第 3 回　線形代数学レポート課題（行列の行基本変形とその応用）解答例

1.行基本変形の変換行列

次の行列に関して、問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&-2&0&0\\1&0&0&0\\0&-3&0&1\end{bmatrix}$$

⑴ 行列 $\boldsymbol{A}$ の 2 行目を $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 倍して得られる行列を $\boldsymbol{A}_1$ とし、$\boldsymbol{A}_1=T_{-\frac{1}{2}\times(2)}\boldsymbol{A}$ となる行列を $T_{-\frac{1}{2}\times(2)}$ とする。行列 $T_{-\frac{1}{2}\times(2)}$ および行列 $\boldsymbol{A}_1$ を成分で示せ。

$\boldsymbol{A}$ が 4 行なので、$T_{-\frac{1}{2}\times(2)}$ は 4×4 行列。スカラー倍の行基本変形に対応する変換行列であるので、次のように求められる。

$$T_{-\frac{1}{2}\times(2)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1=T_{-\frac{1}{2}\times(2)}\boldsymbol{A}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&-2&0&0\\1&0&0&0\\0&-3&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&-3&0&1\end{bmatrix}$$

⑵ 行列 $\boldsymbol{A}_1$ の 4 行目に 2 行目を 3 倍して加えて得られる行列を $\boldsymbol{A}_2$ とし、$\boldsymbol{A}_2=T_{(4)+3\times(2)}\boldsymbol{A}_1$ となる行列を $T_{(4)+3\times(2)}$ とする。行列 $T_{(4)+3\times(2)}$ および行列 $\boldsymbol{A}_2$ を成分で示せ。

$\boldsymbol{A}_1$ が 4 行なので、$T_{(4)+3\times(2)}$ は 4×4 行列。ある行を他の行にスカラー倍して加算する行基本変形に対応する変換行列なので、次のように求められる。

$$T_{(4)+3\times(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_2 = T_{(4)+3\times(2)}\boldsymbol{A}_1$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)行列 $\boldsymbol{A}_2$ の 1 行目と 3 行目を交換して得られる行列を $\boldsymbol{A}_3$ とし、 $\boldsymbol{A}_3 = T_{(1)\leftrightarrow(3)}\boldsymbol{A}_2$ となる行列を $T_{(1)\leftrightarrow(3)}$ とする。行列 $T_{(1)\leftrightarrow(3)}$ および行列 $\boldsymbol{A}_3$ を成分で示せ。

$\boldsymbol{A}_2$ が 4 行なので、$T_{(1)\leftrightarrow(3)}$ は 4×4 行列。ある行と他の行を交換する行基本変形に対応する変換行列なので、次のように求められる。

$$T_{(1)\leftrightarrow(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_3 = T_{(1)\leftrightarrow(3)}\boldsymbol{A}_2$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ。

$\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{I}$ であるので、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= \boldsymbol{A}_3 \\ &= \boldsymbol{T}_{(1)\leftrightarrow(3)}\boldsymbol{A}_2 \\ &= \boldsymbol{T}_{(1)\leftrightarrow(3)}\boldsymbol{T}_{(4)+3\times(2)}\boldsymbol{A}_1 \\ &= \boldsymbol{T}_{(1)\leftrightarrow(3)}\boldsymbol{T}_{(4)+3\times(2)}\boldsymbol{T}_{-\frac{1}{2}\times(2)}\boldsymbol{A} \end{aligned}$$

よって、逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は次のように計算できる。

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{T}_{(1)\leftrightarrow(3)}\boldsymbol{T}_{(4)+3\times(2)}\boldsymbol{T}_{-\frac{1}{2}\times(2)}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&-\frac{3}{2}&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0\\1&0&0&0\\0&-\frac{3}{2}&0&1\end{bmatrix}$$

（検算）

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&-2&0&0\\1&0&0&0\\0&-3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&-\frac{1}{2}&0&0\\1&0&0&0\\0&-\frac{3}{2}&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

よって、正しい逆行列。

2.行列の階数

次に示す各行列に対して、

行基本変形により階段行列に変形し階数(rank)を求めよ。

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\2&-1&2&-1\\-1&2&-4&-2\\0&0&0&3\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-2&2&-1&2&4\\1&-1&3&-3&-1\\-1&1&7&-5&5\end{bmatrix}$$

⑴ $rank(\boldsymbol{B})$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)+2\times(1)}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

よって、

$rank(\boldsymbol{B})=1$

⑵ $rank(\boldsymbol{C})$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 2 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{-1\times(2)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 2 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)-2\times(2)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{10}\times(3)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{(4)-3\times(3)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

以上より、$rank(\boldsymbol{C})=3$

⑶ $rank(\boldsymbol{D})$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 3 & -3 & -1\\ -1 & 1 & 7 & -5 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -3 & -1\\ -2 & 2 & -1 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 7 & -5 & 5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 5 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 10 & -8 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{(3)-2\times(2)}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 5 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

以上より、$rank(\boldsymbol{D})=2$

3.逆行列

次に示す行列が正則行列かどうかを調べ、正則行列に対しては逆行列を求めよ。

n 次正方行列 $\boldsymbol{X}$ の単位行列は、$\left[\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{I}\right] \xrightarrow{\text{行基本変形}} \left[\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{X}^{-1}\right]$ により求める。$\boldsymbol{X}$ が非正則行列のとき、すなわち、逆行列を持たないときには、行基本変形の途中で判別可能である。$\boldsymbol{X}$ が非正則行列の場合には、階数 $rank\boldsymbol{X}$ が次数未満 n になり、式 $rank\boldsymbol{X} < n$ を満たす。よって、掃き出し法の途中で、非零の対角成分に設定可能かどうかで非正則性を判定できる。

(1)

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{I}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ を行基本変形し、左半分を単位行列にする。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)-3\times(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\times(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2\times(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)-\frac{1}{2}\times(3)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

以上より、

$$\boldsymbol{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

（検算）

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6-6 & -1-4+5 & 0-2+2 \\ 0+6-6 & 0-4+5 & 0-2+2 \\ 3+3-6 & -3-2+5 & 0-1+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{I}$$

よって、正しい。

⑵

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$\left[\boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{I}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$を行基本変形し、左半分を単位行列にする。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-1\times(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

この時点で、

$$\boldsymbol{F} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

のように２段の階段行列に行基本変形されることがわかる。

よって、次式が成り立つ。

$$rank\boldsymbol{F} = 2 < 3 = n$$

階数が次数未満のため行列 $\boldsymbol{F}$ は非正則行列であり、逆行列を持たない。