

2008 年度 線形代数学㊦試験問題(電子)

日時：2008 年 9 月 3 日（水）12:50-14:20

場所：K101

注意事項：

1. 答案用紙は教卓に提出すること。
2. 問題用紙は持ち帰ること。
3. 途中の計算課程も記述すること。
4. 行列の行基本変形を用いる場合には、どの規則で変形を行ったのかも書くこと。（なお、この記述には、「1 列目の掃き出し」といった記述を用いてもよい。）
5. 草稿用紙が必要な場合は申し出ること。

1. 行列の計算

以下の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ に対して、問いに答えよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 和が定義されるすべての組み合わせに対して、和を求めよ。

($\mathbf{A} + \mathbf{A}$ 等同じ行列同士の和も考えること。)

(2) 積が定義されるすべての組み合わせに対して、積を求めよ。

($\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ 等同じ行列同士の積も考えること。)

(3) $\mathbf{A}(\mathbf{AB} - \mathbf{CD})\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{B} - \mathbf{C})\mathbf{D}^2 - \mathbf{A}^2(\mathbf{B} - \mathbf{C})\mathbf{D}$ を求めよ。

(4) ${}^t \left({}^t \mathbf{D} \cdot {}^t \left({}^t \left({}^t \mathbf{B}^t \mathbf{A} \right) + \mathbf{C} \right) \right)$ を求めよ。ここで、 ${}^t \mathbf{X}$ は行列 $\mathbf{X}$ の転置行列を表す。

2. 行列の性質

次の行列 $\mathbf{A}$ に関して、問いに答えよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & x & -1 \\ 3 & -3 & y \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) トレース $\text{tr} \mathbf{A}$ を求めよ。

(3) 行列式 $\det \mathbf{A}$ を求めよ。

(2) 階数 $\text{rank} \mathbf{A} < 3$ となるとき、 x, y の満たすべき条件を求めよ。

(4) $x=1, y=5$ のとき、逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ。

3. 連立方程式

次の連立方程式を解け。

(1)

$$\begin{cases} -x + 2y - z = -4 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ x - y + 2z = 9 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

4. 固有値

次の行列の固有値、固有空間、固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$