

第4回 線形代数学レポート課題(連立一次方程式) 解答例

1. 次の問いに答えよ。

(1) 次の行列の逆行列を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

逆行列は、 $[A \mid I] \xrightarrow{\text{行基本変形}} [I \mid A^{-1}]$ で求められる。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2} \times (2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{2 \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 2 \end{array} \right]$$

以上より、 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ と求められる。

(検算)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & 9-9 & -3+3 \\ 4-4 & 6-5 & -2+2 \\ 14-2-12 & 18-3-15 & -6+1+6 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 次の連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} x & +3y & & = 0 \\ & -2y & +z & = 0 \\ 2x & +y & +3z & = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{とおくと、与式は } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ と書ける。}$$

(1) より、係数行列 $\mathbf{A}$ には逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ が存在する。よって、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{以上より、} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ の一意の解を持つ。}$$

(3) 次の連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & & = -2 \\ & -2x_2 & +x_3 & = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = -1 \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \text{とおくと、与式は } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ と書ける。}$$

(1) より、係数行列 $\mathbf{A}$ には逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ が存在する。よって、

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14+27+3 \\ 4-9-1 \\ 8-15-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix}$$

以上より、 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix}$ の一意の解を持つ。

2.次の連立一次方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 2 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形で階段行列に変形する。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{(2) \leftrightarrow (4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-1 \times (2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right] \end{aligned}$$

よって、係数行列の階数は次の値である。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

一方、拡大係数行列の階数は次の値である。

$$\text{rank} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right] = 4$$

以上より、 $\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} < \text{rank} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right]$ であるため、解が存在せず不能である。

最後の階段行列を連立方程式の形で書くと以下になる。

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 4 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = -3 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = -1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -6 \end{cases}$$

最後の式に矛盾が生じている。

$$(2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形で階段行列に変形する。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(1)+1 \cdot (2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -12 & -13 & -8 \\ 0 & 2 & -17 & -19 & -12 \end{array} \right] \xrightarrow{-1 \cdot (2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -12 & -13 & -8 \\ 0 & 2 & -17 & -19 & -12 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{6} \cdot (3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

以上より、係数行列の階数は3であるのに対して、拡大係数行列の階数は4であるため、解が存在せず不能である。

$$(3) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形で階段行列に変形する。

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \\
 & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \\
 & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -20 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -2 & 3 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

以上より、与式は次と等価。

$$\begin{cases} x_1 & -9x_4 & 0 & = & 3 \\ & x_2 & -20x_4 & -3x_5 & = & 5 \\ & & x_3 & -13x_4 & -2x_5 & = & 3 \end{cases}$$

未知数の数が5で、拡大係数行列の rank が3であるので、

自由度は $5 - 3 = 2$

よって、2つの任意定数 k_1, k_2 を用いて解が表現できる。今、 $x_4 \equiv k_1, x_5 \equiv k_2$ とし、上の方程式から次の解が得られる。

$$\begin{cases} x_1 & = 9k_1 + 3 \\ x_2 & = 20k_1 + 3k_2 + 5 \\ x_3 & = 13k_1 + 2k_2 + 3 \\ x_4 & = k_1 \\ x_5 & = k_2 \end{cases} \quad (k_1, k_2 \text{ は任意定数})$$

ベクトルの表現にすると次式が解である。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \\ 13 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ は任意定数})$$

$$(4) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

(4)は(3)の同次連立一次方程式。よって、(3)の定数ベクトルを除いたものが解になる。よって、(4)の解は次式である。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \\ 13 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{は任意定数})$$

(なお、この解表現が原点を通ることは、 $k_1 = k_2 = 0$ とおくことで確認できる。)