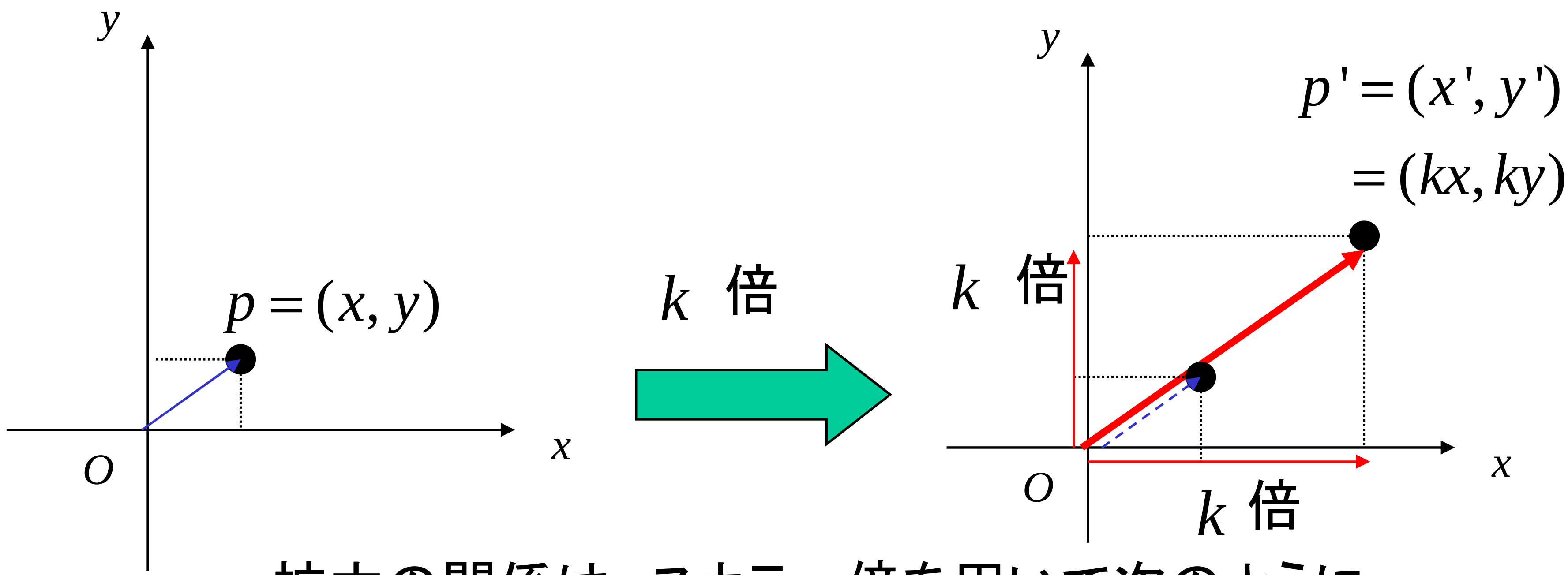
９．線形写像

- ここでは、行列の積によって、写像を定義できることをみていく。
- また、行列の積によって定義される写像の性質を調べていく。

行列演算と写像(1次変換)

拡大とスカラー倍



拡大の関係は、スカラー倍を用いて次のように表現できる。

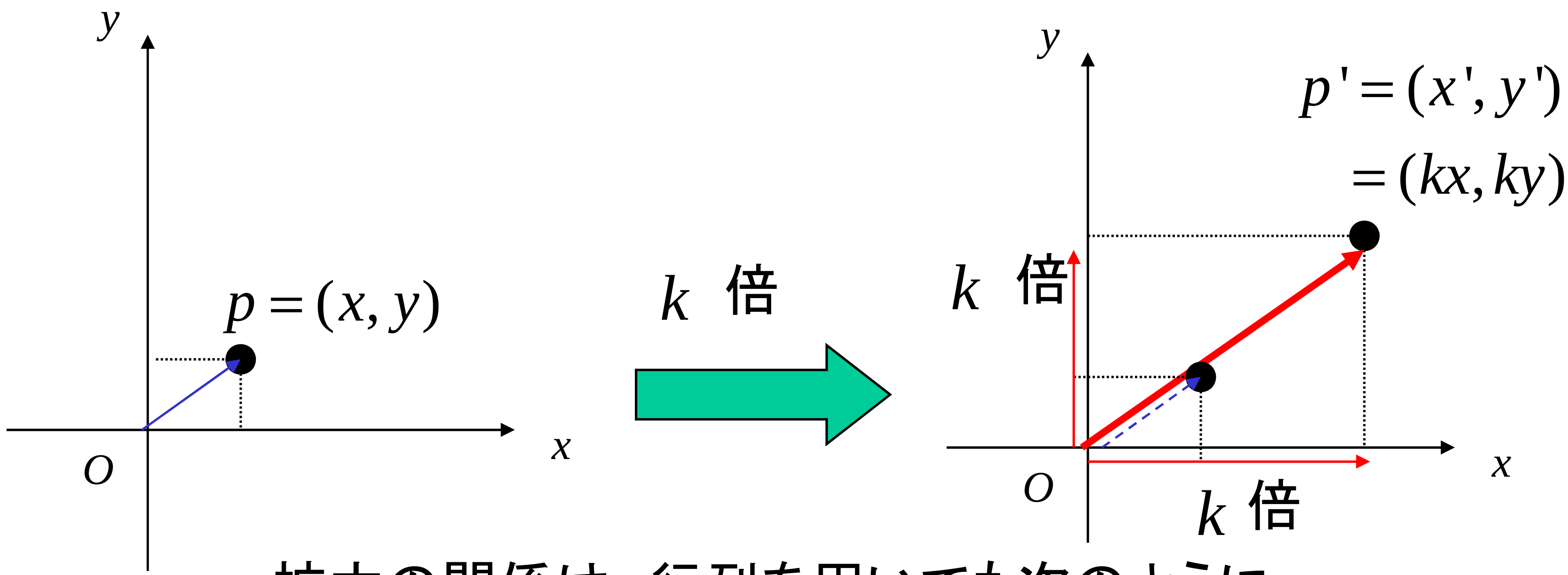
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

拡大後

拡大前

拡大

拡大と行列の積



拡大の関係は、行列を用いても次のように
表現できる。

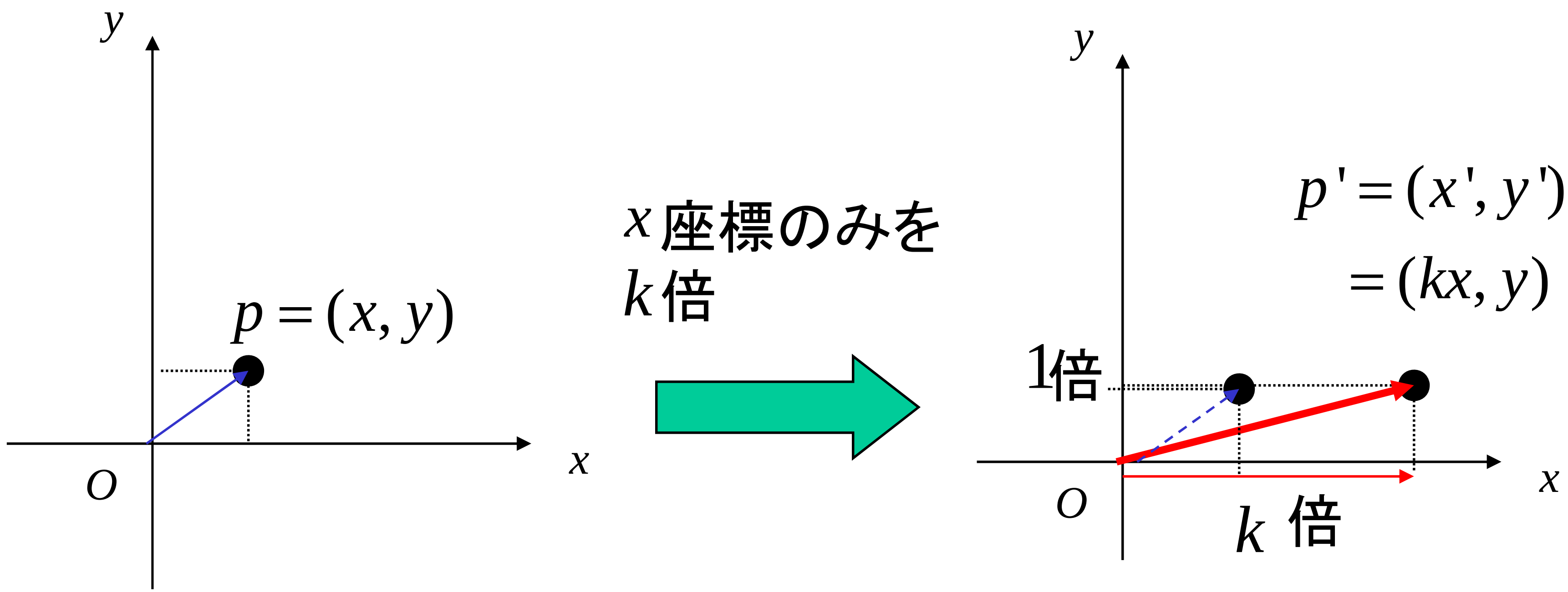
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

拡大後

拡大前

拡大

変形と行列



行列を用いるといろいろな変形が表現できる。

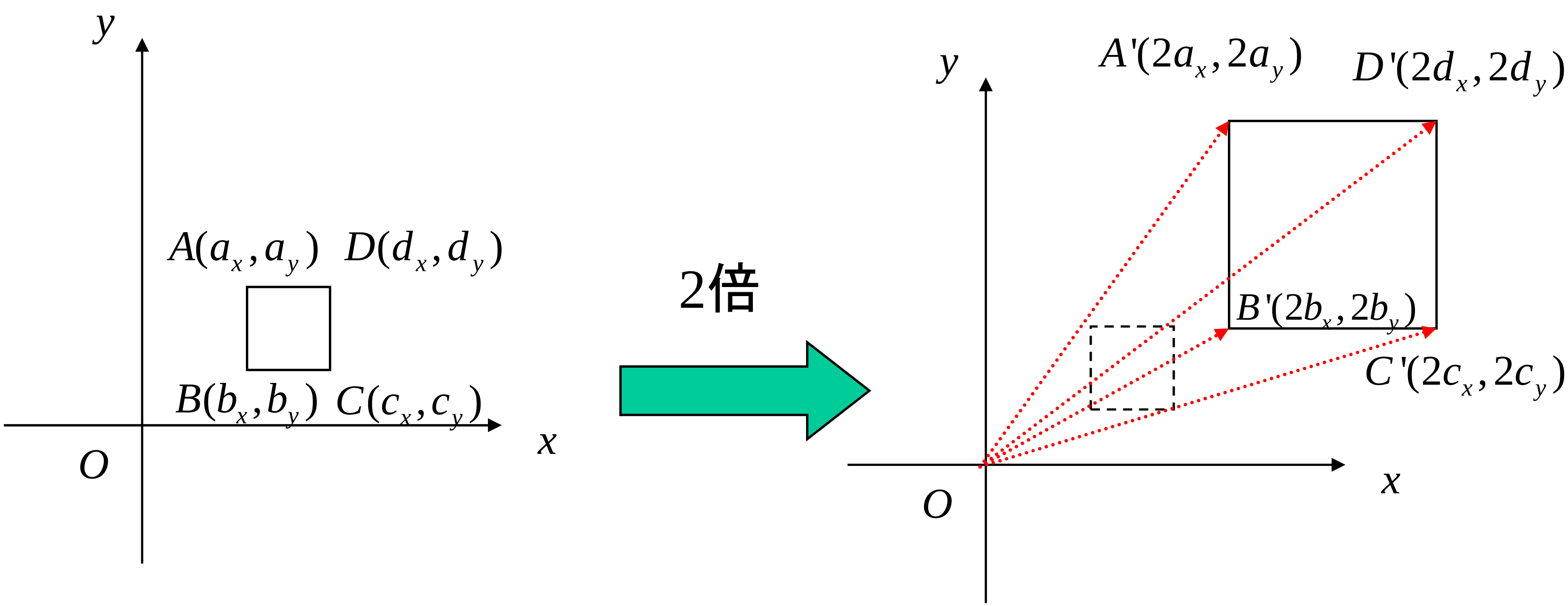
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

