2008年度　線形代数学定期試験(電子)解答例

１．行列の計算（３０点）

以下の行列 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ に対して、問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}、\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}、\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}、\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

（１）　和が定義されるすべての組み合わせに対して、和を求めよ。（各２点、１０点）

（ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}$ 等同じ行列同士の和も考えること。）

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 0 & 6\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\\ -2 & 0\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & -4 & 0\end{bmatrix}$$

（２）　積が定義されるすべての組み合わせに対して、積を求めよ。（各２点、１２点）

（ $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}$ 等同じ行列同士の積も考えること。）

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 0 & 9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 6\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 8\\ 4 & -2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\bullet\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & -4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\bullet\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\bullet\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

（３） $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{DC})\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}^2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}^2$ を求めよ。（４点）

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{D}(\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{DC})\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}^2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}^2\\ &=\boldsymbol{DBA}^2-\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{DBA}^2+\boldsymbol{DCA}^2\\ &=-\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{DCA}^2\\ &=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{DB})\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{A}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&-2&0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2&8\\4&-2\\0&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&2\\0&-4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&8\\3&-4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&9\\3&-5\\-6&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&25\\6&-18\\-12&30\end{bmatrix}$$

（４）　${}^t\left({}^t\left({}^t\left({}^t\boldsymbol{A}{}^t\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{C}\right)\bullet{}^t\boldsymbol{D}\right)$を求めよ。ここで、${}^t\boldsymbol{X}$は行列$\boldsymbol{X}$の転置行列を表す。（４点）

$$
{}^t\left({}^t\left({}^t\left({}^t\boldsymbol{A}{}^t\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{C}\right)\bullet{}^t\boldsymbol{D}\right)
$$

$$
=\boldsymbol{D}\bullet\left({}^t\left({}^t\boldsymbol{A}{}^t\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{C}\right)
$$

$$
=\boldsymbol{D}\bullet\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\right)
$$

$$
=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\bullet\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 6\\ -2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)
$$

$$
=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\\ -2 & 0\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\\ -4 & -12\end{bmatrix}
$$

２．行列の性質（２５点）

次の行列 $\boldsymbol{A}$ に関して、問いに答えよ。

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & y\\ -3 & x & 3\end{bmatrix}
$$

（１）　トレース $tr\boldsymbol{A}$ を求めよ。（２点）

$$
tr\boldsymbol{A}=1+4+3=8
$$

（２）行列式 $\det \boldsymbol{A}$ を求めよ。（３点）

サラスの公式により求める。

$$
\det \boldsymbol{A}=1\bullet4\bullet3+2\bullet y\bullet(-3)+(-1)\bullet2\bullet x-\left\{1\bullet y\bullet x+2\bullet2\bullet3+(-1)\bullet4\bullet(-3)\right\}
$$

$$
=-12-6y-2x-(xy+12+12)
$$

$$
=-12-6y-2x-xy
$$

$$
=-6(2+y)-x(2+y)
$$

$$
=-(x+6)(y+2)
$$

（３）階数 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} < 3$ となるとき、x, y の満たすべき条件を求めよ。（１０点）

（解法１）

行基本変形により階段行列にする。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & y \\ -3 & x & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & y+2 \\ 0 & x+6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & x+6 & 0 \\ 0 & 0 & y+2 \end{bmatrix}$$

階段行列の段数が $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ であるので、対角成分が０になると階数が小さくなる。

よって、$x+6=0$ または $y+2=0$ であればよい。

すなわち、$x=-6$ または $y=-2$

なお、$x=-6$ かつ $y=-2$ のとき $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=1$

（解法２）正則性による方法。

$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=3$ のとき行列 $\boldsymbol{A}$ は正則行列。このとき、$|\boldsymbol{A}| \neq 0$。

$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}<3$ のとき行列 $\boldsymbol{A}$ は非正則行列。このとき、$|\boldsymbol{A}| = 0$。

よって、

$$|\boldsymbol{A}| = -(x+6)(y+2) = 0$$
$$\therefore x=-6 \text{ または } y=-2$$

（４） $x=-5, y=-1$ のとき、逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ。（１０点）

（解法１）

行基本変液による。

$$\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}\right] \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left[\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)-2\times(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(1)+(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

