

第8回 線形代数学課題（固有値とその応用）

解答例

1. 次の行列の固有値,固有ベクトル,固有空間を求めよ。

(1)

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A \equiv \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ とおく。}$$

まず、固有多項式 $\varphi_A(\lambda) = (A - \lambda I)$ を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} &= (4-\lambda)(-3-\lambda)+10 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda+1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

よって、固有方程式 $(\lambda+1)(\lambda-2)=0$ より、固有値 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ が求まる。なお、 $\lambda_1 = -1$ 、 $\lambda_2 = 2$ の代数的重複度は共に 1 である。

次に、各固有値に対する固有空間を求める。

○ $\lambda_1 = -1$

対応する固有ベクトルを、 $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$ とする。

このとき、固有空間は固有関係式 $Ax = \lambda_1 x$ を連立方程式 $(A - \lambda_1 I)x_1 = 0$ とみなしたとき解空間である。よって、連立方程式 $(A - \lambda_1 I)x_1 = 0$ を解けばよい。

$$\therefore (A - \lambda_1 I)x_1 = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4-(-1) & -5 \\ 2 & -3-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

係数行列を行基本変形する。

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5} \times (1), \frac{1}{2} \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

したがって、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_{11} - x_{21} = 0$$

したがって、成分 x_{11} を成分 x_{21} で表現できる。

$$\therefore \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{21} \end{bmatrix} = x_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_{21} は任意の実数をとることができるので、任意定数 k_1 を用いて固有空間 V_{λ_1} は以下のように表される。

$$V_{\lambda_1} = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

幾何学的重複度は固有空間 V_{λ_1} の次元数 $\dim V_{\lambda_1}$ であるので、固有値 $\lambda_1 = -1$ に対する幾何的

重複度は 1 であることがわかる。

固有ベクトルは、($\mathbf{0}$ ベクトル以外の) 固有空間中の一つのベクトルで、例えば、 $k_1 = 1$ とし、

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

等がある。

$$\circ \lambda_2 = 2$$

対応する固有ベクトルを、 $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ とする。このとき、連立一次方程式 $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$

を解けばよい。

$$\therefore (A - \lambda_2 I)\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4-2 & -5 \\ 2 & -3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

係数行列を行基本変形する。

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

したがって、

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_{12} - \frac{5}{2}x_{22} = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}x_{22} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \frac{x_{22}}{2} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\frac{x_{22}}{2}$ は任意の実数をとることができるので、任意定数 k_2 を用いて固有空間 V_{λ_1} は以下のよう
に表される。

$$V_{\lambda_2} = \left\{ k_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} \mid k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

この計算より、固有値 $\lambda_2 = 3$ に対する幾何的重複度は 1 であることがわかる。

固有ベクトルは、固有空間中の一つのベクトルで、例えば、 $k_2 = 1$ として

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

等がある。

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ とおく。}$$

まず、固有多項式 $\varphi_B(\lambda) = (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})$ を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}\varphi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 - \{2(1-\lambda) - 2(2-\lambda)\} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)\end{aligned}$$

よって、固有方程式 $(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$ より、固有値 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ が求まる。

次に、各固有値に対する固有空間、固有ベクトルを求める。

○ $\lambda_1 = 1$ (代数的重複度 1)

対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$ とする。このとき、連立一次方程式 $(\mathbf{B} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ の

非自明解 ($\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ の解) を求めればよい。すなわち、

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ を解く。}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_1 & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 2 & 2 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ より、}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ を基本変形していく。}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3) - 2 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{(1) - (2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって、 $(\mathbf{B} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ は、連立方程式

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{31} = 0 \end{cases}$$

と等価である。よって、

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{21} \\ x_{21} \\ 0 \end{bmatrix} = x_{21} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_{21} は任意の実数をとることができるので、結局任意定数 k_1 を用いて、

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表せる。よって、固有空間 V_{λ_1} は以下のように表せる。

$$V_{\lambda_1} = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid k_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

この計算より、固有値 $\lambda_1 = 1$ に対する幾何的重複度は 1 であることがわかる。

また、固有ベクトルは、例えば、 $k_1 = 1$ として、 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 等がある。

○ $\lambda_2 = 2$ (代数的重複度 1)

対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}$ とする。

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_2 & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 0 & -1 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 2 & 2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ より、}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{を基本変形していく。}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1 \text{列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2) \leftrightarrow (3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $(B - \lambda_2 I)x_2 = 0$ は次式と同等である。

$$\begin{cases} x_{12} + x_{32} = 0 \\ x_{22} - \frac{1}{2}x_{32} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_{12} = -x_{32} \\ x_{22} = \frac{1}{2}x_{32} \end{cases}$$

(階段行列の先頭に対応する変数を、残りの変数の一次結合で表わす。ここでは、 x_{12} および x_{22} を x_{32} で表わしている。)

