

2008 年度 線形代数学定期試験問題(電子)

日時：2008 年 7 月 30 日（水）12:50-14:20

場所：AV ホール（K101）

注意事項：

1. 指定された席に着席すること。
2. 答案用紙を席に残して退席すること。
3. 問題用紙は持ち帰ること。
4. 途中の計算課程も記述すること。
5. 行列の行基本変形を用いる場合には、どの規則で変形を行ったのかも書くこと。（なお、この記述には、「1 列目の掃き出し」といった記述を用いてもよい。）
6. 草稿用紙が必要な場合は申し出ること。

1. 行列の計算

以下の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ に対して、問いに答えよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 和が定義されるすべての組み合わせに対して、和を求めよ。

($\mathbf{A} + \mathbf{A}$ 等同じ行列同士の和も考えること。)

(2) 積が定義されるすべての組み合わせに対して、積を求めよ。

($\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ 等同じ行列同士の積も考えること。)

(3) $\mathbf{D}(\mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{C})\mathbf{A} - \mathbf{D}^2(\mathbf{B} - \mathbf{C})\mathbf{A} - \mathbf{D}(\mathbf{B} - \mathbf{C})\mathbf{A}^2$ を求めよ。

(4) ${}^t \left({}^t \left({}^t \left({}^t \mathbf{A} {}^t \mathbf{B} \right) + \mathbf{C} \right) \cdot {}^t \mathbf{D} \right)$ を求めよ。ここで、 ${}^t \mathbf{X}$ は行列 $\mathbf{X}$ の転置行列を表す。

2. 行列の性質

次の行列 $\mathbf{A}$ に関して、問いに答えよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & y \\ -3 & x & 3 \end{bmatrix}$$

(1) トレース $\text{tr} \mathbf{A}$ を求めよ。

(3) 行列式 $\det \mathbf{A}$ を求めよ。

(2) 階数 $\text{rank} \mathbf{A} < 3$ となるとき、 x, y の満たすべき条件を求めよ。

(4) $x = -5, y = -1$ のとき、逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ。

3. 連立方程式

次の連立方程式を解け。

(1)

$$\begin{cases} x & +2y & -z & =3 \\ 2x & +4y & -z & =-1 \\ -3x & -5y & +3z & =2 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +7x_4 & =2 \\ 4x_1 & -3x_2 & +4x_3 & -11x_4 & =14 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +16x_4 & =-4 \end{cases}$$

4. 固有値

次の行列の固有値、固有空間、固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$