変形後

変形

変形前

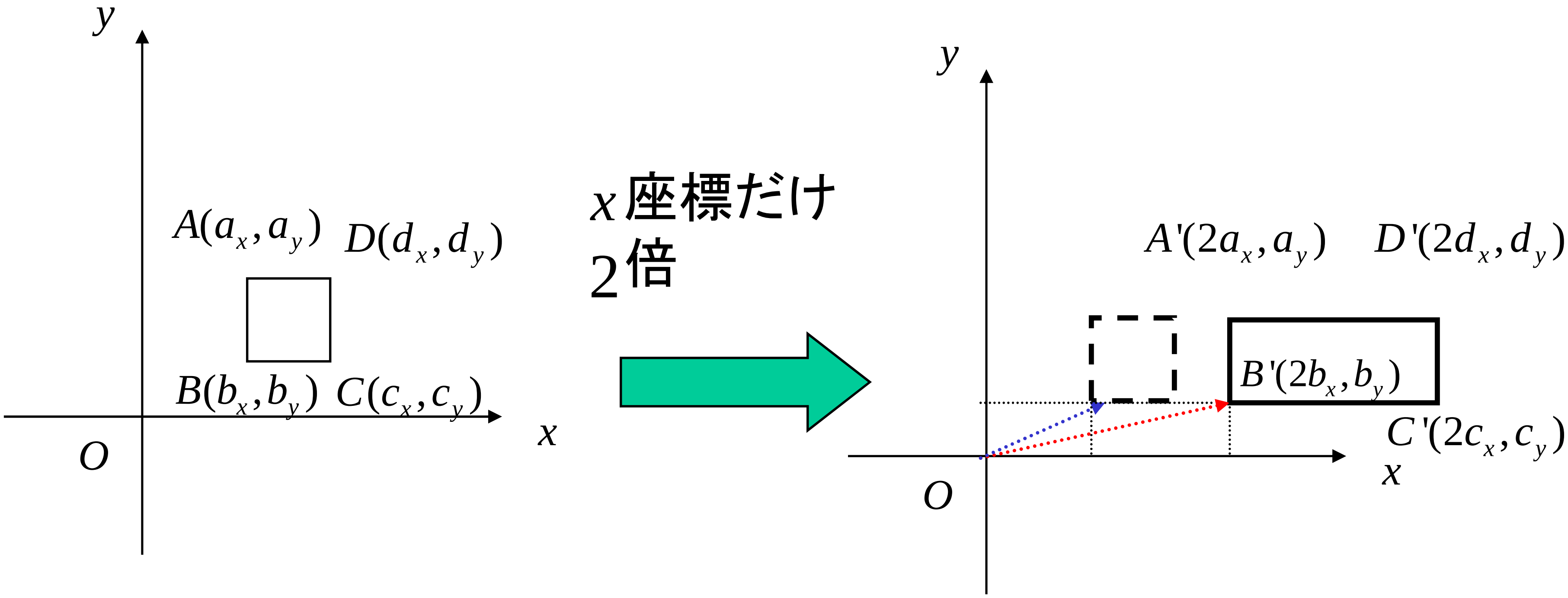
行列による図形の変形1



図形の拡大は行列を用いて表現できる。

$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

行列による図形の変形２

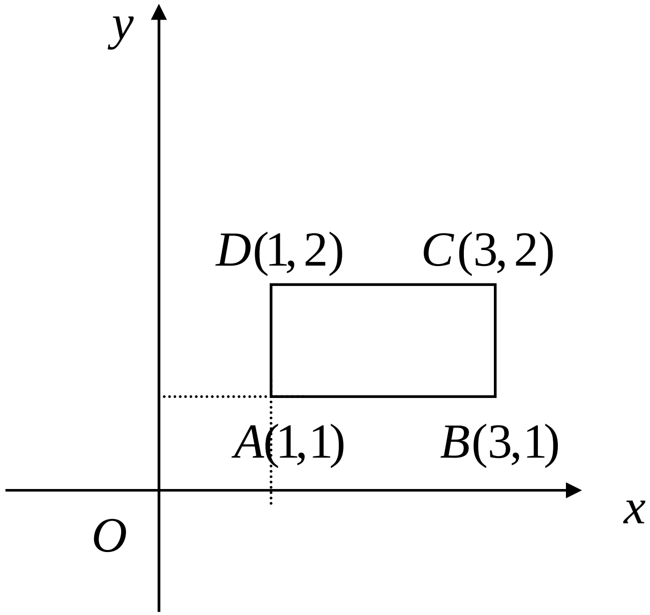


図形の変形は行列を用いて表現できる。

$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

練習

次の図形に各変換をほどしたとき、
うつされる図形の頂点の座標と外形を描け。



（１）

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

（２）

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

（３）

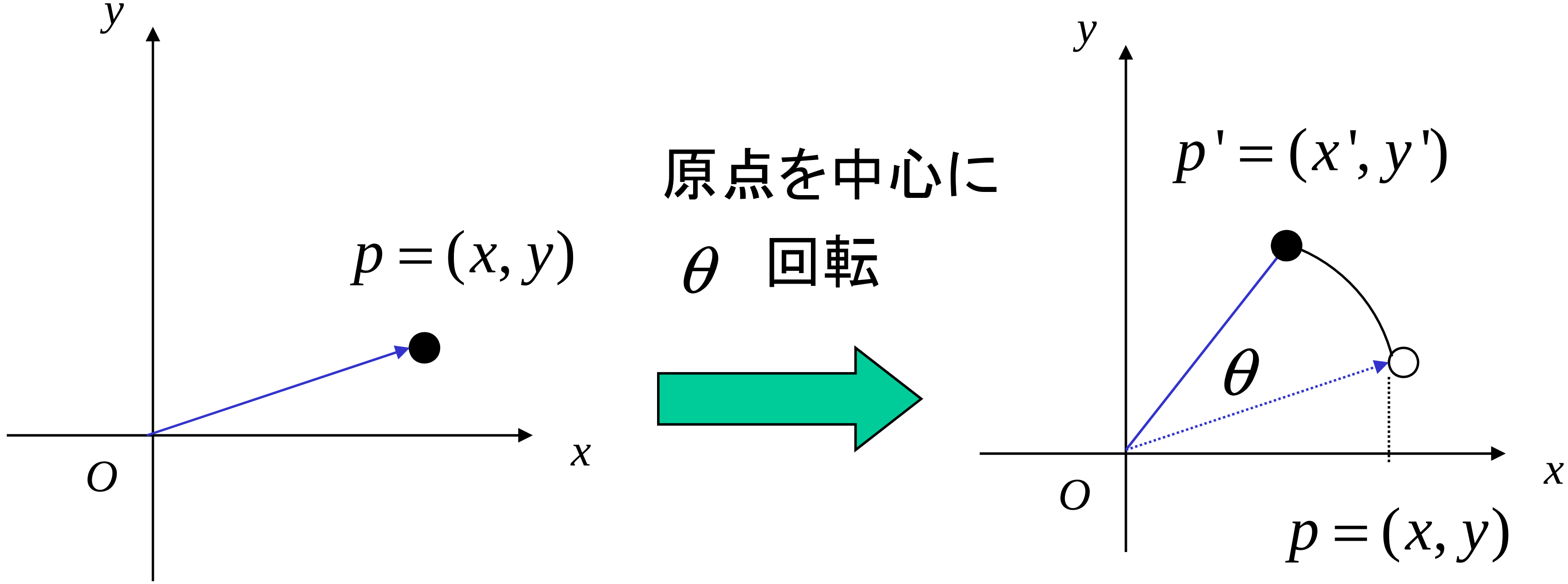
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