よって、

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{32} \\ \frac{1}{2}x_{32} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \frac{x_{32}}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ここで、 $\frac{x_{32}}{2}$ は任意の実数をとることができるので、結局任意定数 k_2 を用いて、

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{と表せる。}$$

よって、固有空間 V_{λ_2} は以下のように表せる。

$$\mathbf{V}_{\lambda_2} = \left\{ k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mid k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

この計算より、固有値 $\lambda_2 = 2$ に対する幾何的重複度は 1 であることがわかる。固有ベクトル

は、例えば、 $k_2 = 1$ として $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 等がある。

○ $\lambda_3 = 3$ (代数的重複度 1)

対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix}$ とする。

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_3 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda_3 & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 0 & -1 \\ 1 & 2-3 & 1 \\ 2 & 2 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ より、}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ を基本変形していく。}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2} \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $(\mathbf{B} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ は次式と等価である。

$$\begin{cases} x_{13} + \frac{1}{2}x_{33} = 0 \\ x_{23} - \frac{1}{2}x_{33} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_{13} = -\frac{1}{2}x_{33} \\ x_{23} = \frac{1}{2}x_{33} \end{cases}$$

(階段行列の先頭に対応する変数を、残りの変数の一次結合で表わす。ここでは、 x_{13} および x_{23} を x_{33} で表わしている。)

よって、

$$\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_{33} \\ \frac{1}{2}x_{33} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \frac{x_{33}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ここで、 $\frac{x_{33}}{2}$ は任意の実数をとることができるので、結局任意定数 k_3 を用いて、

$$\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ と表せる。}$$

よって、固有空間 V_{λ_2} は以下のように表せる。

$$V_{\lambda_3} = \left\{ k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mid k_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

この計算より、固有値 $\lambda_3 = 3$ に対する幾何的重複度は 1 であることがわかる。固有ベクトル

は、例えば、 $k_3 = 1$ として $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 等がある。

2. 次の行列の対角化可能性を調べ、対角化可能なら対角行列を求めよ。

(1)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

固有値、固有空間を全て求め、各固有値の代数的重複度と幾何学的重複度を調べる。

$$C \equiv \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ とおく。}$$

まず、固有多項式 $\varphi_C(\lambda) = (C - \lambda I)$ を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \varphi_C(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 1 - \{(2-\lambda) - (1-\lambda)\} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

よって、固有方程式 $(2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$ より、固有値 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ が求まる。なお、 $\lambda_1 = 1$ の

代数的重複度は 2 であり、 $\lambda_2 = 2$ の代数的重複度は 1 である。

次に、各固有値に対する固有空間、固有ベクトルを求める。

○ $\lambda_1 = 1$ (代数的重複度 2)

対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$ とする。連立方程式 $(C - \lambda_1 I)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ を解く。

$$C - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 2-1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ より、係数行列 } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ を行基本変形し}$$

ていく。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-(2), (3)-(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $(C - \lambda_1 I)x_1 = 0$ は、

$$\begin{cases} x_{11} - x_{21} &= 0 \\ &x_{31} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_{11} &= x_{21} \\ x_{31} &= 0 \end{cases}$$

と等価である。よって、

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{21} \\ 0 \end{bmatrix} = x_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_{21} は任意の実数をとることができるので、結局任意定数 k_1 を用いて、

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表せる。よって、固有空間 V_{λ_1} は以下のように表せる。

$$V_{\lambda_1} = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid k_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

よって、 $\lambda_1 = 1$ の幾何学的重複度は $\dim V_{\lambda_1} = 1$ 。

以上より、 $\lambda_1 = 1$ では、代数的重複度が 2 に対して、幾何学的重複度が 1 であり、対角化不可能。幾何学的重複度が 1 であるため一次独立なベクトルが 1 本しかなく、代数的重複度の 1 次独立なベクトルが得られない。

○ $\lambda_2 = 2$ (代数的重複度 1)

念のため、 $\lambda_2 = 2$ に対する固有空間も求めておく。

対応する固有ベクトルを $x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}$ とする。連立方程式 $(C - \lambda_2 I)x_2 = 0$ を解く。

$$C - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2-2 & -1 & 1 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ -1 & 1 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{より、} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{を行基本変形してい}$$

く。

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (3)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $(C - \lambda_2 I)x_2 = 0$ は、

$$\begin{cases} x_{12} & = 0 \\ x_{22} & -x_{32} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_{12} & = 0 \\ x_{22} & = x_{32} \end{cases}$$

と等価である。よって、

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{32} \\ x_{32} \end{bmatrix} = x_{32} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここで、 x_{32} は任意の実数をとることができるので、結局任意定数 k_2 を用いて、

