第 2 回　線形代数学レポート課題（行列の演算 2、転置、逆行列、分解）解答例

1. 行列演算（転置、逆行列）

次式を計算せよ。ただし、次式の演算は全て計算可能であるとする。

(1) $\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right)^{-1}$

$$
\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right)^{-1}\\
&= \boldsymbol{A}_4^{-1}\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\right)^{-1}\\
&= \boldsymbol{A}_4^{-1}\boldsymbol{A}_3^{-1}\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\right)^{-1}\\
&= \boldsymbol{A}_4^{-1}\boldsymbol{A}_3^{-1}\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}
\end{aligned}
$$

(2) ${}^t\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right)$

$$
\begin{aligned}
&{}^t\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right)\\
&= {}^t\left(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right){}^t\boldsymbol{A}_1\\
&= {}^t\left(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right){}^t\boldsymbol{A}_2\,{}^t\boldsymbol{A}_1\\
&= {}^t\boldsymbol{A}_4\,{}^t\boldsymbol{A}_3\,{}^t\boldsymbol{A}_2\,{}^t\boldsymbol{A}_1
\end{aligned}
$$

(3) $\left({}^t\left({}^t\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\right)\left(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right)^{-1}\right)\right)^{-1}$

$$
\begin{aligned}
&\left({}^t\left({}^t\left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\right)\left(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_4\right)^{-1}\right)\right)^{-1}\\
&= \left({}^t\left({}^t\boldsymbol{A}_2\,{}^t\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_4^{-1}\boldsymbol{A}_3^{-1}\right)\right)^{-1}\\
&= \left({}^t\boldsymbol{A}_3^{-1}\,{}^t\boldsymbol{A}_4^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\right)^{-1}\\
&= \boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}\,{}^t\boldsymbol{A}_4\,{}^t\boldsymbol{A}_3
\end{aligned}
$$

(4) $\left(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3\right)\left(\boldsymbol{A}_1^{-1}+\boldsymbol{A}_2^{-1}+\boldsymbol{A}_3^{-1}\right)$

$$
\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3\right)\left(\boldsymbol{A}_1^{-1}+\boldsymbol{A}_2^{-1}+\boldsymbol{A}_3^{-1}\right)\\
&= \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2^{-1}+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3^{-1}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1^{-1}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3^{-1}+\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_1^{-1}+\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2^{-1}+\boldsymbol{I}\\
&= 3\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2^{-1}+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3^{-1}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1^{-1}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3^{-1}+\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_1^{-1}+\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2^{-1}
\end{aligned}
$$

(5) ${}^t\left(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\right)\left({}^t\boldsymbol{A}_1^{-1}+{}^t\boldsymbol{A}_2^{-1}\right)\left(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\right)$

$$
\begin{aligned}
&{}^t\left(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\right)\left({}^t\boldsymbol{A}_1^{-1}+{}^t\boldsymbol{A}_2^{-1}\right)\left(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\right)\\
&=\left({}^t\boldsymbol{A}_1+{}^t\boldsymbol{A}_2\right)\left({}^t\boldsymbol{A}_1^{-1}+{}^t\boldsymbol{A}_2^{-1}\right)\left(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\right)\\
==&\left(\boldsymbol{I}+{}^t\boldsymbol{A}_1{}^t\boldsymbol{A}_2^{-1}+{}^t\boldsymbol{A}_2{}^t\boldsymbol{A}_1^{-1}+\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\right)\\
&=\left(2\boldsymbol{I}+{}^t\boldsymbol{A}_1{}^t\boldsymbol{A}_2^{-1}+{}^t\boldsymbol{A}_2{}^t\boldsymbol{A}_1^{-1}\right)\left(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\right)\\
&=2\boldsymbol{A}_1+2\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_1{}^t\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1+{}^t\boldsymbol{A}_2{}^t\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2
\end{aligned}
$$

