2009年度　線形代数学㊙試験問題(電子)

日時：2009年9月2日（水）12:50-14:20

場所：D204(大学院棟)

注意事項：

１．指定された席に着席すること。

２．答案用紙は教卓に提出して退席すること。

３．問題用紙は持ち帰ること。

４．途中の計算課程も記述すること。

５．行列の行基本変形を用いる場合には、どの規則で変形を行ったのかも書くこと。（なお、この記述には、「１列目の掃き出し」といった記述を用いてもよい。）

６．草稿用紙が必要な場合は申し出ること。

１．行列の計算

以下の行列 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ に対して、問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}、\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}、\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}、\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

(1)和が定義されるすべての組み合わせに対して、和を求めよ。

（$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}$ 等同じ行列同士の和も考えること。）

(2)積が定義されるすべての組み合わせに対して、積を求めよ。

（$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}$ 等同じ行列同士の積も考えること。）

(3)次式の計算可能性を判定し、計算可能であれば計算せよ。

$$3\boldsymbol{A}(3\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{C})\boldsymbol{D}-2\boldsymbol{A}(4\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}+6\boldsymbol{C}\boldsymbol{D})$$

(4)次式の計算可能性を判定し、計算可能であれば計算せよ。

$$3(2\boldsymbol{BA}-3\boldsymbol{CD})-2(3\boldsymbol{BA}-5\boldsymbol{CD})$$

(5) 次式の計算可能性を判定し、計算可能であれば計算せよ。

ここで、${}^{t}X$ で行列 X の転置行列を表す。

$${}^{t}\left(\left({}^{t}\left(\boldsymbol{BD}\right)+{}^{t}\boldsymbol{D}\,{}^{t}\boldsymbol{C}\right){}^{t}\boldsymbol{A}\right)$$

２．行列の性質

次の行列 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ に関して、問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & x\end{bmatrix}、\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & y & 1\\ -2 & 5 & 3\end{bmatrix}、\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$$

(1) $|\boldsymbol{A}|=1$ のとき、x の満たすべき条件を求めよ。

(2) $|\boldsymbol{A}|=1$ のとき、$|\boldsymbol{C}|$ を求めよ。

(3) $\boldsymbol{B}$ が逆行列を持つとき、y の満たすべき条件を求めよ。

(4) $y=1$ のとき、逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を求めよ。

(5) $rank\boldsymbol{C}<3$ のとき、x,y の満たすべき条件を答えよ。

３．ベクトルの演算とその応用

３次元空間中に次の 3 点が与えられたとき、各設問に答えよ。

$A(2,1,-1), B(1,0,3), C(-1,1,0)$

(1)内積 $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}$

(2)ベクトル $\overrightarrow{OA}$ とベクトル $\overrightarrow{OC}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$

（すなわち、$\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{OA}, \boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{OC}, \|\boldsymbol{n}\| = 1$）

(3)線分 OA と線分 OC を２辺とする平行四辺形の面積

(4)3 線分 OA, OB, OC を３辺とする平行六面体の体積

4．線形空間と線形写像

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

とする。

このとき、次の設問に答えよ。

(1)ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が一次独立か一次従属のどちらであるかを判定せよ。また、

一次従属の場合には、$\boldsymbol{a}_3$ を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ の一次結合で表せ。

(2) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ の生成する部分空間 $L\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ を求めよ。

(3) $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3]$ とする。次の連立方程式を解け。

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -7 & 7 \\ -2 & 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4) $\boldsymbol{A}$ を表現行列とする線形写像を $f_{\boldsymbol{A}}$ とする。像 $\mathrm{Im}\, f_{\boldsymbol{A}}$ と核 $Ker\ f_{\boldsymbol{A}}$ を求めよ。