（４）

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

回転を表す行列

$$p' = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$$



回転も行列を用いて表すことができる。
回転を表す行列は少し複雑である。
（興味のある人は自分で導くとよい。）

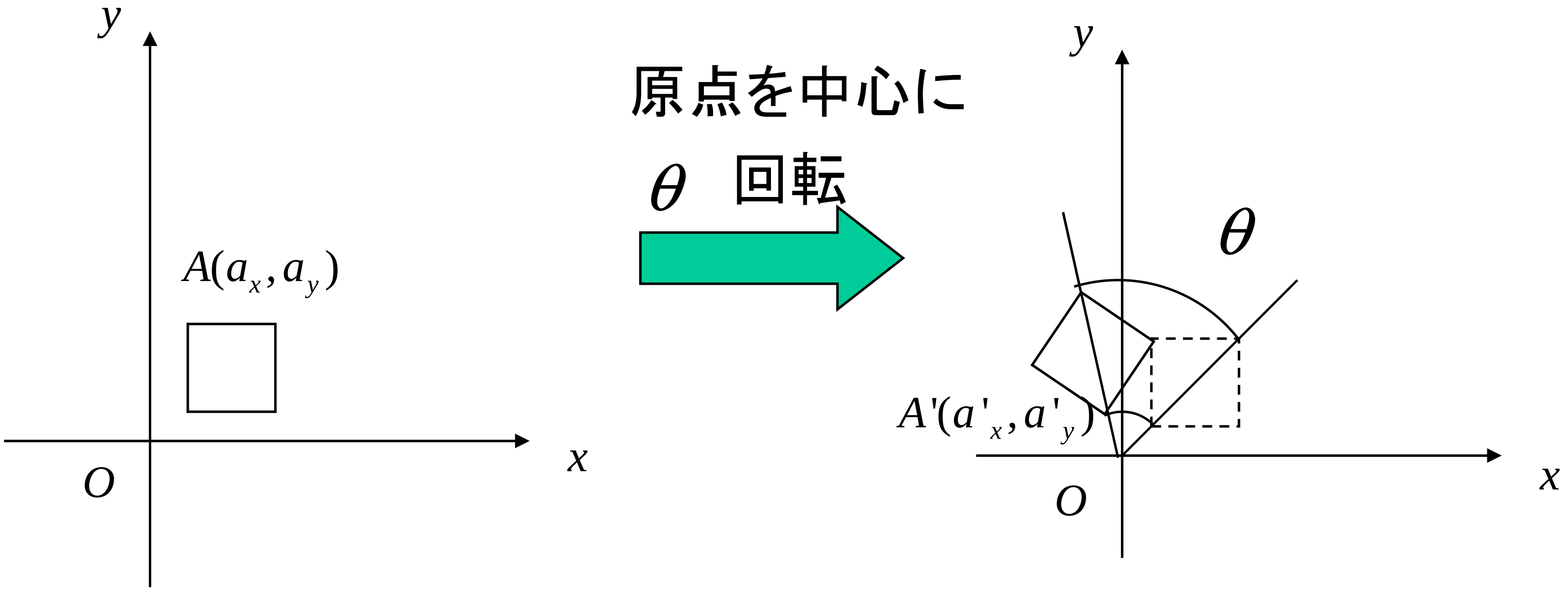
回転後

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

回転前

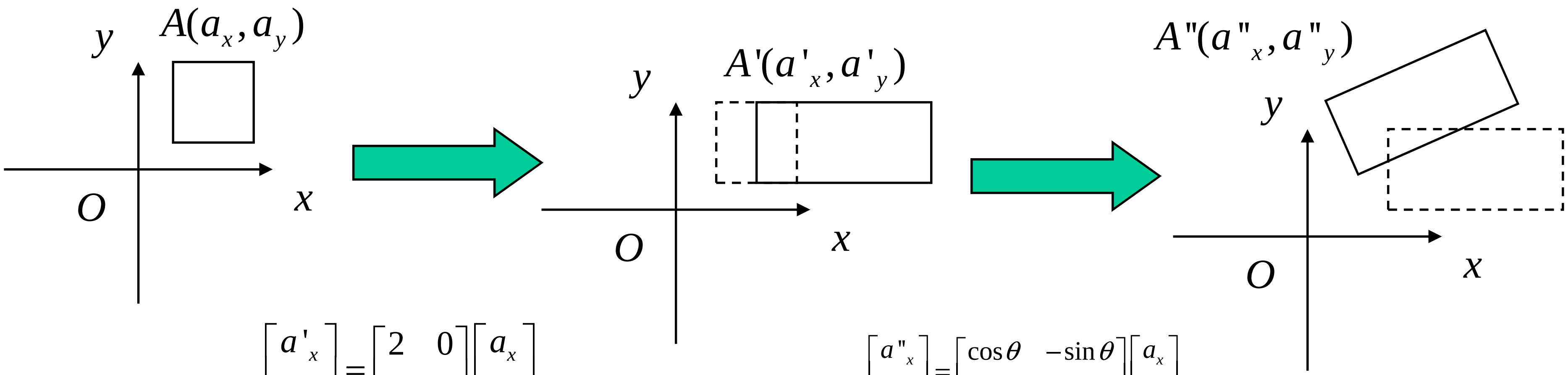
回転

行列による図形の回転



$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

変形の組み合わせと行列の積1



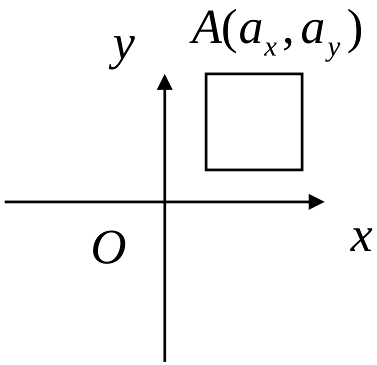
$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a''_x \\ a''_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

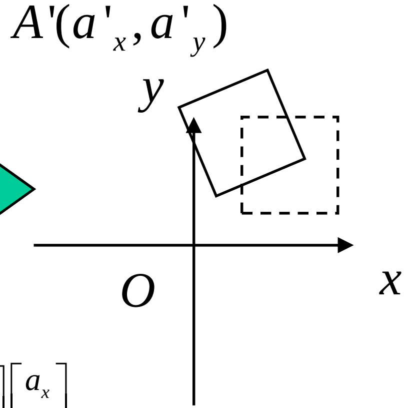
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a''_x \\ a''_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -\sin\theta \\ 2\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

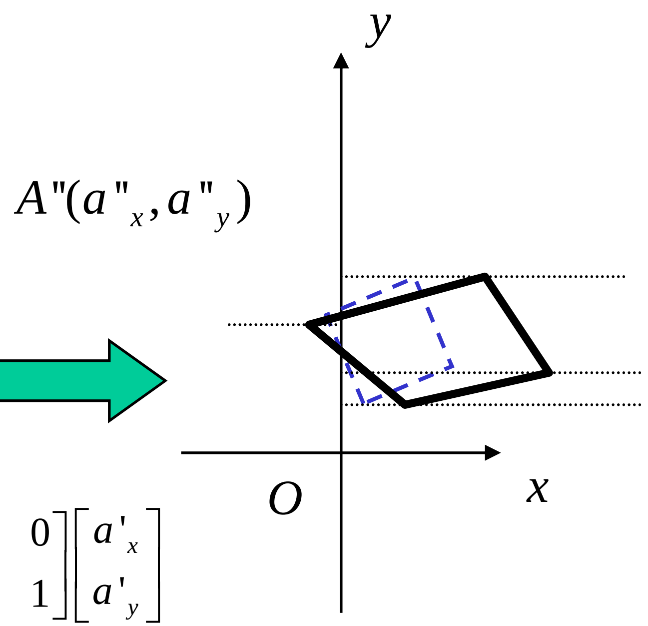
変形の組み合わせは行列の積で表現される。

変形の組み合わせと行列の積2



$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$





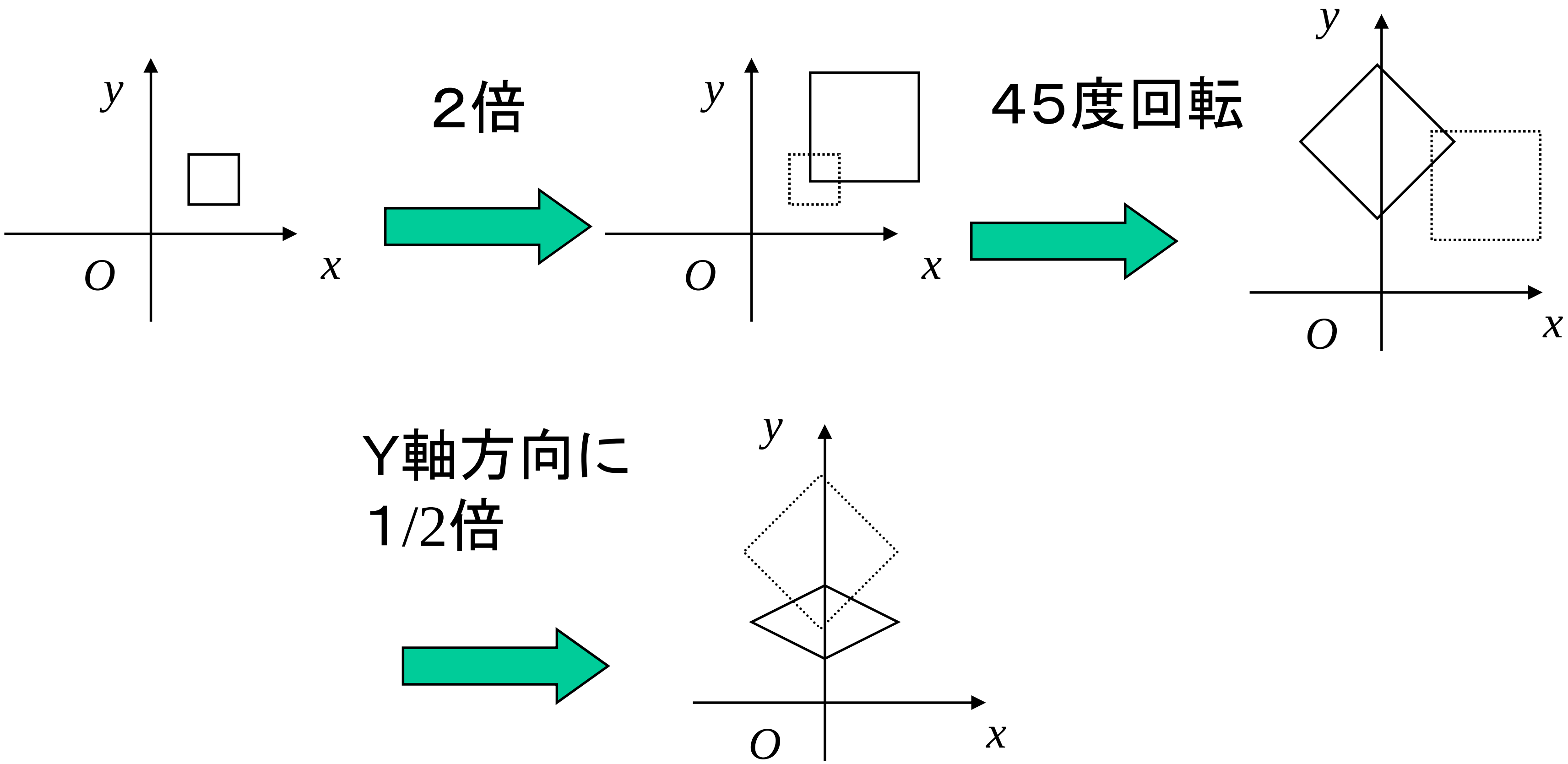
$$\begin{bmatrix} a''_x \\ a''_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a''_x \\ a''_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

