

第5回 線形代数学レポート課題(行列式とその応用) 解答例

1. 次の行列式を求めよ。

サラスの公式により求める。特に、符号に注意すること。

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ = (-1) \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \cdot (-2) - \{ (-1) \cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 5 \cdot 3 \} \\ = -5 + 18 - 4 - \{ 6 - 4 - 15 \} \\ = 9 + 17 \\ = 26$$

(2)

$$\begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B & \sin B \\ 0 & -\sin B & \cos B \end{bmatrix} \\ X = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B & \sin B \\ 0 & -\sin B & \cos B \end{bmatrix} \text{とおく。}$$

行列の積に対する行列式の性質、すなわち $|XY| = |X||Y|$ により求める。

$$|X| = \begin{vmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{vmatrix} \\ = \cos^2 A + \sin^2 A \\ = 1$$

$$\begin{aligned}
|Y| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B & \sin B \\ 0 & -\sin B & \cos B \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos B & \sin B \\ -\sin B & \cos B \end{vmatrix} \\
&= \cos^2 B + \sin^2 B \\
&= 1
\end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned}
|XY| &= |X||Y| \\
&= 1 \times 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

なお、行列 $X = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ は z 軸まわりに角度 A での回転を表し、

行列 $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B & \sin B \\ 0 & -\sin B & \cos B \end{bmatrix}$ は x 軸まわりに角度 B での回転を表す。

(3)

余因子展開で求める。

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad (2\text{列で展開})$$

$$= (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (3\text{列で展開})$$

$$= (-2) \times (-1) \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{サラスの公式})$$

$$= -10 \times \{ -(-18 - 3) \}$$

$$= -210$$

(4)行列式の性質より求める。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & u \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & u \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \end{vmatrix} \quad (4) - x \times (3), (3) - x \times (2), (2) - x \times (1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & u-x \\ 0 & y^2-xy & z^2-xz & u^2-xu \\ 0 & y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & u^3-xu^2 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 列目で展開})$$

$$= \begin{vmatrix} (y-x) & (z-x) & (u-x) \\ y(y-x) & z(z-x) & u(u-x) \\ y^2(y-x) & z^2(z-x) & u^2(u-x) \end{vmatrix} \quad (\text{スカラー倍の括り出し})$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & u \\ y^2 & z^2 & u^2 \end{vmatrix} \quad (3) - y \times (2), (2) - y \times (1)$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & u-y \\ 0 & z^2-zy & u^2-uy \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 列目で展開, スカラーの括り出し})$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x)(z-y)(u-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & u \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x)(z-y)(u-y)(u-z)$$

なお、この行列式はファンデルモンドの行列式として知られている。ファンデルモンドの行列式の一般形は次の式で与えられる。一般式は帰納法で証明できる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

2. 次の問いに答えよ。

(1) 次の2つのベクトルに直交する単位ベクトルを全て示せ。

$$\mathbf{a} = (1, -2, 3), \mathbf{b} = (-1, 0, 2)$$

直交するベクトル c は外積で求められる。

$$c = a \times b$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

よって、 $c = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ と求められる。このベクトルを任意定数 $k \in \mathbb{R}$ (スカラー) 倍したベク

トル kc もまた、 $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ に直交する。

長さ 1 のベクトルは、 $\pm \frac{c}{\|c\|}$ で求められる。

$$\|c\| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 25 + 4}$$

$$= \sqrt{45}$$

$$= 3\sqrt{5}$$

よって、単位ベクトル e は次のように求められる。

$$e = \pm \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) 次の 3 点からなる 3 角形の面積を求めよ。

$$A(1, -2, 1), B(1, 3, 2), C(4, 1, 1)$$

点 A を始点とするベクトルを求め、外積を利用する。すなわち、三角形の面積を S とすると次式が成り立つ。

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

まず個々のベクトルを求める。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, 5, 1),$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3, 3, 0)$$

