

第1回 線形代数学レポート課題（行列の演算1、加算と乗算）解答例

1.以下の行列 A, B, C, D, E, F に対して問いに答えよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 和が定義されるすべての組み合わせに対して、和を求めよ。（ただし、 $A+A$ といった同じ行列同士の和も含む。）

行列の型が等しいときに和が計算できる。組み合わせの列挙は丁寧に行うこと。

$$A+A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B+B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B+E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C+C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C+F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D+D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$E+B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} (=B+E)$$

$$E+E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F+C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} (=C+F)$$

$$\mathbf{F} + \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 積が定義されるすべての組み合わせに対して、積を求めよ。(ただし、 $C \times C$ といった同じ行列同士の積も含む。)

積は、乗算の左辺の列数と右辺の行数が等しい場合にだけ計算できる。

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -1+0 \\ 2+0 & -2+0 \\ 0+0 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & 0+0 & 1+0 \\ -2+0 & 0+0 & 2+0 \\ 0-1 & 0-2 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 2+0 \\ 0+0 & 4+0 \\ 0+1 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2+0 & 0+0-2 \\ 0+2+0 & 0+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BD} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1+0 & 4+0+2 & 6+0-4 \\ 0+1+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & -1-1 & 2+0 \\ 0+0 & 0+3 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CC} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -1-3 \\ 0+0 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CE} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-1 & 0-2 & 1+0 \\ 0+3 & 0+6 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CF = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & 2-1 \\ 0-3 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$DA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4+0 & 0+0-3 \\ 1+0+0 & 0+0+0 \\ 0+2+0 & 0+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$DD = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2+0 & 0+0+3 & 0+0-6 \\ 0+0+0 & 2+0+0 & 3+0+0 \\ 0+1+0 & 0+0-2 & 0+0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0+0 & 0+0-1 \\ 1+4+0 & 0+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$ED = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+0 & -2+0+1 & -3+0-2 \\ 0+2+0 & 2+0+0 & 3+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$FB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+2 & 0+0 \\ -2+0 & 1+1 & -2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$FC = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+6 \\ -1+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$FE = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2 & 0+4 & 0+0 \\ 1+1 & 0+2 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$FF = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2 & 0+2 \\ 0-1 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. 行列 A, B, C, D, E, F を上記 1 の行列とする。

このとき、次式が計算可能かどうかを調べ、計算が可能ときにはその値を求めよ。

(1) $5C(2B - 3E) - 2(5CB - 7CE)$

計算可能。

$$\begin{aligned}
& 5C(2B - 3E) - 2(5CB - 7CE) \\
&= 10CB - 15CE - 10CB + 14CE \\
&= \mathbf{O}_{2,3} - CE \\
&= -CE \\
&= -\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$(2) \ 3(2A - 3E)D - 2(3AD - 4ED)$$

行列 A は 2×2 行列に対して、行列 E は 2×3 行列なので和の計算不可。

(別解)

行列 A は 2×2 行列で行列 D は 3×3 行列なので、乗算左辺の列数と乗算右辺の行数が異なるので積の計算不可。

$$(3) \ BA + EA + DA$$

行列 D は 3×3 行列で行列 A は 2×2 行列でなので、乗算左辺の列数と乗算右辺の行数が異なるので積の計算不可。

(別解)

もし計算可能なら与式は次式と等価。

$$(B + E + D)A$$

このとき、行列 B, E は 2×3 行列で和の計算可能だが、行列 D は 3×3 行列でなので $E + D$ の計算不可能。

$$(4) \ CB + CE + BD + ED$$

計算可能。

$$CB + CE + BD + ED$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2-2-1+0 & -2-2+6-1 & 2+1+2-5 \\ 0+3+1+2 & 3+6+0+2 & 0+0+0+3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$(5) \ ABCD$$

計算不可能。

行列 B は 2×3 行列で行列 C は 2×2 行列なので積計算不可能。

(6) $ACBD$

計算可能

$$ACBD = (AC)(BD)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -4 & 12 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 次の性質を満たす 3×3 の行列 A, B を見つけよ。(無数に存在するので、1組ずつ示せば良い。)

解答略。

(1) $AB \neq BA$

(2) $A \neq O$ かつ $B \neq O$ かつ $AB = O$