変換の順序と
積の順序を注意する事。
交換はできない。

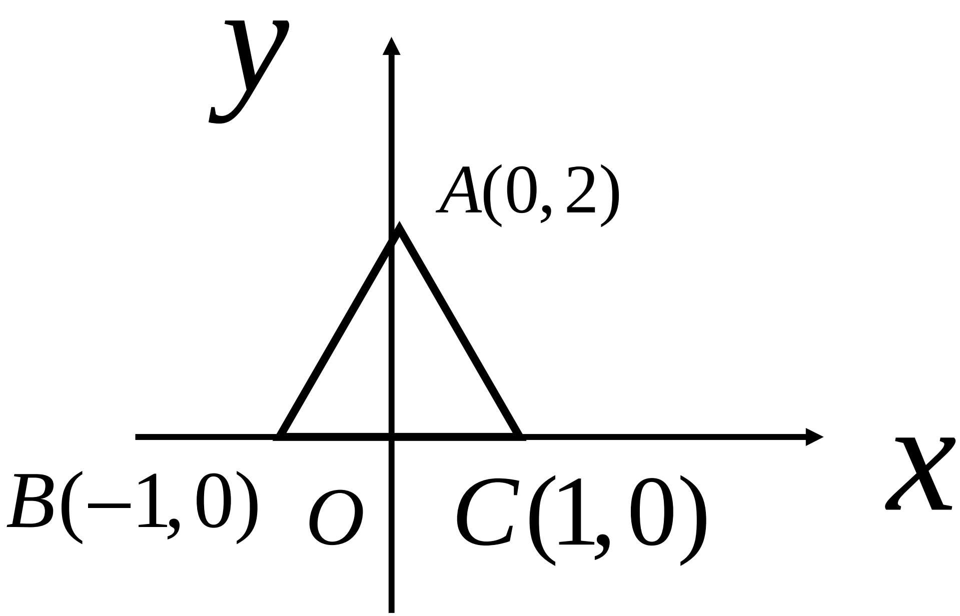
練習

次の1連の変形を一括して表す1つの行列を求めよ。

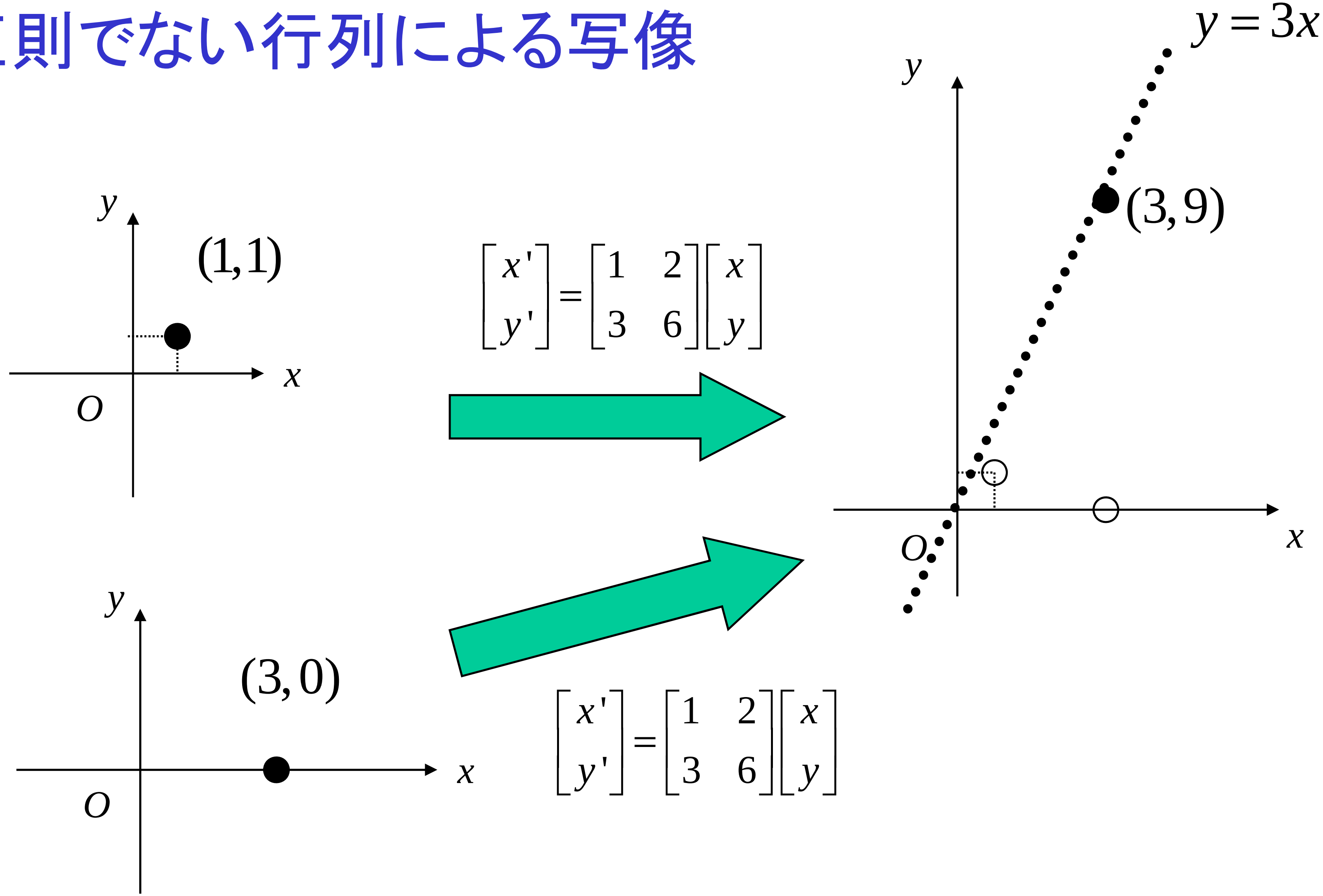


練習

一つ前の練習問題で求めた行列により、
次の図形がどのような図形に変換されるかをもとめよ。



正則でない行列による写像

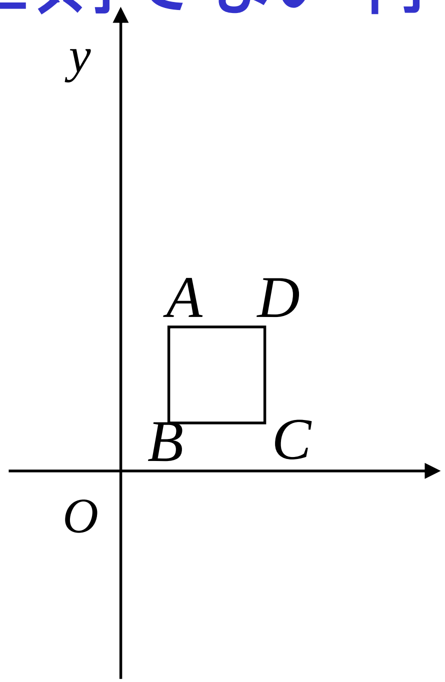


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

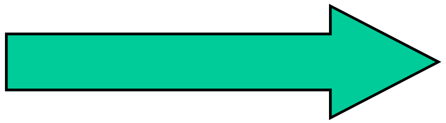
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

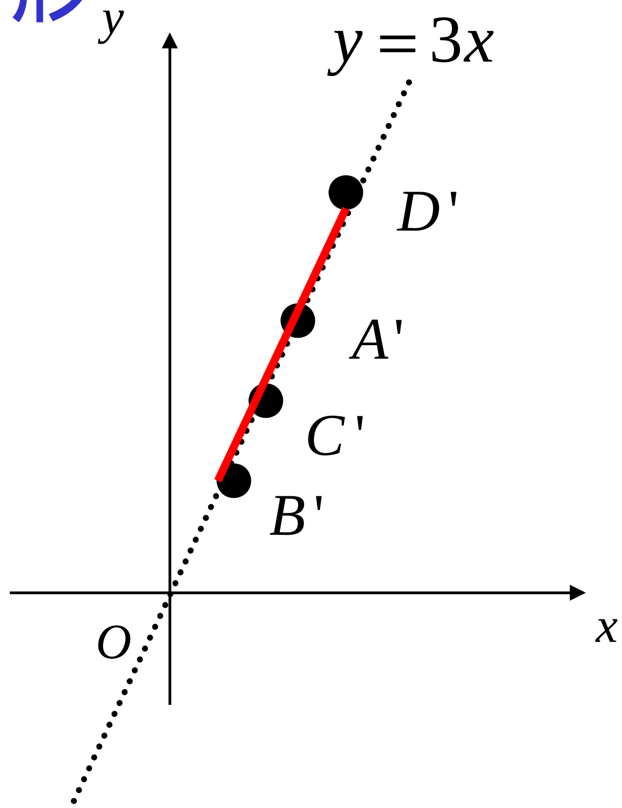
正則でない行列では、複数の点から一つの
点に写像される。

正則でない行列による図形の変形



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$





正則でない行列による写像を用いると、
図形は“つぶれる”。

練習

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ によって写像を表す。

以下の座標を持つ四角形ABCDに対して、
各頂点が上写像によって移される点の座標を
それぞれ求めよ。
また、それらの点が一直線上にあることを確かめよ。

$A(1,2)$

$B(1,1)$

$C(2,1)$

$D(2,2)$

線形写像

ここでは、行列によって表される写像の性質を調べる。

線形写像

定義(線形写像)

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が,
次の(1)、(2)を満たすとき、
f は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像であるという。

(1)任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$$

(2)任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と任意のスカラー $k \in \mathbb{R}$ に対して、

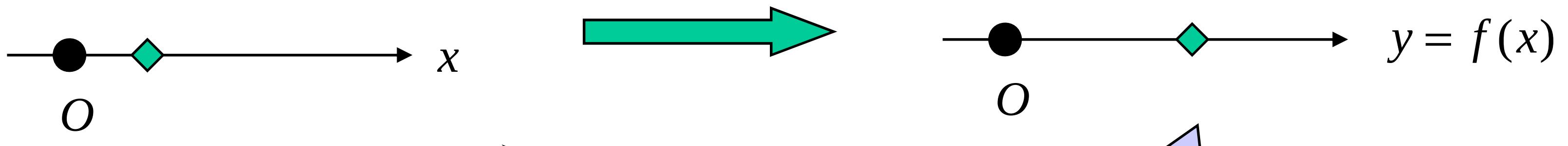
$$f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$$

正比例の拡張概念。
正比例は、$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の線形写像である。

線形写像例1

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=2x$$

写像元　　　　　　　　写像先



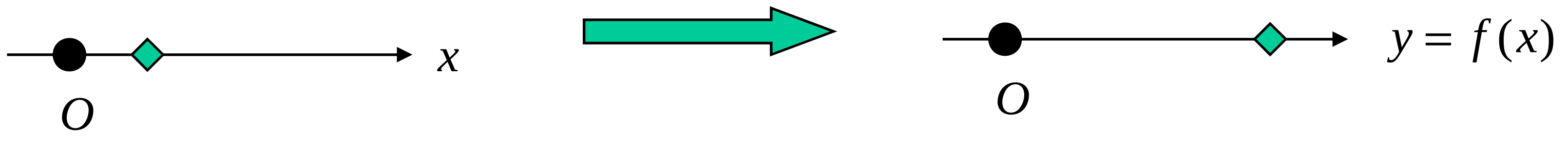
この2つをまとめて一つのグラフとして表すことも多い。実は、写像はきちんと図示できるものだけではない。

（1）
$$f(x_1+x_2)=2(x_1+x_2)$$
$$=2x_1+2x_2$$
$$=f(x_1)+f(x_2)$$

（2）
$$f(kx_1)=2(kx_1)$$
$$=k2x_1$$
$$=kf(x_1)$$

線形でない写像例１

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=x^2$$

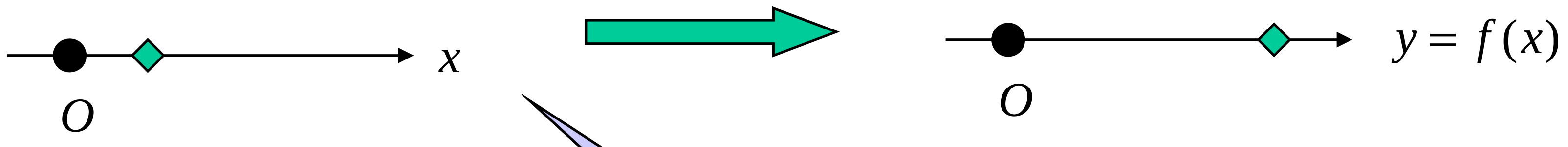


（１）

$$\begin{aligned} f(x_1+x_2) &= (x_1+x_2)^2 \\ &= x_1^{\;2}+2x_1x_2+x_2^{\;2} \\ &\neq x_1^{\;2}+x_2^{\;2} \\ &= f(x_1)+f(x_2) \end{aligned}$$