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{と表せる。}$$

よって、固有空間 V_{λ_2} は以下のように表せる。

$$V_{\lambda_2} = \left\{ k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

よって、 $\lambda_2 = 2$ の幾何学的重複度は $\dim V_{\lambda_2} = 1$ 。 $\lambda_2 = 2$ に関しては、代数的重複度と幾何

学的重複度が等しい。

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

固有値、固有空間を全て求め、各固有値の代数的重複度と幾何学的重複度を調べる。

$$\mathbf{D} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ とおく。}$$

まず、固有多項式 $\varphi_D(\lambda) = (\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})$ を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \varphi_D(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 1 + 1 - \{-(1-\lambda) + (3-\lambda) - (1-\lambda)\} \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 2 - \{1 + \lambda\} \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 1 - \lambda \\ &= (1-\lambda)\{(1-\lambda)(3-\lambda) + 1\} \\ &= (1-\lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2) \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

よって、固有方程式 $(1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$ より、固有値 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ が求まる。なお、 $\lambda_1 = 1$ の

代数的重複度は 1 であり、 $\lambda_2 = 2$ の代数的重複度は 2 である。

次に、各固有値に対する固有空間、固有ベクトルを求める。

○ $\lambda_1 = 1$ (代数的重複度 1)

対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$ とする。連立方程式 $(\mathbf{D} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ を解く。

$$\mathbf{D} - \lambda_1 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1-1 & -1 & 1 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ より、係数行列 } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ を行基本変形し}$$

ていく。

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{(3)+1 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)+1 \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

よって、 $(D - \lambda_1 I)x_1 = 0$ は、

$$\begin{cases} x_{11} & -x_{31} & = 0 \\ & x_{21} & -x_{31} & = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_{11} & = x_{31} \\ x_{21} & = x_{31} \end{cases}$$

と等価である。

よって、

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{31} \\ x_{31} \end{bmatrix} = x_{31} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここで、 x_{31} は任意の実数をとることができるので、結局任意定数 k_1 を用いて、

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ と表せる。}$$

よって、固有空間 V_{λ_1} は以下のように表せる。

$$V_{\lambda_1} = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

よって、 $\lambda_1 = 1$ の幾何学的重複度は $\dim V_{\lambda_1} = 1$ 。 $\lambda_1 = 1$ に関しては、代数的重複度と幾何学的重複度が等しい。

○ $\lambda_2 = 2$ (代数的重複度 2)

対応する固有ベクトルを $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}$ とする。連立方程式 $(\mathbf{D} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ を解く。

$$\mathbf{D} - \lambda_2 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1-2 & -1 & 1 \\ -1 & 1-2 & 1 \\ -1 & -1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ より、係数行列 } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ を行基本変形}$$

していく。

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $(\mathbf{D} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ は、

$$x_{12} + x_{22} - x_{32} = 0$$

$$\therefore x_{12} = -x_{22} + x_{32}$$

と等価である。

よって、

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{22} + x_{32} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = x_{22} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{32} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここで、 x_{22}, x_{32} は任意の実数をとることができるので、結局任意定数 k_2, k_3 を用いて、

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ と表せる。}$$

よって、固有空間 V_{λ_2} は以下のように表せる。

$$V_{\lambda_2} = \left\{ k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k_2, k_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

よって、 $\lambda_2 = 2$ の幾何学的重複度は $\dim V_{\lambda_2} = 2$ 。 $\lambda_2 = 2$ に関しては、代数的重複度と幾何学的重複度が等しい。

以上より、全ての固有値で代数的重複度と幾何学的重複度が等しいので対角化可能

1 次独立な固有ベクトルを並べて変換の行列 $P = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ を作る。(固有値 $\lambda_2 = 2$ において、幾何学的重複度が 2 であるので、2 本の 1 次独立な固有ベクトルを選ぶことに注意する。)

固有値 $\lambda_1 = 1$ の固有空間 $V_{\lambda_1} = \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k_1 \in \mathbb{R} \right\}$ において、 $k_1 = 1$ を選び固有ベクトル

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ を得る。}$$

固有値 $\lambda_2 = 2$ の固有空間 $V_{\lambda_2} = \left\{ k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k_2, k_3 \in \mathbb{R} \right\}$ において、

$$k_2 = 1, k_3 = 0 \text{ を選び } x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ を得て、}$$

$$k_2 = 0, k_3 = 1 \text{ を選び } x_3 = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ を得る。}$$

これらを列ベクトルとする行列 P を構成する。

$$P \equiv [x_1 \ x_2 \ x_3] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

次に、逆行列 P^{-1} を求める。 $[P \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$ を行基本変形することにより

求める。

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{(2) \leftrightarrow (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{-1 \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{(1) - 1 \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

よって、

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

以上より、行列 $\mathbf{D}$ に相似な行列 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}$ により対角化される。実際、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

対角成分には、(固有ベクトルの並べ方に応じて) 固有値が並ぶ。