

2009 年度 線形代数学定期試験問題(電子)配点解答例

1. 行列の計算 (40)

以下の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ に対して、問いに答えよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1)和が定義されるすべての組み合わせに対して、和を求めよ。(10,各2点)

($\mathbf{A} + \mathbf{A}$ 等同じ行列同士の和も考えること。)

同じ型の行列でのみ和が計算できる。

$$\mathbf{A} + \mathbf{A} = 2\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{B} = 2\mathbf{B} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{C} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} + \mathbf{C} = 2\mathbf{C} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} + \mathbf{D} = 2\mathbf{D} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(2)積が定義されるすべての組み合わせに対して、積を求めよ。(18,各3点)

($\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ 等同じ行列同士の積も考えること。)

左辺の行列の列数と右辺の行列の行数が等しい場合だけに、積が計算できる。

$$\mathbf{AA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 2+0 \\ -1+0 & -2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 4+0 \\ 1+1 & 2+0 \\ -1+0 & -2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2 & 0+0 \\ 3+0 & 6+0 \\ 0+1 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0+0 & 0+0+0 \\ -4+0-3 & 0+0+0 \\ 0-1+0 & 0+1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+0 & 2+0+0 \\ 0+0+0 & -4+0-3 \\ 0-3+0 & 0+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -7 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ -2+0+0 & 0+0-3 & 0+0+6 \\ 0+2+0 & 0+0-2 & 0-3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)次式の計算可能性を判定し、計算可能であれば計算せよ。(4点)

$$5(\mathbf{BA}-2\mathbf{CD})-2(3\mathbf{BA}-5\mathbf{CD})$$

$\mathbf{C}$ が 3×2 型で $\mathbf{D}$ が 3×3 型であり、左辺の列数と右辺の行数が異なるので、 $\mathbf{CD}$ は計算不可。

よって、計算不可。

(4)次式の計算可能性を判定し、計算可能であれば計算せよ。(4点)

計算可能。

$$\begin{aligned}
& 2D(3B + 5C)A - 5D(BA + 2CA) \\
&= 6DBA + 10DCA - 5DBA - 10DCA \\
&= DBA \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -7 & -14 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(5) 次式の計算可能性を判定し、計算可能であれば計算せよ。(4点)

ここで、 tX で行列 X の転置行列を表す。

$${}^tA \left({}^t(DB) + {}^tC {}^tD \right)$$

DB は 3×2 型であり ${}^t(DB)$ は 2×3 型。

tD は 3×3 型で tC は 2×3 型で ${}^tC {}^tD$ は 2×3 型。

${}^t(DB) + {}^tC {}^tD$ は 2×3 型で、 $\left({}^t(DB) + {}^tC {}^tD \right)$ は 3×2 型。

tA は 2×2 型。

以上より、 tA と $\left({}^t(DB) + {}^tC {}^tD \right)$ の積は計算不可であり、全体も計算不可。

2. 行列の性質(20、各4点)

次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ に関して、問いに答えよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & y & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

(1) $|\mathbf{A}|=1$ のとき、 x の満たすべき条件を求めよ。

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & x \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot (-1) - \{1 \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot (-2)\} \\ &= x - 6 - \{-3 - 4\} \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

よって、次のように条件が定まる。

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= 1 \\ \therefore x + 1 &= 1 \\ \therefore x &= 0 \end{aligned}$$

(2) $|\mathbf{A}|=1$ のとき、 $|\mathbf{C}|$ を求めよ。

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & y & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 8 - \{4 + 3y\} \\ &= -3y + 4 \end{aligned}$$

よって、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}| &= |\mathbf{AB}| \\ &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \\ &= 1 \cdot (-3y + 4) \\ &= -3y + 4 \end{aligned}$$

(別解)

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & y & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & y-8 & -2 \\ -7 & y-12 & -1 \\ -4 & -y & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}| &= \begin{vmatrix} -3 & y-8 & -2 \\ -7 & y-12 & -1 \\ -4 & -y & 3 \end{vmatrix} \\ &= -9(y-12) + 4(y-8) - 14y - \{-3y - 21(y-8) + 8(y-12)\} \\ &= -19y + 76 - \{16y + 72\} \\ &= -3y + 4 \end{aligned}$$

(3) $\mathbf{B}$ が逆行列を持つとき、 y の満たすべき条件を求めよ。

$\mathbf{B}$ が逆行列を持つ必要十分条件は、 $|\mathbf{B}| \neq 0$ 。

$$|\mathbf{B}| = -3y + 4 \neq 0$$

$$\therefore y \neq \frac{4}{3}$$

(別解)

$\mathbf{B}$ が逆行列を持つ必要十分条件は、 $\text{rank} \mathbf{B} = 3$ 。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & y & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \text{ を行基本変形により階段行列にする。}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & y & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2) \leftrightarrow (3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & y & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{4} \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & y & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{3}{4}y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって、次のように条件が定まる。

$$\text{rank} \mathbf{B} = 3$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y \neq \frac{4}{3}$$

(4) $y=1$ のとき、逆行列 $\mathbf{B}^{-1}$ を求めよ。

$[\mathbf{B} \mid \mathbf{I}] \xrightarrow{\text{行基本変形}} [\mathbf{I} \mid \mathbf{B}^{-1}]$ により求める。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{(3)+4 \times (2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

以上より、

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(別解)

