

第 7 回 線形代数学レポート課題 (線形写像)

解答例

1.

3 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ 上で各変換 (線形写像) を表す行列を示せ。

なお、変換前の 3 次元ベクトルを $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 、変換後 3 次元ベクトルを $\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ 、変換を表

す行列を $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$ とすると、変換は次式に従う。

$$\mathbf{p}' = f(\mathbf{p}) = \mathbf{T}\mathbf{p}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(1) z 軸を中心に (時計まわりに) θ だけ回転させる行列 $\mathbf{T}_{z(\theta)}$

(解答 1)

xy 平面上で、点 $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を原点まわりに (反時計周りに) θ だけ回転し、 $\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ を得る

線形変換は次式で表わされる。

$$\therefore \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3 次元空間で、 z 座標無限大から xy 平面上を見ると、 z 軸を中心に (時計まわりに) θ だけ回転は、 xy 平面を原点周りに (反時計周りに) θ だけ回転する変換と同一である。

また、 z 座標が変換前後で同一である。

以上のことから、

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\therefore T_{z(\theta)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(別解) 変換行列 $T_{z(\theta)}$ の列ベクトルをそれぞれ $t_1 = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix}$, $t_2 = \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \end{bmatrix}$, $t_3 = \begin{bmatrix} t_{13} \\ t_{23} \\ t_{33} \end{bmatrix}$ とおく。すな

わち、 $T_{z(\theta)} = [t_1 \ t_2 \ t_3]$ である。また、 $T_{z(\theta)}$ を表現行列とする線形写像を $f_{z(\theta)}$ とする。

このとき、基本ベクトル $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を利用し、 $t_1 = f_{z(\theta)}(e_1)$ 、 $t_2 = f_{z(\theta)}(e_2)$ 、

$t_3 = f_{z(\theta)}(e_3)$ と計算できる。(すなわち、基本ベクトルの像を求めることで、変換の行列を特定する。)

$$f_{z(\theta)} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_{z(\theta)} : \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_{z(\theta)} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と変換されるので、

$$T_{z(\theta)} = [t_1 \ t_2 \ t_3] = \begin{bmatrix} f_{z(\theta)}(e_1) & f_{z(\theta)}(e_2) & f_{z(\theta)}(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) y 軸中心に (時計まわりに) θ だけ回転させる行列 $T_{y(\theta)}$

$T_{y(\theta)}$ を表現行列とする線形写像を $f_{y(\theta)}$ とする。

$$f_{y(\theta)}: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{bmatrix}, \quad f_{y(\theta)}: \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_{y(\theta)}: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

と変換されるので、

$$T_{y(\theta)} = \begin{bmatrix} f_{y(\theta)}(\mathbf{e}_1) & f_{y(\theta)}(\mathbf{e}_2) & f_{y(\theta)}(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

(なお、座標系の交わり方には注意すること。)

(3) x 軸中心に (時計まわりに) θ だけ回転させる行列 $T_{x(\theta)}$

$T_{x(\theta)}$ を表現行列とする線形写像を $f_{x(\theta)}$ とする。

$$f_{x(\theta)}: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_{x(\theta)}: \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad f_{x(\theta)}: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

と変換されるので、

$$T_{x(\theta)} = \begin{bmatrix} f_{x(\theta)}(\mathbf{e}_1) & f_{x(\theta)}(\mathbf{e}_2) & f_{x(\theta)}(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

(4) 原点を通り長さが 1 の単位方向ベクトル $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$ の直線を中心に (時計まわりに) θ だ

け回転させる行列 $T_{\mathbf{u}(\theta)}$

(方針)

x 軸を中心とした回転と y 軸を中心とした回転を用いて方向ベクトルを $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$ を z 軸方

向に変換し、 z 軸を中心とした θ 回転を行う。さらに、 y 軸を中心とした逆回転と x 軸を中

心とした逆回転を用い、 z 軸方向の単位ベクトルを方向ベクトルを $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$ に変換する。

この一連の変換の結果得られる式が求める式である。

(解答例)

$\mathbf{u}$ の yz 平面への射影 $\mathbf{u}_{yz} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$ と z 軸のなす角度を α 、 $\mathbf{u}$ の zx 平面への射影 $\mathbf{u}_{zx} = \begin{bmatrix} u_x \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix}$ と

z 軸のなす角度を β とする。このとき、次式が成り立つ。

$$\mathbf{T}_{\mathbf{u}(\theta)} = \mathbf{T}_{x(-\alpha)} \mathbf{T}_{y(\beta)} \mathbf{T}_{z(\theta)} \mathbf{T}_{y(-\beta)} \mathbf{T}_{x(\alpha)} \quad \cdots (1)$$

また、

$\mathbf{u}_{yz} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$ より、 $\cos \alpha = \frac{u_z}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}}$, $\sin \alpha = \frac{u_y}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}}$ 。よって、

$$\mathbf{T}_{x(\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_z}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}} & \frac{-u_y}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}} \\ 0 & \frac{u_y}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}} & \frac{u_z}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{u_y^2 + u_z^2} & 0 & 0 \\ 0 & u_z & -u_y \\ 0 & u_y & u_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{zx} = \begin{bmatrix} u_x \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix} \text{ より、 } \cos \beta = \frac{u_z}{\sqrt{u_z^2 + u_x^2}}, \sin \beta = \frac{u_x}{\sqrt{u_z^2 + u_x^2}}。 \text{ よって、}$$

$$\mathbf{T}_{y(\beta)} = \begin{bmatrix} \frac{u_z}{\sqrt{u_z^2 + u_x^2}} & 0 & \frac{u_x}{\sqrt{u_z^2 + u_x^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-u_x}{\sqrt{u_z^2 + u_x^2}} & 0 & \frac{u_z}{\sqrt{u_z^2 + u_x^2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{u_z^2 + u_x^2}} \begin{bmatrix} u_z & 0 & u_x \\ 0 & \sqrt{u_z^2 + u_x^2} & 0 \\ -u_x & 0 & u_z \end{bmatrix}$$