よって、

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（解法２）余因子行列による方法。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = -(x+6)(y+2) = -(-5+6)(-1+2) = -1$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = {}^t\begin{bmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{12}} & \widetilde{a_{13}} \\ \widetilde{a_{21}} & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} \\ \widetilde{a_{31}} & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} \end{bmatrix}$$

$$= {}^t\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= {}^t\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\widetilde{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（験算）

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

３．連立方程式（２０点、各１０点）

次の連立方程式を解け。

（１）

$$\begin{cases} x & +2y & -z & = 3 \\ 2x & +4y & -z & = -1 \\ -3x & -5y & +3z & = 2 \end{cases}$$

（解法１）

拡大係数行列を行基本変形する。

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&3\\2&4&-1&-1\\-3&-5&3&2\end{array}\right]\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&3\\0&0&1&-7\\0&1&0&11\end{array}\right]\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&3\\0&1&0&11\\0&0&1&-7\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(1)-2\times(2)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-19\\0&1&0&11\\0&0&1&-7\end{array}\right]\xrightarrow{(1)+(3)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-26\\0&1&0&11\\0&0&1&-7\end{array}\right]$$

よって、

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-26\\11\\-7\end{bmatrix}$$

（解法２）逆行列による方法。

係数行列を $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&4&-1\\-3&-5&3\end{bmatrix}$、未知数ベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$、定数項ベクトルを $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$ とおく。この係数行列が前問の行列と同一である。

よって、

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

$$\therefore \boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$=\begin{bmatrix}-7&1&-2\\3&0&1\\-2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-26\\11\\-7\end{bmatrix}$$

(解法３)クラメールの公式による。

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&&a_{2n}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ としたときに、連立方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の解は次のように求められる。

$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ のときに、一意の解をもつ。

$1 \leq i \leq n$ に対して、$x_i = \dfrac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|}$

ここで、$\boldsymbol{A}_i$ は、係数行列 $\boldsymbol{A}$ の第 i 列の列ベクトルを定数項ベクトル $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列である。

よって、

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ より、

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 6 + 10 - (5 + 12 + 12) = -1 \neq 0$$

$$|\boldsymbol{A}_x| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 4 - 5 - (15 - 6 - 8) = 27 - 1 = 26$$

$$\therefore x = \frac{|\boldsymbol{A}_x|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{26}{-1} = -26$$

$$|\boldsymbol{A}_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 9 - 4 - (-2 + 18 - 3) = 2 - 13 = -11$$

$$\therefore y = \frac{|\boldsymbol{A}_y|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{-11}{-1} = 11$$

$$|\boldsymbol{A}_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 6 - 30 - (5 + 8 - 36) = -16 + 23 = 7$$

$$\therefore z = \frac{|\boldsymbol{A}_z|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{7}{-1} = -7$$

以上より、

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-26\\11\\-7\end{bmatrix}$$

（２）

$$\begin{cases}2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +7x_4 & =2\\4x_1 & -3x_2 & +4x_3 & -11x_4 & =14\\x_1 & +3x_2 & +x_3 & +16x_4 & =-4\end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形する。

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & 2 & 7 & 2\\4 & -3 & 4 & -11 & 14\\1 & 3 & 1 & 16 & -4\end{array}\right]\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & 1 & 16 & -4\\4 & -3 & 4 & -11 & 14\\2 & 1 & 2 & 7 & 2\end{array}\right]\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & 1 & 16 & -4\\0 & -15 & 0 & -75 & 30\\0 & -5 & 0 & -25 & 10\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & 1 & 16 & -4\\0 & -15 & 0 & -75 & 30\\0 & -5 & 0 & -25 & 10\end{array}\right]\xrightarrow{-\frac{1}{15}\times(2),-\frac{1}{5}\times(3)}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & 1 & 16 & -4\\0 & 1 & 0 & 5 & -2\\0 & 1 & 0 & 5 & -2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 1 & 1 & 2\\0 & 1 & 0 & 5 & -2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