余因子行列 $\tilde{\mathbf{B}}$ により逆行列は次式で求められる。

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{B}|} \tilde{\mathbf{B}}$$

$$|\mathbf{B}| = (-3y + 4) \Big|_{y=1} = 1$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} {}^t \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right] & - \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -3 & -4 \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right] & - \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} {}^t [-4 & 3 & -5] \\ 4 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(驗算)

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4+0+5 & 4+0-4 & 1+0-1 \\ -8+3+5 & 8-3-4 & 2-1-1 \\ 12-12+0 & -12+12+0 & -3+4+0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}
\end{aligned}$$

(5) $\text{rank}\mathbf{C} < 3$ のとき、 x, y の満たすべき条件を答えよ。

$$\text{rank}\mathbf{C} < 3 \Leftrightarrow \text{rank}\mathbf{A} < 3 \text{ または } \text{rank}\mathbf{B} < 3$$

$$\Leftrightarrow |\mathbf{A}|=0 \text{ または } |\mathbf{B}|=0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \text{ または } -3y+4=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ または } y=\frac{4}{3}$$

(別解)

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & y & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & y-8 & -2 \\ -7 & y-12 & -1 \\ -3x-4 & -4x-y & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}\mathbf{C} < 3 \Leftrightarrow |\mathbf{C}| = 0$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}| &= \begin{vmatrix} -3 & y-8 & -2 \\ -7 & y-12 & -1 \\ -3x-4 & -4x-y & 3 \end{vmatrix} \\ &= -9(y-12) + (3x+4)(y-8) - 14(4x+y) - \{-3(4x+y) - 21(y-8) + 2(3x+4)(y-12)\} \\ &= 3xy - 80x - 19y + 76 - \{6xy - 84x - 16y + 72\} \\ &= -3xy + 4x - 3y + 4 \\ &= -3(x+1)y + 4(x+1) \\ &= (x+1)(-3y+4) \end{aligned}$$

よって、 $(x+1)(-3y+4)=0$ より、

$$x=-1 \text{ または } y=\frac{4}{3}$$

3. ベクトルの演算とその応用(20、各5点)

3次元空間中に次の3点が与えられたとき、各設問に答えよ。

$$A(1,1,3), B(2,2,2), C(3,1,1)$$

(1)内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = {}^t(\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2 + 2 + 6$$

$$= 10$$

(2)ベクトル $\overrightarrow{OA}$ とベクトル $\overrightarrow{OC}$ に垂直な単位ベクトル $\mathbf{n}$

(すなわち、 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{OA}, \mathbf{n} \perp \overrightarrow{OC}, \|\mathbf{n}\|=1$)

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}\| = 2\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$$

以上より、

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \pm \frac{\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}\|} \\
&= \frac{\pm 1}{6\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mp \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \pm \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \mp \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mp \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \mp \frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix} \quad (\text{復号同順})
\end{aligned}$$

(3) 線分 OA と線分 OC を 2 辺とする平行四辺形の面積
求める面積を S とする。

$$S = \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}\| = 6\sqrt{2}$$

(4) 3 線分 OA, OB, OC を 3 辺とする平行六面体の体積
求める体積を V とする。

$$\begin{aligned}
V &= \left| \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= |2 + 6 + 6 - (2 + 2 + 18)| \\
&= |14 - 22| \\
&= 8
\end{aligned}$$

4. 線形空間と線形写像(20,各5点)

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

とする。

このとき、次の設問に答えよ。

(1)ベクトルの集合 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が一次独立か一次従属のどちらであるかを判定せよ。また、

一次従属の場合には、 $\mathbf{a}_3$ を $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ の一次結合で表せ。

k_1, k_2, k_3 を係数とする線形関係式 $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ を満足する係数の組が、自明な関係式($k_1 = k_2 = k_3 = 0$)だけかで判断する。

$$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + k_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3]$ を行基本変形で階段行列にする。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、次式が成り立つ。

$$\begin{cases} k_1 - 5k_3 = 0 \\ k_2 - 3k_3 = 0 \end{cases} \\ \therefore \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5k_3 \\ 3k_3 \\ k_3 \end{bmatrix} = k_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

自明で無い関係式も線形関係式を満足するので、一次従属。

$$k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + k_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \text{ より}$$

$$5k_3 \mathbf{a}_1 + 3k_3 \mathbf{a}_2 + k_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

$$\therefore \mathbf{a}_3 = -5\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2$$

(検算)

$$-5\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2$$

$$= -5 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{a}_3$$

(2) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ の生成する部分空間 $L\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ を求めよ。

(1) の行基本変形より、

$L\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = L\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ であり、 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は基底となる。

$$\text{よって、 } L\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(3) $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3]$ とする。次の連立方程式を解け。

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) の行基本変形により、

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{よって、}\left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = k \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}$$

(4) $\mathbf{A}$ を表現行列とする線形写像を $f_{\mathbf{A}}$ とする。像 $\text{Im } f_{\mathbf{A}}$ と核 $\text{Ker } f_{\mathbf{A}}$ を求めよ。
(像)

$\text{Im } f_{\mathbf{A}} = L\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ より、

$$\text{Im } f_{\mathbf{A}} = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(核)

$\text{Ker } f_{\mathbf{A}} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ より、

$$\text{Ker } f_{\mathbf{A}} = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = k \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}$$