以上より、

$$\mathbf{T}_{u(\theta)} = \frac{1}{(u_y^2 + u_z^2)(u_z^2 + u_x^2)} \begin{bmatrix} \sqrt{u_y^2 + u_z^2} & 0 & 0 \\ 0 & u_z & u_y \\ 0 & -u_y & u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_z & 0 & u_x \\ 0 & \sqrt{u_z^2 + u_x^2} & 0 \\ -u_x & 0 & u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} u_z & 0 & -u_x \\ 0 & \sqrt{u_z^2 + u_x^2} & 0 \\ u_x & 0 & u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{u_y^2 + u_z^2} & 0 & 0 \\ 0 & u_z & -u_y \\ 0 & u_y & u_z \end{bmatrix}$$

2. 各表現行列 A の線形写像 f_A に対して、像 $\text{Im } f_A$ と核 $\ker f_A$ を求めよ。

(1)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(像)

像は表現行列の列ベクトル集合が生成する部分空間である。すなわち、

$$\text{Im } f_{A_1} = L \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

よって、 $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ を行基本変形して階段行列にする。

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3) - 3 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以上より、 $L\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} = L\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ であり、 $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ が基底。

よって、 $\text{Im } f_{A_1} = L\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} = \left\{k \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$ であり、直線。

なお、 $\begin{cases} x = 3k \\ y = -k \end{cases}$ より、 k を消去すると、 $y = -\frac{1}{3}x$ となる。

(核)

核は、像が原点となるベクトルの集合である。これは、表現行列を係数行列として持つ同次連立一次方程式の解空間である。すなわち、

$$\text{Ker } f_{A_1} = f_{A_1}^{-1}(\mathbf{0}) = \{x \mid A_1 x = \mathbf{0}\}$$

行基本変形により、

$A_1 x = \mathbf{0}$ は、 $x - 3y = 0$ と同値。任意定数を k とすると、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって、 $\text{Ker } f_{A_1} = \{x \mid A_1 x = \mathbf{0}\} = \left\{k \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$ であり、直線。

(2)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(解答例)

まず、 A_2 の正則性を調べるために、行列式 $|A_2|$ を求める。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6 - (-3 - 4) = 1 \neq 0 \text{ となり正則行列。}$$

正則行列を表現行列とする線形写像は全単射になり、逆写像が存在する。よって、像、核

は以下のように求められる。

(像)

3次元空間全体は3次元空間全体に移るので $\text{Im } f_{A_2} = \mathbb{R}^3$ 。

(核)

像が原点となる ($f_{A_2}(x) = 0$) 定義域中の要素 ($x \in \mathbb{R}^3$) は原点だけである。(逆写像が

存在することによる。) よって、 $\ker f_{A_2} = f_{A_2}^{-1}(0) = \{0\}$ 。

なお、 A_2 は正則行列であるので、逆行列 A_2^{-1} が存在する。

逆行列

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

を表現行列とする線形写像は、 f_{A_2} の逆写像 $f_{A_2}^{-1}$ となる。

すなわち、 $f_{A_2^{-1}} = f_{A_2}^{-1}$ が成り立つ。

(3)

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

(解答例)

f_{A_3} は4次元空間を定義域とし、3次元空間を値域とする線形写像 $f_{A_3}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ であるこ

とに注意する。

(像)

$$\text{Im } f_{A_3} = L \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

よって、 $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ を行基本変形で階段行列にする。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & -1 & 8 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し。}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2} \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{(3)+(2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

階段行列の先頭要素に対応するベクトルの集合が基底となる。

よって、

$$\begin{aligned} \text{Im } f_{A_3} &= L \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} = L \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

のように平面を表す。実際、任意定数の k_1, k_2 を消去すると、

$$7y_1 - y_2 - 2y_3 = 0$$

のように表される。(原点を通り $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとする平面。)

(核)

$$\text{Ker } f_{A_3} = f_{A_3}^{-1}(0) = \{ \mathbf{x} \mid A_3 \mathbf{x} = 0 \}$$

よって、次の連立方程式の解空間が核である。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

係数行列の行基本変形より $\text{rank } A_3 = 2$ である。未知数の数が 4 なので、

自由度 = 未知数の数 - 係数行列の階数

より、自由度は 2 であり 2 個の任意定数を用いて解空間が表わされる。

また、係数行列の行基本変形結果より、次の連立方程式と等価。

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

よって、次のように解空間が求められる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 - 3x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここで、 k_1, k_2 は任意定数。

以上より、核は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \text{Ker} f_{A_3} &= f_{A_3}^{-1}(\mathbf{0}) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

なお、 $\dim \text{Im } f_{A_3} + \dim \text{Ker} f_{A_3} = 2 + 2 = 4$ であり、定義域の次元数と等しい。(次元定理が

成り立つことが確認できる。)