これらのベクトルより外積を求める。

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0-3)\mathbf{i} + (3-0)\mathbf{j} + (0-15)\mathbf{k}$$

$$= -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$$

このベクトルのノルムの半分が求める面積である。

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-15)^2}$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{1+1+25}$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{27}$$

$$= \frac{9}{2} \sqrt{3}$$

(3) 次の3つのベクトルで構成される平行6面体の体積を求めよ。

$$\mathbf{a} = (3, 0, 1), \mathbf{b} = (0, -2, 5), \mathbf{c} = (1, 2, 3)$$

体積を V とすると、次式が成り立つ。

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

よって、スカラー三重積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ を求める。

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-18 + 0 + 0) - (30 + 0 - 2)$$

$$= -18 - 28$$

$$= -46$$

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = 46$$

(裏へ続く)

3.次の行列に対して、余因子行列を求めることで、逆行列を求めよ。

(1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

余因子行列 $\tilde{\mathbf{A}} = {}^t [\widetilde{a_{ij}}]$ は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{12}} & \widetilde{a_{13}} \\ \widetilde{a_{21}} & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} \\ \widetilde{a_{31}} & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ -5 & -6 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -6 & 4 & -6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

転置と符号を忘れないこと。

逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ は、余因子行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ と行列式 $|\mathbf{A}|$ を用いて次のように計算できる。

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}}$$

ここで、行列式 $|\mathbf{A}|$ をサラスの方法により求める。

$$\begin{aligned}
 |A| &= (4+6+0)-(6+0-4) \\
 &= 10-2 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \tilde{A} \\
 &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -6 & 4 & -6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(驗算)

$$\begin{aligned}
 A^{-1} \bullet A &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -6 & 4 & -6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2+10 & 1+4-5 & -1+6-5 \\ -12+12 & 6+8-6 & -6+12-6 \\ 8-8 & -4+4 & 4+4 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= I
 \end{aligned}$$

(2)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B} = [b_{ij}]$ とする。

まず、行列式 $|\mathbf{B}|$ を求める。

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3\text{行で展開})$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{サラスの公式})$$

$$= (-1) \times [(-1 + 2 + 0) - (0 + 4 + 0)]$$

$$= 3$$

次に余因子行列 $\widetilde{\mathbf{B}} = {}^t [\widetilde{b}_{ij}]$ を求める。

全ての (i, j) 要素に対して、 (i, j) 余因子 $\widetilde{b}_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{b_{ij}}$ を求める。

$$\widetilde{b}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\widetilde{b}_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\widetilde{b}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) - (-2) = 1$$

$$\widetilde{b}_{14} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\widetilde{b}_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\widetilde{b}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\widetilde{b}_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\widetilde{b}_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\widetilde{b}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1+2)-(4) = -3$$

$$\widetilde{b}_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1+4) = -3$$

$$\widetilde{b}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+2)-(1) = 3$$

$$\widetilde{b}_{34} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -[(-2)-(-1+8)] = -[-9] = 9$$

$$\widetilde{b}_{41} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\widetilde{b}_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\widetilde{b}_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -[-1] = 1$$

$$\widetilde{b}_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 - (-4) = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \widetilde{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \widetilde{b}_{11} & \widetilde{b}_{12} & \widetilde{b}_{13} & \widetilde{b}_{14} \\ \widetilde{b}_{21} & \widetilde{b}_{22} & \widetilde{b}_{23} & \widetilde{b}_{24} \\ \widetilde{b}_{31} & \widetilde{b}_{32} & \widetilde{b}_{33} & \widetilde{b}_{34} \\ \widetilde{b}_{41} & \widetilde{b}_{42} & \widetilde{b}_{43} & \widetilde{b}_{44} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 9 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって、逆行列は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{B}|} \widetilde{\mathbf{B}} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 9 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(驗算)

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \\
& = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & & 0 & & 0 & 0 \\ 1+3-4 & & 1+4-2 & & 2-2 & 2-2 \\ 1-3+2 & & 1-2+1 & & 2+1 & 2-2 \\ -1-9+10 & & -1-4+5 & & -2+2 & -2+5 \end{bmatrix} \\
& = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\
& = \mathbf{I}
\end{aligned}$$