2009年度　線形代数学㊋試験解答例(電子)

1．行列の計算(40点)

以下の行列 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ に対して、問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}、\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}、\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}、\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

⑴和が定義されるすべての組み合わせに対して、和を求めよ。(10点、各2点)

（$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}$ 等同じ行列同士の和も考えること。）

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}=2\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{B}=2\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{C}=2\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6 & -4\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}=2\boldsymbol{D}=2\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

⑵積が定義されるすべての組み合わせに対して、積を求めよ。(18点、各3点)

（$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}$ 等同じ行列同士の積も考えること。）

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & 0+0\\ -1+2 & 0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+0 & 0+0 & 0+0\\ 2-2 & 0+2 & 0+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & -3+0 & 2+0\\ -1+0 & 3+2 & -2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -1 & 5 & -2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+0+0 & 2+0+0 & 0+0+0\\ -1+0+0 & -1-1+0 & 0+0+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+0+0 & -1-3+0 & 0+0-4\\ 0+0+0 & 0-1+0 & 0+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\bullet\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0+0 & 1-1+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

(3)次式の計算可能性を判定し、計算可能であれば計算せよ。（４点）

$3\boldsymbol{A}(3\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{C})\boldsymbol{D}-2\boldsymbol{A}(4\boldsymbol{BD}+6\boldsymbol{CD})$

計算可能

$$\begin{aligned}&3\boldsymbol{A}(3\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{C})\boldsymbol{D}-2\boldsymbol{A}(4\boldsymbol{BD}+6\boldsymbol{CD})\\ &=9\boldsymbol{ABD}+12\boldsymbol{ACD}-8\boldsymbol{ABD}-12\boldsymbol{ACD}\\ &=\boldsymbol{ABD}\\ &=\boldsymbol{A}\bullet\left(\boldsymbol{BD}\right)\\ &=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 6\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 12\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(4)次式の計算可能性を判定し、計算可能であれば計算せよ。（４点）

$3(2\boldsymbol{BA}-3\boldsymbol{CD})-2(3\boldsymbol{BA}-5\boldsymbol{CD})$

$\boldsymbol{B}$は2×3行列で$\boldsymbol{A}$は2×2行列であり、左辺の列数と右辺の行数が異なるので、
$\boldsymbol{BA}$は計算不可。
よって、計算不可。

(5) 次式の計算可能性を判定し、計算可能であれば計算せよ。（４点）

ここで、${}^tX$ で行列 X の転置行列を表す。

$${}^t\left(\left({}^t\left(\boldsymbol{BD}\right)+{}^t\boldsymbol{D}\,{}^t\boldsymbol{C}\right){}^t\boldsymbol{A}\right)$$

それぞれの型をチェックする。

$\boldsymbol{BD}$ は 2×3 型で ${}^t\left(\boldsymbol{BD}\right)$ は 3×2 型。

${}^t\boldsymbol{D}$ は 3×3 型で ${}^t\boldsymbol{C}$ は 3×2 型なので ${}^t\boldsymbol{D}{}^t\boldsymbol{C}$ は計算可能で 3×2 型。

よって、$\left({}^t\left(\boldsymbol{BD}\right)+{}^t\boldsymbol{D}{}^t\boldsymbol{C}\right)$ は計算可能で 3×2 型。

${}^t\boldsymbol{A}$ は 2×2 型。
以上より、計算可能。

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= {}^t\left(\left({}^t\left(\boldsymbol{BD}\right)+{}^t\boldsymbol{D}{}^t\boldsymbol{C}\right){}^t\boldsymbol{A}\right)\\
&= {}^t\left({}^t\boldsymbol{A}\right){}^t\left({}^t\left(\boldsymbol{BD}\right)+{}^t\boldsymbol{D}{}^t\boldsymbol{C}\right)\\
&= \boldsymbol{A}\left({}^t\left({}^t\left(\boldsymbol{BD}\right)\right)+{}^t\left({}^t\boldsymbol{D}{}^t\boldsymbol{C}\right)\right)\\
&= \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{BD}+{}^t\left({}^t\boldsymbol{C}\right){}^t\left({}^t\boldsymbol{D}\right)\right)\\
&= \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{BD}+\boldsymbol{CD}\right)\\
&= \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -4 & -4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -1 & -3 & 6\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ -1 & -8 & 8\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

２．行列の性質(20 点、各４点)
次の行列 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ に関して、問いに答えよ。

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & x\end{bmatrix}、\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & y & 1\\ -2 & 5 & 3\end{bmatrix}、\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}
$$

(1) $\left|\boldsymbol{A}\right|=1$ のとき、x の満たすべき条件を求めよ。

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix}$$
$$= 4 + 9 - (6 - 2x)$$
$$= 2x + 7$$

よって、

$$|\boldsymbol{A}| = 1$$
$$\therefore 2x + 7 = 1$$
$$\therefore x = -3$$

⑵ $|\boldsymbol{A}| = 1$のとき、$|\boldsymbol{C}|$を求めよ。

$$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{AB}|$$
$$= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$
$$= |\boldsymbol{B}| \quad (\because |\boldsymbol{A}| = 1)$$