線形でない写像例２

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=x+1$$



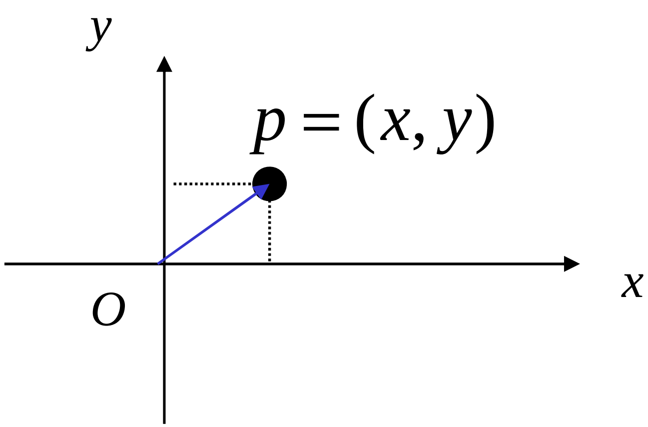
（２）

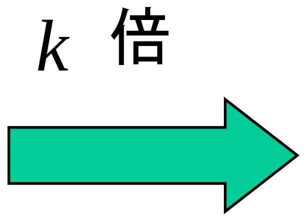
$$\begin{aligned} f(kx_1) &= (kx_1)+1 \\ &= kx_1+1 \\ &\neq kx_1+k \\ &= k(x_1+1) \\ &= kf(x_1) \end{aligned}$$

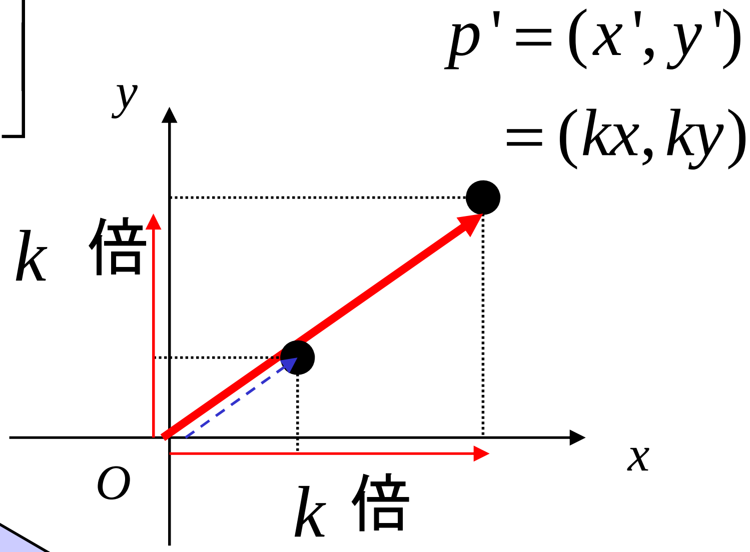
一つの図で、線形写像を表したときには、原点を通らなければならない。

線形写像例2

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$







（1）$f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)$

$$= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$$

$$= f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2)$$

（2）$f(k\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}_1)$

$$= k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$$

$$= kf(\boldsymbol{x}_1)$$

なお、写像　$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$　は、
（ $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$　のように）
一枚の図で表すことはできない。
よって、定義域中の要素と
値域中の要素の対応（関係）
だけに注目する。

線形写像例3

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$ が線形写像かどうか調べよ。

解）

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{R}$$

に対して、線形写像の条件を調べる。

（1）

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(a_1 + b_1) \\ (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) \end{bmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b_1 \\ b_1 + 2b_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(a_1 + b_1) \\ (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) \end{bmatrix}$$

$$\therefore f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$$

（2）

$$f(k\boldsymbol{a}) = f\left(k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2ka_1 \\ ka_1 + 2ka_2 \end{bmatrix}$$

$$kf(\boldsymbol{a}) = kf\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = k\begin{bmatrix} 2a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ka_1 \\ ka_1 + 2ka_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ f(k\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{a})$$

よって、線形写像である。

線形写像例4

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

行列の形（大きさ）から、
定義域の次元と、値域の次元
（の最大値）が直ちにわかる。

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

（1）

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 \\ &= f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) \end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{x}_1) &= \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}_1) \\ &= k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 \\ &= kf(\boldsymbol{x}_1) \end{aligned}$$

線形写像でない例３

$f:\mathbb{R}\to[0,1]$ 　　　$f(\alpha)=\sin\alpha,$

角度（ラジアン）から正弦（サイン）をもとめる関数（写像）。

（１）

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha+\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ &\neq \sin\alpha+\sin\beta \\ &= f(\alpha)+f(\beta) \end{aligned}$$

（２）

$$\begin{aligned} f(k\alpha) &= \sin(k\alpha) \\ &\neq k\sin\alpha \\ &= kf(\alpha) \end{aligned}$$

練習

次の写像が、線形写像かどうかを
答えよ。

（1）

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{f_1}{\mapsto} \begin{bmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 + 3 \end{bmatrix}$$

（2）

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \overset{f_2}{\mapsto} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

（3）

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{f_3}{\mapsto} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

（4）

$$f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{f_3}{\mapsto} \begin{bmatrix} e^{x_1 + x_2} \end{bmatrix}$$

正比例と線形写像

スカラー

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

正比例

スカラー

$$y = f(x) = ax$$

スカラー

$m \times n$　行列

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

n　項ベクトル

m 項ベクトル

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

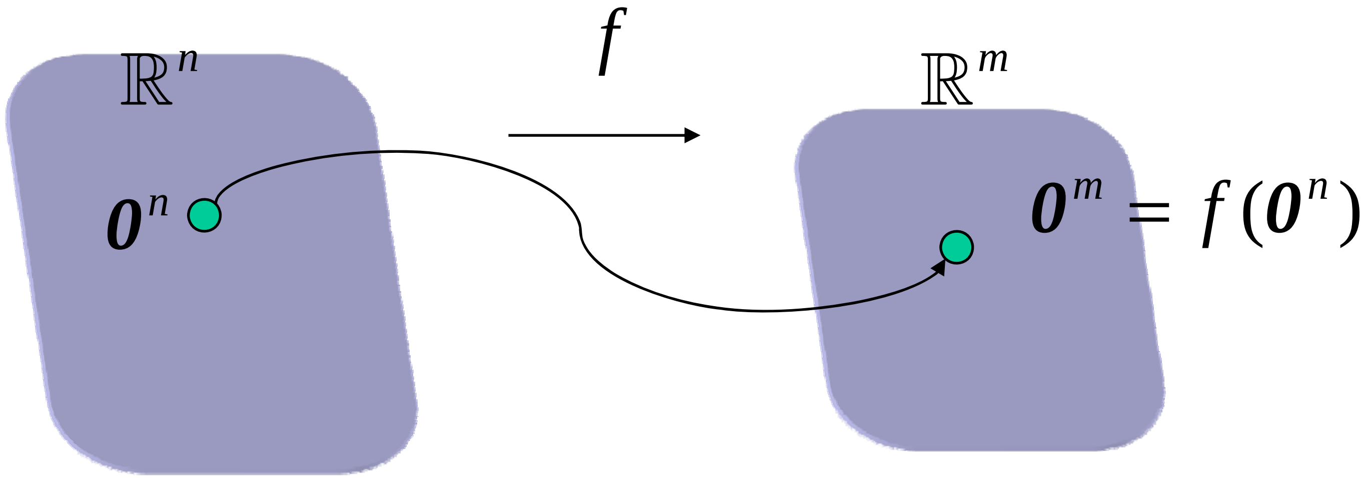
線形写像

線形写像の性質1

（線形写像と零元）

線形写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して、零元は、零元に移される。すなわち、

$$\boldsymbol{0}^m = f(\boldsymbol{0}^n)$$



証明略

線形写像の性質2

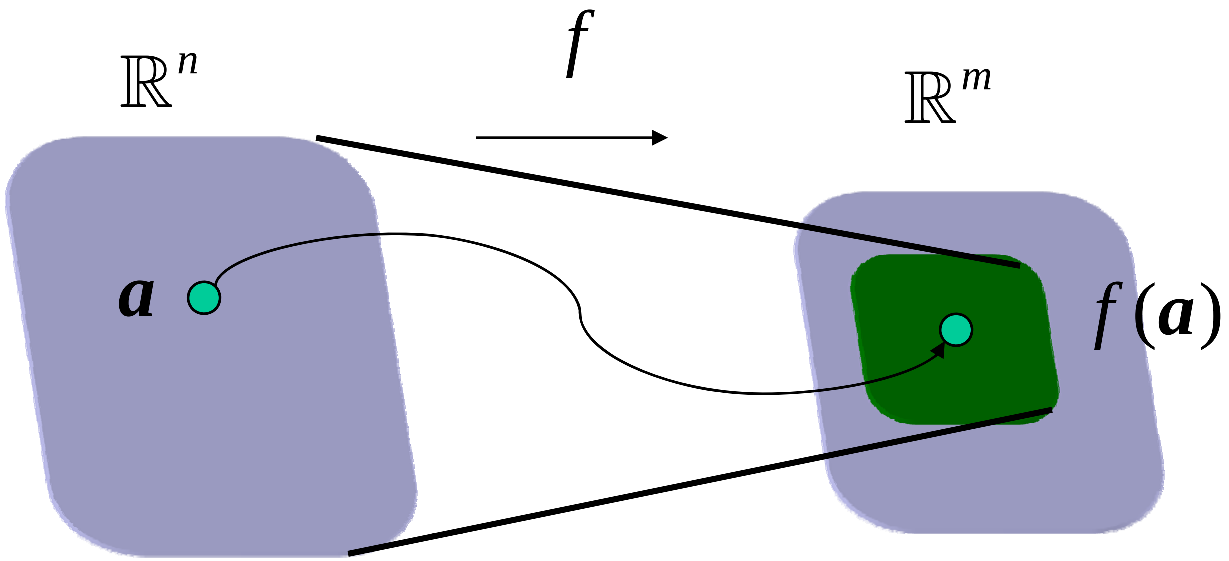
（線形写像と定義域の写像先）

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 f に対して、次の集合

$$f(\mathbb{R}^n)=\left\{ f(\boldsymbol{x})\in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^n \right\}$$