拡大係数行列の階数と、係数行列の階数が等しいので、解が存在する。（不能ではない。）
また、未知数が４に対して、係数行列の階数が２なので、自由度は２である。また、行基本変形により、与式は次と等価。

$$\begin{cases}x_1 & & +x_3 & +x_4 & =2\\ & x_2 & & +5x_4 & =-2\end{cases}$$

よって、$x_3 \equiv k_1$、$x_4 \equiv k_2$ と任意定数とすると、

$$\begin{cases}x_1 = 2-k_1-k_2\\x_2 = -2-5k_2\end{cases}$$

よって、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-k_1-k_2 \\ -2-5k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{は任意定数})$$

4．固有値（２５点）

次の行列の固有値、固有空間、固有ベクトルを求めよ。

固有値（１５点：固有多項式５点、各固有値５点）

固有空間、固有ベクトル（１０点、各５点）

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

固有多項式$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$は次のように計算される。

$$\begin{aligned}
\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \\
&= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ -4 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (6-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)+4+4-\{2(6-\lambda)-2(2-\lambda)-4(3-\lambda)\} \\
&= (6-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)+8-(-4+4\lambda) \\
&= (6-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)+4(3-\lambda) \\
&= (3-\lambda)\{(6-\lambda)(2-\lambda)+4\} \\
&= (3-\lambda)(16-8\lambda+\lambda^2) \\
&= (3-\lambda)(4-\lambda)^2
\end{aligned}$$

よって、固有方程式$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=0$より、固有値は次のように求められる。

$\lambda_1 = 3$（代数的重複度は１）

$\lambda_2 = 4$（代数的重複度は 2）

次にそれぞれの固有空間を求める。

○$\lambda_1 = 3$のとき、

固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$ とおく。

固有関係式 $\boldsymbol{Ax}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1$ より、

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 6-3 & -1 & 1 \\ 2 & 3-3 & 1 \\ -4 & 2 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

係数行列を行基本変形する。

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}\xrightarrow{(1)-(2)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times(2)}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、次式と等価。

$$\begin{cases} x_{11} \quad\quad + \frac{1}{2}x_{31} = 0 \\ \quad\quad x_{21} + \frac{1}{2}x_{31} = 0 \end{cases}$$

よって、

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{x_{31}}{2} \\ -\frac{x_{31}}{2} \\ x_{31} \end{bmatrix}=-\frac{x_{31}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

任意定数として$k_1=-\dfrac{x_{31}}{2}$とおくと、次のように固有空間$V(\lambda_1)$が求められる。

$$V(\lambda_1)=\left\{k_1\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}\middle|\ k_1\in\mathbb{R}\right\}$$

固有ベクトルとしては、例えば$k_1=1$とすることで、$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$が得られる。(なお、

$\lambda_1=3$の幾何学的重複度は$\dim V(\lambda_1)=1$であり、この場合代数的重複度と一致している。)

○$\lambda_2=4$のとき、

固有ベクトルを$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix}$とおく。

固有関係式$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2$より、

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}6-4&-1&1\\2&3-4&1\\-4&2&2-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}2&-1&1\\2&-1&1\\-4&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

係数行列を行基本変形する。

$$\begin{bmatrix}2&-1&1\\2&-1&1\\-4&2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)-(1)}\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&0&0\\-4&2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{(3)+2\times(1)}\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$2x_{12}-x_{22}+x_{32}=0$と等価。

未知数が３に対して、階数が１なので、自由度は２。

与式は次と等価。

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_{22} - x_{32}}{2} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \frac{x_{22}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{x_{32}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$k_{22} = \dfrac{x_{22}}{2}, k_{32} = -\dfrac{x_{32}}{2}$ と任意定数をおくと次のように固有空間$V(\lambda_2)$が求められる。

$$V(\lambda_2) = \left\{ \boldsymbol{x}_2 \;\middle|\; \boldsymbol{x}_2 = k_{22}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_{32}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k_{22}, k_{32} \in \mathbb{R} \right\}$$

これは、平面の式である。

固有ベクトルとしては、例えば$k_{22} = 1, k_{32} = 0$ とすることで、$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$などがある。

（なお、$\lambda_2 = 4$ の幾何学的重複度は$\dim V(\lambda_2) = 2$ であり、この場合代数的重複度と一致している。このことから、この行列 $\boldsymbol{A}$ は対角化可能である。）