実数値を入力して下さい。
9.0
x0=    9.000000000
x1=    5.000000000
x2=    3.400000000
x3=    3.02352941
x4=    3.00009155
    9.00
の平方根は、
    3.000000000
です。
b11b0xx@tyy:~/prog/06$
```

実行例 3

```
b11b0xx@tyy:~/prog/06$./mysqrt
平方根を求めます。
実数値を入力して下さい。
-1.0
負の数
    -1.000000000
の平方根は存在しません。
b11b0xx@tyy:~/prog/06$
```

応用問題

06-2:k 乗根

本提出期限 2010/6/4(木) 14:00

再提出期限 2010/6/10(木) 14:00

提出物: Makefile、ソースファイル (kth_root.c)、入力ファイル (kth_root.in)、出力ファイル (kth_root.out)

ニュートン法を用いて、与えられた実数の k 乗根を求めるプログラムを作成せよ。ただし、 k は自然数とし、後の要求仕様 1 ~ 4 全てを満たすこと。

要求仕様 1(プログラム外部仕様)

- プログラム出力 (近似解) x_n が、次式を満たすこと。

$$|(x_n)^k - (x^*)^k| = |(x_n)^k - x| \leq 10^{-5}$$

(なお、通常 (絶対) 誤差は、

$$|x_n - x^*| = |x_n - \sqrt[k]{a}|$$

で定義されるが、プログラムの簡易化のため上記判定を用いる。)

- 数学的に解が存在しない場合や、上の誤差の要求 (精度要求) を満たす解を計算できなかった場合には、適切なメッセージにより通知すること。

要求仕様 2(入力)

- 入力はすべて標準入力より行なう。
- 任意の自然数 k , ($k = 1, 2, \dots$) が最初に入力される。 k は整数型 (int) の値である。
- 次に、任意の 1 つの実数値 a (double 値) が入力される。

要求仕様 3(出力)(出力例参照))

- すべて標準出力へ行なう。
- $x_0 = a$ としてニュートン法を適用した際に求められる数列 $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ 。すなわち、真値 $x^* = \sqrt[k]{a}$ に収束する数列。ただし、各項は、小数点以下 8 桁まで出力すること。
- 入力値 a の平方根 $\sqrt[k]{a}$ の近似解 x_n (小数点以下 8 桁までの実数)。
- ニュートン法の繰り返し回数。
- 数学的に k 乗根が存在しない場合には、適切なメッセージを出力する。
- 近似解の精度が外部仕様の精度要求を保証できない場合には、適切なメッセージを出力する。

要求仕様 4(プログラム内部仕様)

- 0.0 で除算は行なわないこと。
- ニュートン法の繰り返しは、1000 回を上限とする。すなわち、収束条件ではなくて、繰り返し回数上限でニュートン法が終了した際には、解の精度は保証されなくても良い。
- 収束条件 (10^{-5}) はマクロ定義すること。
- 繰り返し回数上限 (1000) はマクロ定義すること。

実行例 1

```
b11b0xx@tyy:~/prog/06$ ./kth_root
実数 a の k 乗根を求めます。
自然数 k と実数 a を入力して下さい。
自然数 k?
3
実数 a?
27.0
x0=    27.00000000
x1=    18.01234568
x2=    12.03597017
x3=     8.08610710
x4=     5.52838405
x5=     3.98006278
x6=     3.22152473
x7=     3.01488376
x8=     3.00007336
    27.00
の k=3 乗根は、
    3.00000000
です。
ニュートン法の繰り返し回数は、9 回です。
b11b0xx@tyy:~/prog/06$
```

実行例 2

```
b11b0xx@tyy:~/prog/06$ ./kth_root
実数 a の k 乗根を求めます。
自然数 k と実数 a を入力して下さい。
自然数 k?
4
実数 a?
-1.0
k=4 は偶数なので、負の数
    -1.00000000
の k 乗根は存在しません。
b11b0xx@tyy:~/prog/06$
```

実行例 3

```
b11b0xx@tyy:~/prog/06$ ./kth_root
実数 a の k 乗根を求めます。
自然数 k と実数 a を入力して下さい。
自然数 k?
8
実数 a?
1.0e+20
x0=100000000000000000000.00000000
x1=87500000000000000000.00000000
x2=76562500000000000000.00000000

(中略)

x998=    316.22776602
x999=    316.22776602
100000000000000000000.00
の k=8 乗根は、
    316.22776602
です。
ニュートン法の繰り返し回数は、1000 回です。
b11b0xx@tyy:~/prog/06$
```