は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である。

定義域全体の移動先

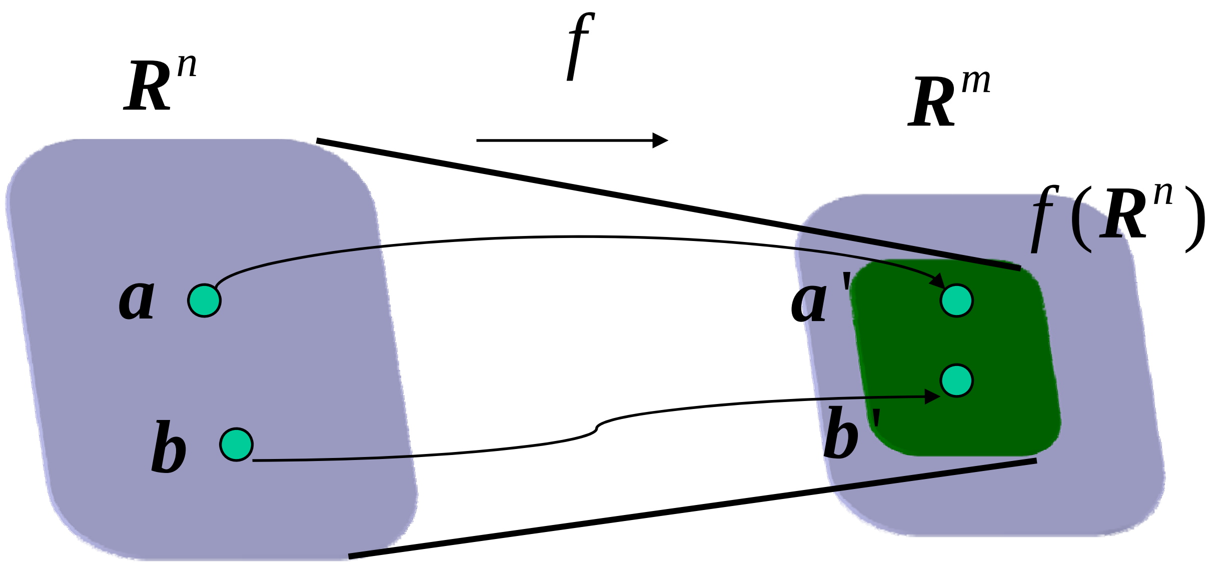


証明

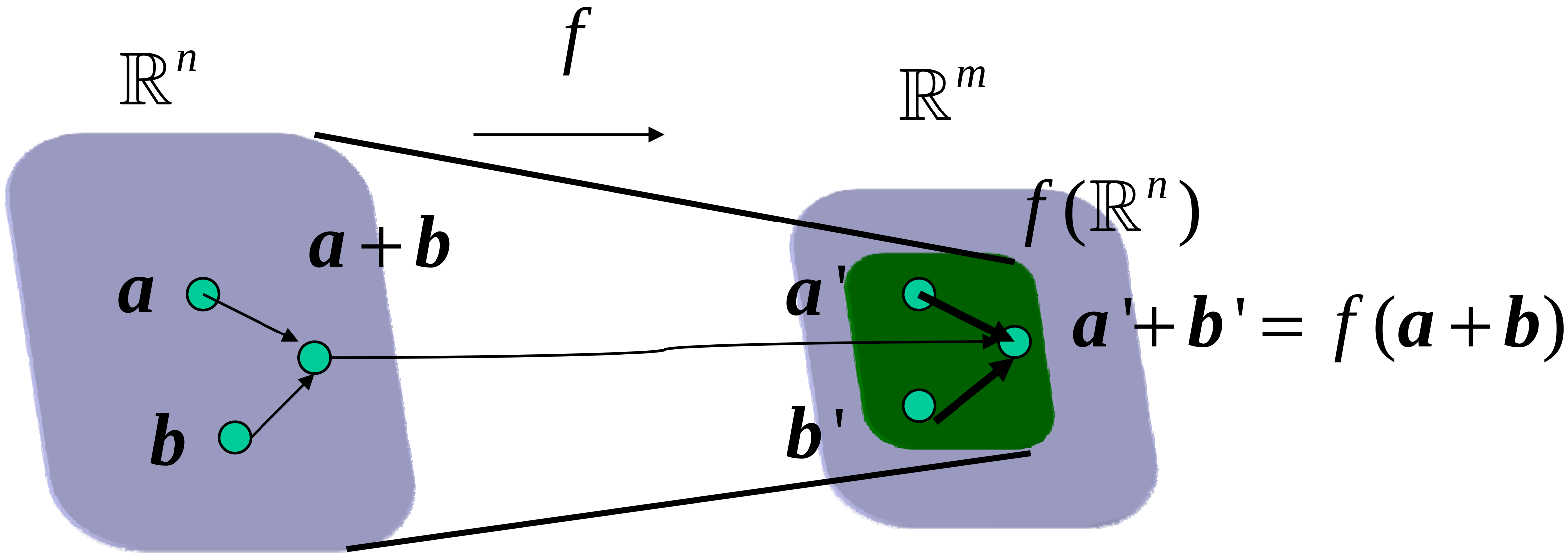
$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n, k\in\mathbb{R}$ に対して、線形写像の条件を調べる。

（1） $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'\in f(\mathbb{R}^n)\subseteq\mathbb{R}^m$ とすると、

$\boldsymbol{a}'=f(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{b}'=f(\boldsymbol{b})$ なる $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ が存在する。



$$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'=f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$



$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ なので、$\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'=f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\in f\left(\mathbb{R}^n\right)$

（２） $\boldsymbol{a}' = f(\boldsymbol{a}) \in f(\mathbb{R}^n), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ とすると、

$k\boldsymbol{a}' = kf(\boldsymbol{a}) = f(k\boldsymbol{a})$ と書ける。

$k\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ なので、$k\boldsymbol{a}' = kf(\boldsymbol{a}) = f(k\boldsymbol{a}) \in f\left(\mathbb{R}^n\right)$

以上より、和の公理とスカラー倍の公理を満たすので、
$\mathbb{R}^m$ の部分空間である。

$\mathcal{QED}$

像(Image)

定義(像)

線形写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して、部分空間 $f(\mathbb{R}^n)$ を f の像といい、

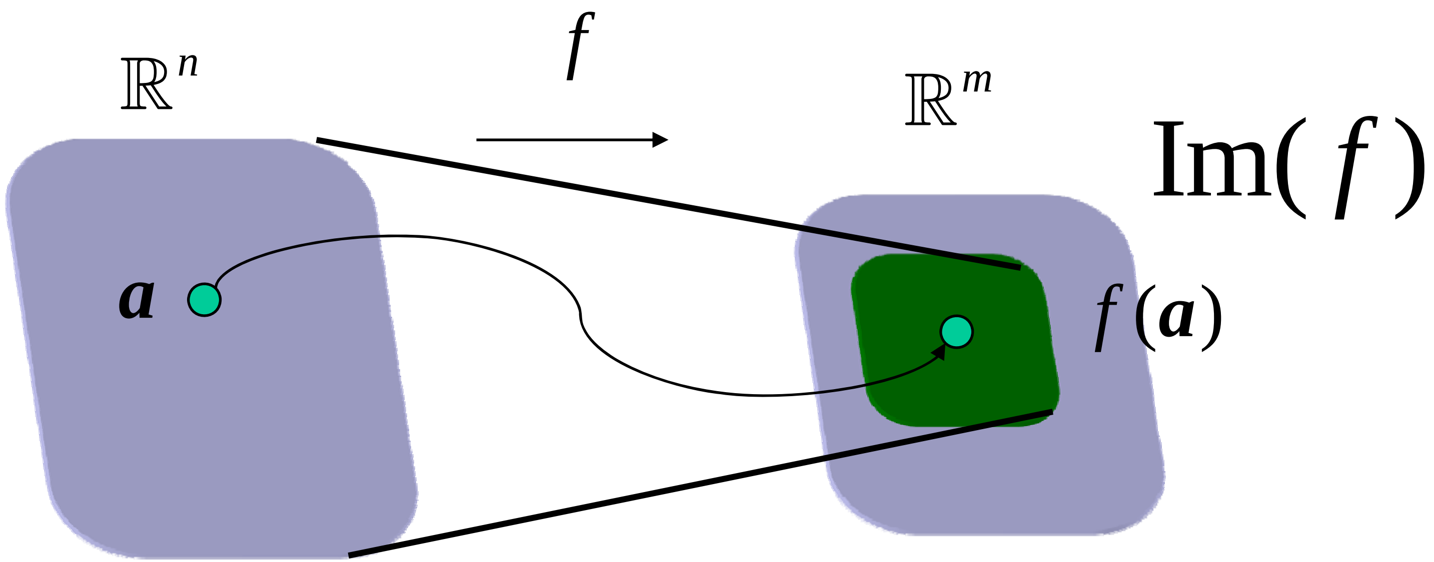
$$\mathrm{Im}(f)$$

と書く。 すなわち、

定義域全体の移動先

値域の部分集合(部分空間)

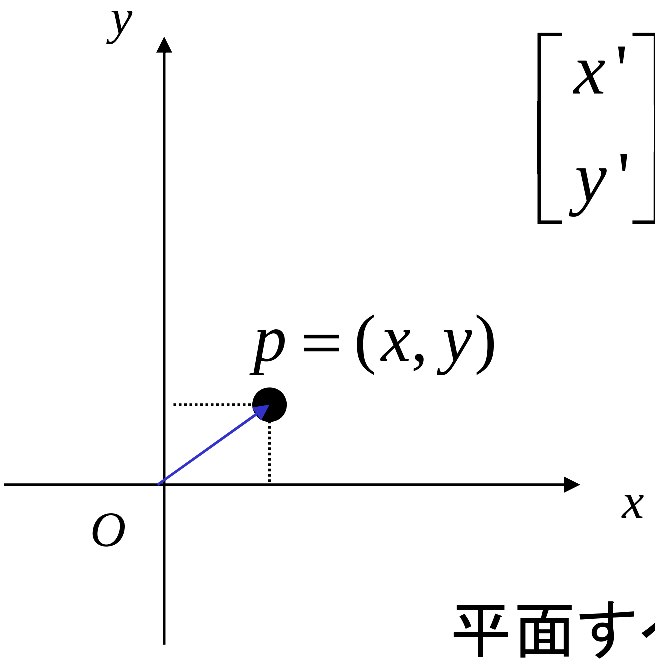
$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