よって、$|\boldsymbol{B}|$を求める。

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & y & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 3y - (5 + 2y)$$
$$= y - 5$$

以上より、

$$|\boldsymbol{C}| = y - 5$$

⑶ $\boldsymbol{B}$ が逆行列を持つとき、y の満たすべき条件を求めよ。

$|\boldsymbol{B}| \neq 0$が必要十分条件。

よって、

$$|\boldsymbol{B}| \neq 0$$
$$\therefore y - 5 \neq 0$$
$$\therefore y \neq 5$$

(4) $y=1$のとき、逆行列$\boldsymbol{B}^{-1}$を求めよ。

$$\left[\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{I}\right] \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left[\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{B}^{-1}\right]$$

により求める。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)+2\times(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)-5\times(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}\times(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

以上より、$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

（別解）

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\widetilde{\boldsymbol{B}}$$

$$= \frac{1}{(-4)} {}^t\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} {}^t\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

（験算）

$$\boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{I}$$

⑸ $rank\boldsymbol{C} < 3$ のとき、x, y の満たすべき条件を答えよ。

$$rank\boldsymbol{C} < 3 \Leftrightarrow |\boldsymbol{C}| = 0$$

$$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{AB}|$$
$$= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$
$$= (2x+7)(y-5)$$

であるので、

$rank\boldsymbol{C} < 3$

$\therefore \left|\boldsymbol{C}\right| = 0$

$\therefore \left(2x+7\right)(y-5) = 0$

$x = -\dfrac{7}{2}$ または $y = 5$

３．ベクトルの演算とその応用(20 点、各５点)

３次元空間中に次の 3 点が与えられたとき、各設問に答えよ。

$A(2,1,-1), B(1,0,3), C(-1,1,0)$

(1)内積 $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = 2 \bullet 1 + 1 \bullet 0 + (-1) \bullet 3 = -1$$

(2)ベクトル $\overrightarrow{OA}$ とベクトル $\overrightarrow{OC}$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$

（すなわち、$\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{OA}, \boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{OC}, \|\boldsymbol{n}\| = 1$）

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

$$= (1,1,3)$$

$$\left\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

以上より、

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}\right\|} \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{11}} (1,1,3)$$

$$= \left(\pm \frac{\sqrt{11}}{11}, \pm \frac{\sqrt{11}}{11}, \pm \frac{3\sqrt{11}}{11} \right) \quad \text{(復号同順)}$$

(3)線分 OA と線分 OC を２辺とする平行四辺形の面積

求める面積を S とする。

$$S = \left\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{11}$$

(4)3 線分 OA, OB, OC を３辺とする平行六面体の体積

求める体積を V とする。

スカラー３重積を利用して体積が求められる。

$$\overrightarrow{OA} \bullet \left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 1 - (6)$$

$$= -10$$

$$\therefore V = \left| \overrightarrow{OA} \bullet \left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right) \right| = 10$$

4. 線形空間と線形写像（20 点、各 5 点）

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

とする。
このとき、次の設問に答えよ。

(1)ベクトルの集合$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$が一次独立か一次従属のどちらであるかを判定せよ。また、

一次従属の場合には、$\boldsymbol{a}_3$を$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$の一次結合で表せ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -7 & 7 \\ -2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$ とおく。

線形関係式$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$を連立一次方程式$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$として解く。

行基本変形で階段行列に変形する。

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 3 & -7 & 7\\ -2 & 3 & -8\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}}\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -3 & -6\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}\times(2)}\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

以上より、

$$\begin{cases}k_1 & & +7k_3 & =0\\ & k_2 & +2k_3 & =0\end{cases}$$

が成り立つ。

線形関係式の係数が、$\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$以外にも成り立つので一次従属。

$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ と上の関係式より、

$$-7k_3\boldsymbol{a}_1-2k_3\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$$
$$\therefore \boldsymbol{a}_3=7\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$$

（験算）

$$\text{左辺}=7\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$$
$$=7\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-3\\ -7\\ 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1\\ 7\\ -8\end{bmatrix}$$
$$=\boldsymbol{a}_3$$

⑵ $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ の生成する部分空間 $L\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ を求めよ。

（１）における $\boldsymbol{A}$ の行基本変形により、$L\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ の基底として $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$ があることが分かる。よって、

$L\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\} = L\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$

$$= \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| \; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(3) $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3]$ とする。次の連立方程式を解け。

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -7 & 7 \\ -2 & 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

行基本変形より、

$$\begin{cases} x_1 \qquad +7x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4) $\boldsymbol{A}$ を表現行列とする線形写像を $f_{\boldsymbol{A}}$ とする。像 $\mathrm{Im}\, f_{\boldsymbol{A}}$ と核 $Ker\; f_{\boldsymbol{A}}$ を求めよ。

（像）

$\mathrm{Im}\, f_{\boldsymbol{A}} = L\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$

$$= \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| \; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

（核）

$Ker\; f_{\boldsymbol{A}} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$

$$= \left\{ k \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \; k \in \mathbb{R} \right\}$$