2.成分計算（転置による型の変換）

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}
$$

とする。次式を計算せよ。（ここで、計算するとは成分を求めることである。）

(1) ${}^t\left({}^t\left({}^t\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+{}^t\boldsymbol{C}\right)+\boldsymbol{A}\right)+{}^t\left({}^t\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\right)$

$$
\begin{aligned}
&{}^t\left({}^t\left({}^t\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+{}^t\boldsymbol{C}\right)+\boldsymbol{A}\right)+{}^t\left({}^t\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\right)\\
&={}^t\left(\boldsymbol{A}+{}^t\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}\right)+\boldsymbol{B}+{}^t\boldsymbol{C}\\
&=2{}^t\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}+2{}^t\boldsymbol{C}\\
&=2\left({}^t\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+{}^t\boldsymbol{C}\right)\\
&=2\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}\right)\\
&=2\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ 4 & -1 & -1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}2 & 2 & -6\\ 8 & -2 & -2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(2) ${}^t\left({}^t\left({}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)+{}^t\boldsymbol{C}{}^t\boldsymbol{B}\right)$

$$ {}^t\left({}^t\left({}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right) + {}^t\boldsymbol{C}\,{}^t\boldsymbol{B}\right) $$
$$ = {}^t\left({}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{A} + {}^t\boldsymbol{C}\,{}^t\boldsymbol{B}\right) $$
$$ = {}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} $$
$$ = \left({}^t\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{C} $$
$$ = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} $$
$$ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} $$
$$ = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} $$

3.行列の分解（対称行列と交代行列）

次の行列を対称行列と交代行列の和で表せ。

(1) $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

転置行列との和と差により、対称行列および交代行列を求める。

$$ \boldsymbol{D} + {}^t\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -12 \end{bmatrix} $$
$$ \boldsymbol{D} - {}^t\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} $$

次式が成り立つ。

$$ \boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{D} + {}^t\boldsymbol{D}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{D} - {}^t\boldsymbol{D}\right) $$
$$ \therefore \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} $$

(2) $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 12 \\ 4 & -14 & -10 \end{bmatrix}$

転置行列との和と差により、対称行列および交代行列を求める。

$$\boldsymbol{E}+{}^t\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}6&4&2\\-2&4&12\\4&-14&-10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&-2&4\\4&4&-14\\2&12&-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&2&6\\2&8&-2\\6&-2&-20\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}-{}^t\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}6&4&2\\-2&4&12\\4&-14&-10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&-2&4\\4&4&-14\\2&12&-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&6&-2\\-6&0&26\\2&-26&0\end{bmatrix}$$

次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}+{}^t\boldsymbol{E}\right)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}-{}^t\boldsymbol{E}\right)$$

$$\therefore\begin{bmatrix}6&4&2\\-2&4&12\\4&-14&-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1&3\\1&4&-1\\3&-1&-10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&3&-1\\-3&0&13\\1&-13&0\end{bmatrix}$$

4.行列の特徴量（トレースと行列式）

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}7&4\\5&3\end{bmatrix}\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}2&3\\-4&-5\end{bmatrix}$$

とする。次の値を求めよ。

⑴ $tr(\boldsymbol{F})=7+3=10$

⑵ $tr(\boldsymbol{G})=2+\left(-5\right)=-3$

⑶ $tr(\boldsymbol{FG})$

$$\boldsymbol{FG}=\begin{bmatrix}7&4\\5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-4&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\-2&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore tr\left(\boldsymbol{FG}\right)=-2+0=-2$$

⑷ $tr(\boldsymbol{GF})$

$$\boldsymbol{GF}=\begin{bmatrix}2&3\\-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&4\\5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29&17\\-53&-31\end{bmatrix}$$

$$\therefore tr\left(\boldsymbol{GF}\right)=29-31=-2$$

⑸ $\left|\boldsymbol{F}\right|$

$$\left|\boldsymbol{F}\right|=21-20=1$$

(6) $|\boldsymbol{G}|$

$|\boldsymbol{G}| = -10 + 12 = 2$

(7) $|\boldsymbol{FG}|$

$$|\boldsymbol{FG}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$$

(別解)

$|\boldsymbol{FG}| = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{G}| = 1 \bullet 2 = 2$

(8) $|\boldsymbol{GF}|$

$$|\boldsymbol{GF}| = \begin{vmatrix} 29 & 17 \\ -53 & -31 \end{vmatrix} = -899 + 901 = 2$$

(別解)

$|\boldsymbol{GF}| = |\boldsymbol{G}||\boldsymbol{F}| = 2 \bullet 1 = 2$