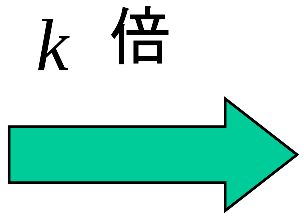


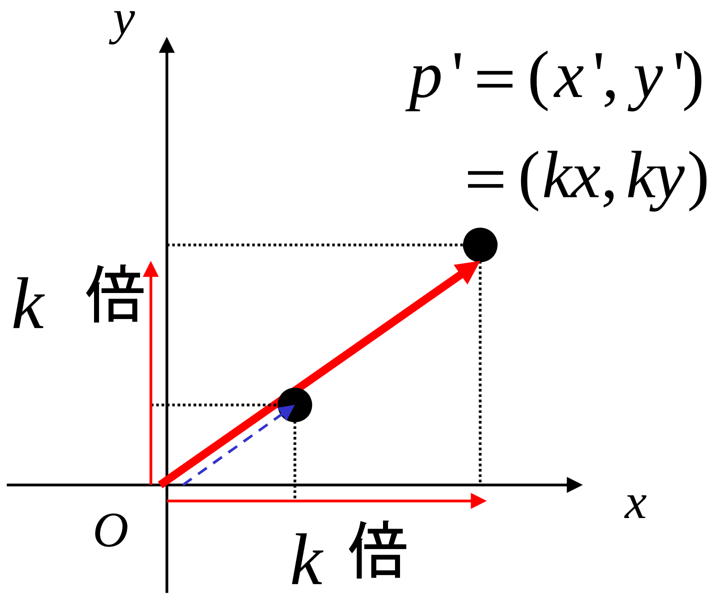
像の例1

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

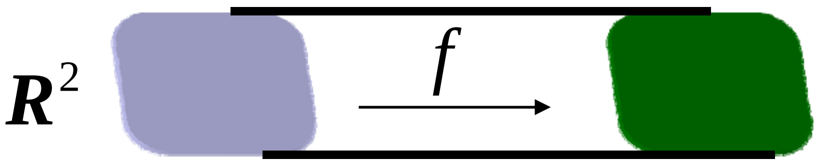






平面すべてに移される。

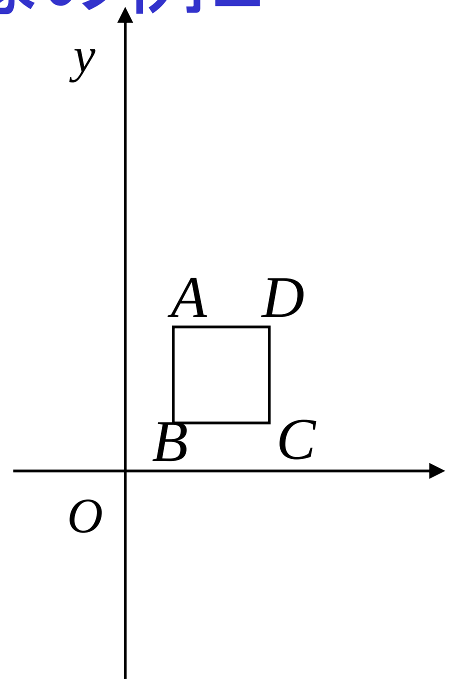
$$\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$$



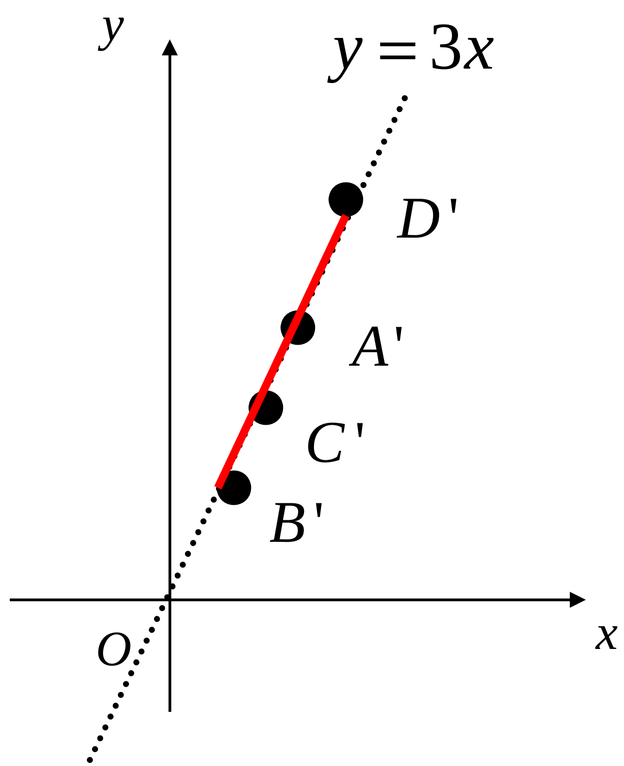
$\mathbb{R}^2=\mathrm{Im}(f)$

像の例2

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$



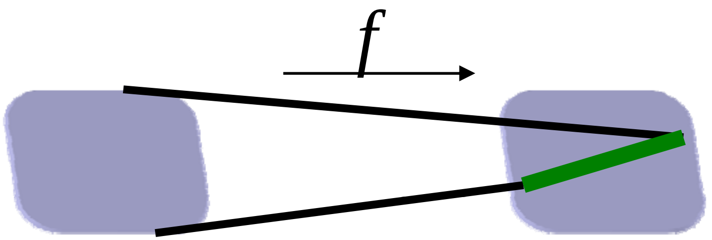
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



平面のすべての点は、直線上に移される。

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x,y) \mid y = 3x\}$$

$\mathbb{R}^2$



$\{(x,y) \mid y = 3x\}$

練習 次の写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ を求めよ。

（1）

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \overset{f_1}{\mapsto} \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（2）

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{f_2}{\mapsto} \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -9x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

線形写像の性質3

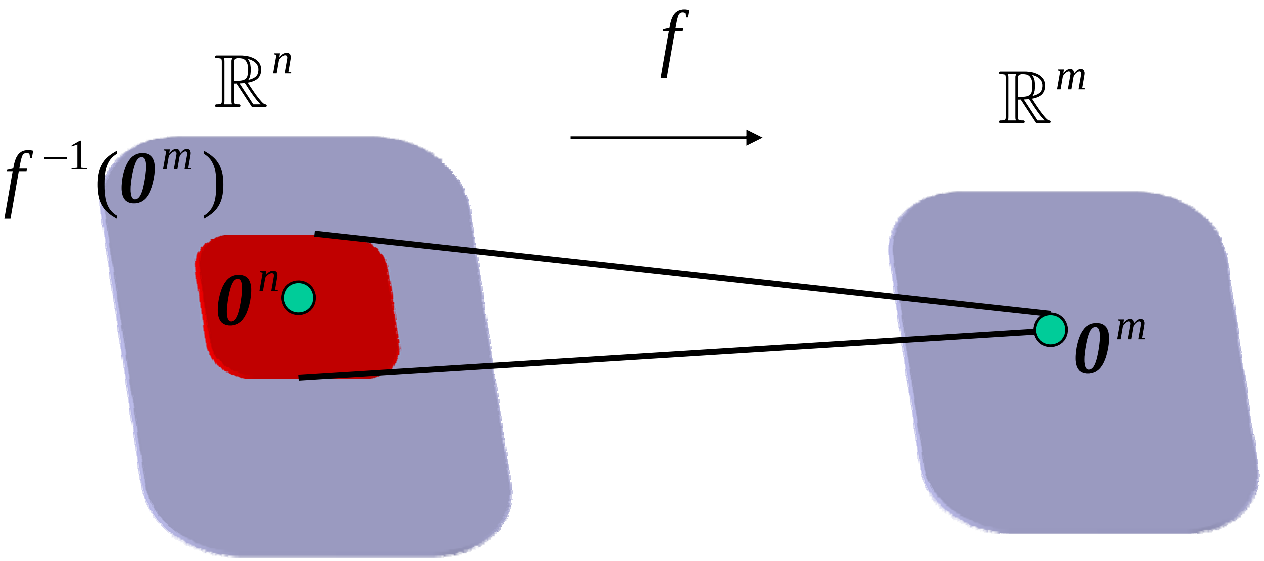
（0元への写像元）

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 f に対して、次の集合

$$f^{-1}(\boldsymbol{0}) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \right\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

原点に移される移動元



$\boldsymbol{0}^n \in f^{-1}(\boldsymbol{0}^m)$

証明

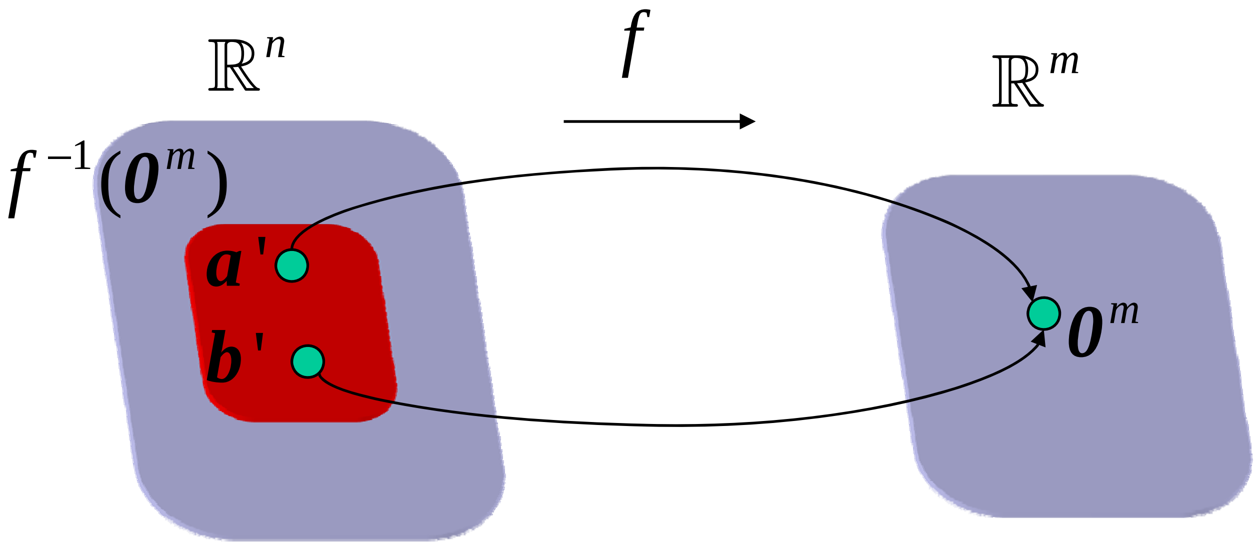
（1） $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}' \in f^{-1}(\boldsymbol{0}^m) \Rightarrow \boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}' \in f^{-1}(\boldsymbol{0}^m)$ を示す。

$\boldsymbol{0}^m = f(\boldsymbol{a}') = f(\boldsymbol{b}') \in \mathbb{R}^m$ とする。

このとき、線形写像の定義より、

$$f(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}') = f(\boldsymbol{a}') + f(\boldsymbol{b}') = \boldsymbol{0}^m + \boldsymbol{0}^m = \boldsymbol{0}^m$$

$$\therefore \boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}' \in f^{-1}(\boldsymbol{0}^m)$$



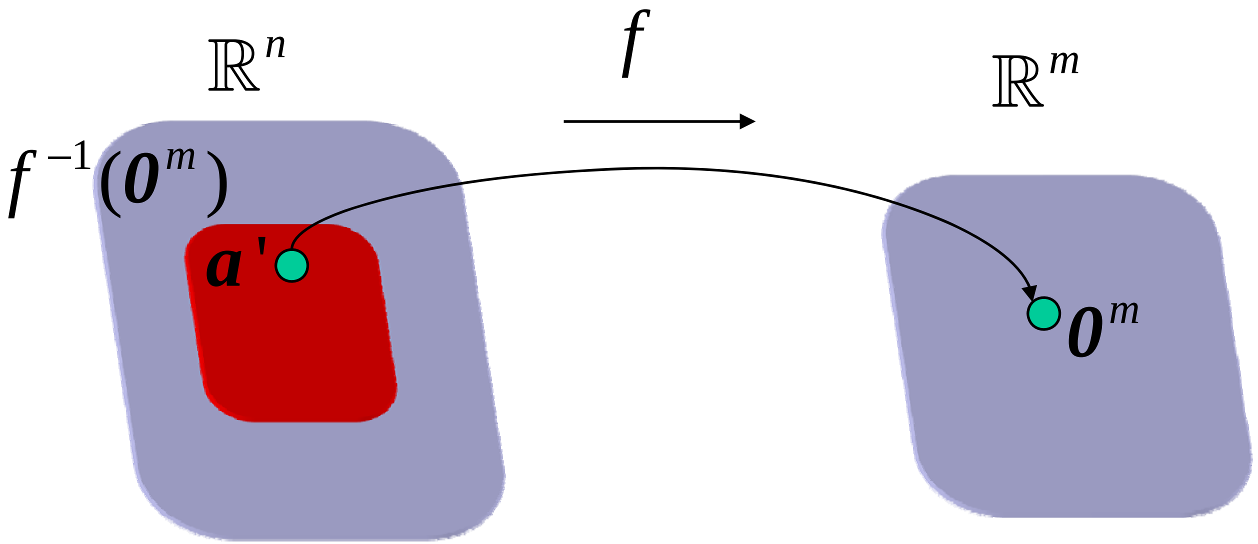
（2） $\boldsymbol{a}'\in f^{-1}(\boldsymbol{0}^m), k\in \boldsymbol{R} \Rightarrow k\boldsymbol{a}'\in f^{-1}(\boldsymbol{0}^m)$ を示す。

$\boldsymbol{0}^m = f(\boldsymbol{a}')\in \mathbb{R}^m$ とする。

このとき、線形写像の定義より、

$$f(k\boldsymbol{a}') = kf(\boldsymbol{a}') = k\boldsymbol{0}^m = \boldsymbol{0}^m$$

$$\therefore k\boldsymbol{a}'\in f^{-1}(\boldsymbol{0}^m)$$



$\mathcal{QED}$

核(Kernel)

定義(核)

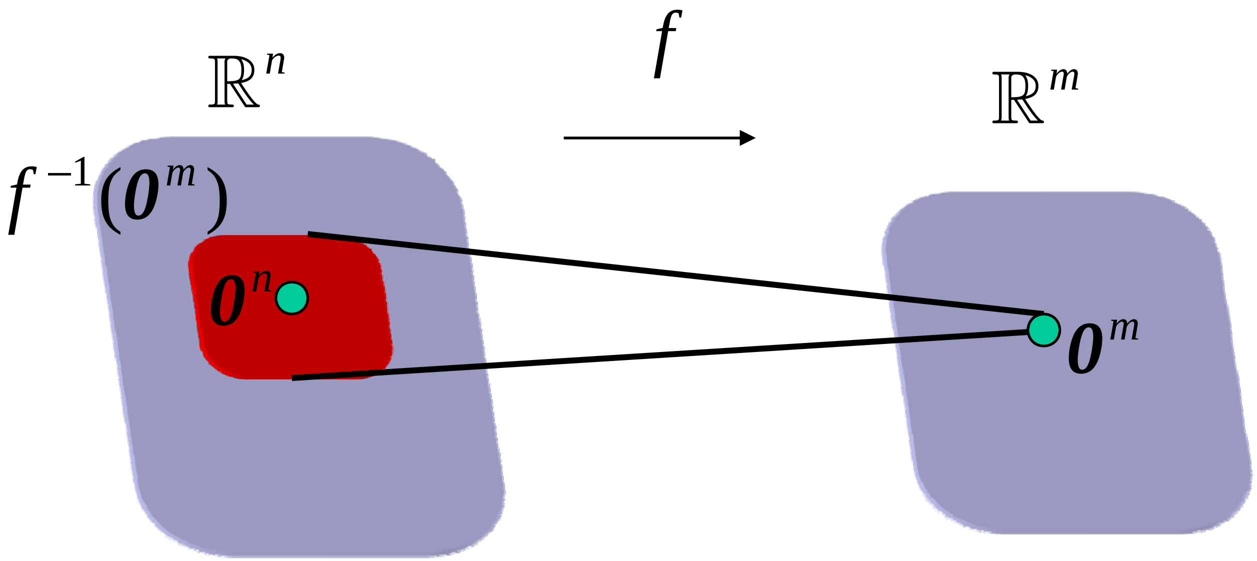
線形写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して、部分空間 $f^{-1}(\boldsymbol{0}^m)$を
f の核といい、

$$\mathrm{Ker}(f)$$

と書く。

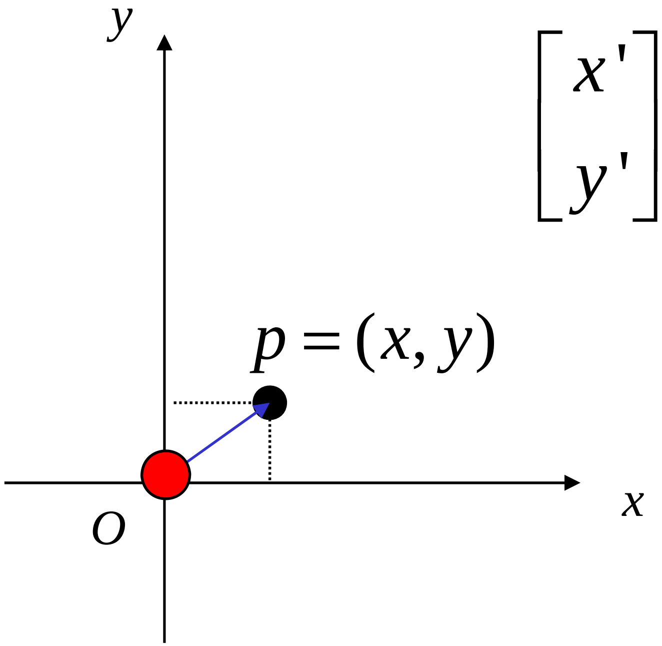
値域側の原点に移される移動元
定義域の部分集合(部分空間)

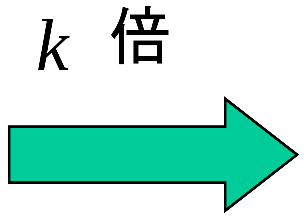
$$\mathrm{Ker}(f)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\right\}$$

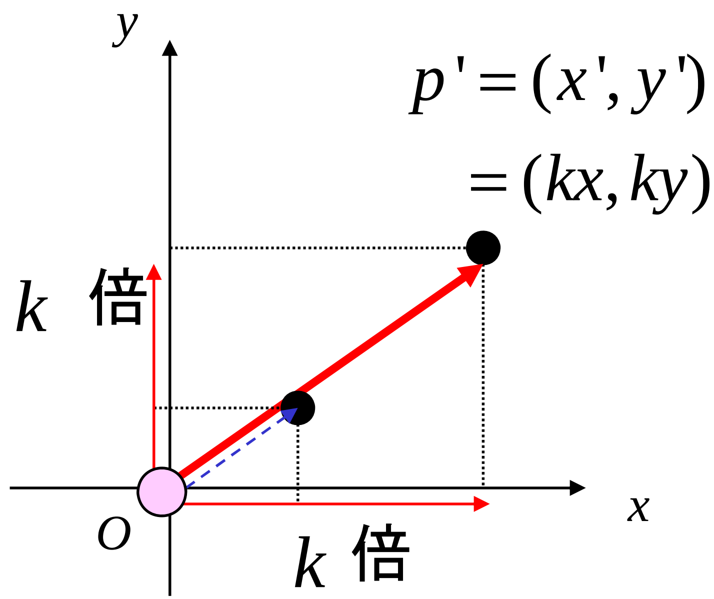


核の例１

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



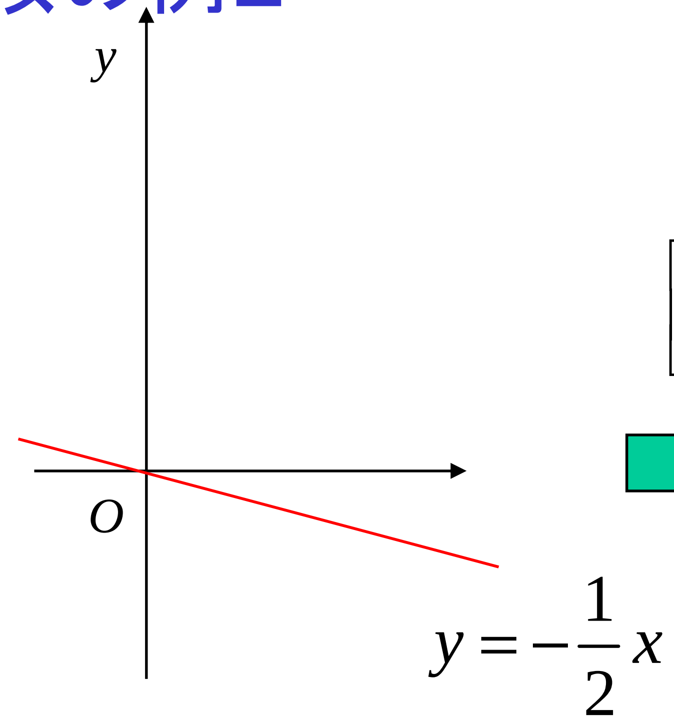




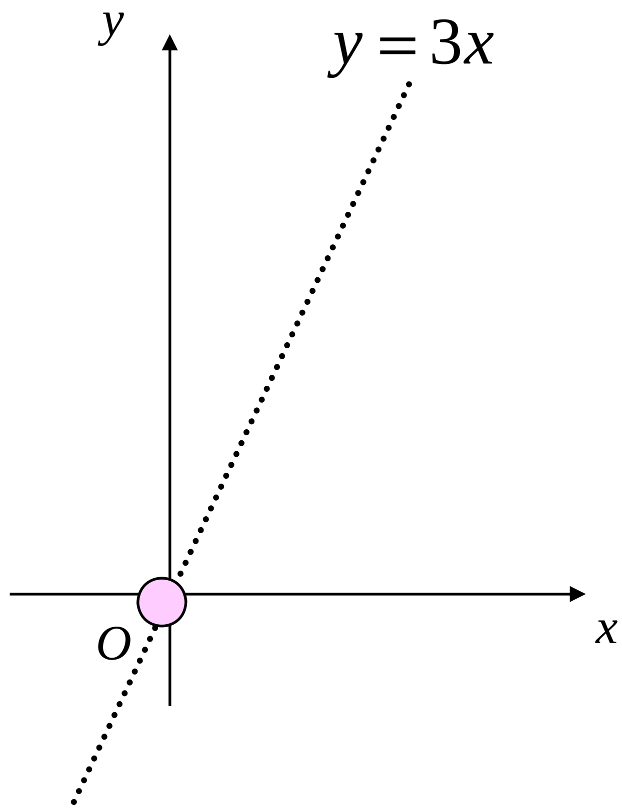
原点は原点からしか移されない。

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$$

核の例2



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



直線上の点が、原点に移される。

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ (x, y) \mid y = -\frac{1}{2}x \right\}$$

練習　次の写像 f の核 $\ker f$ を求めよ。

（1）

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \overset{f_1}{\mapsto} \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（2）

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{f_2}{\mapsto} \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -9x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

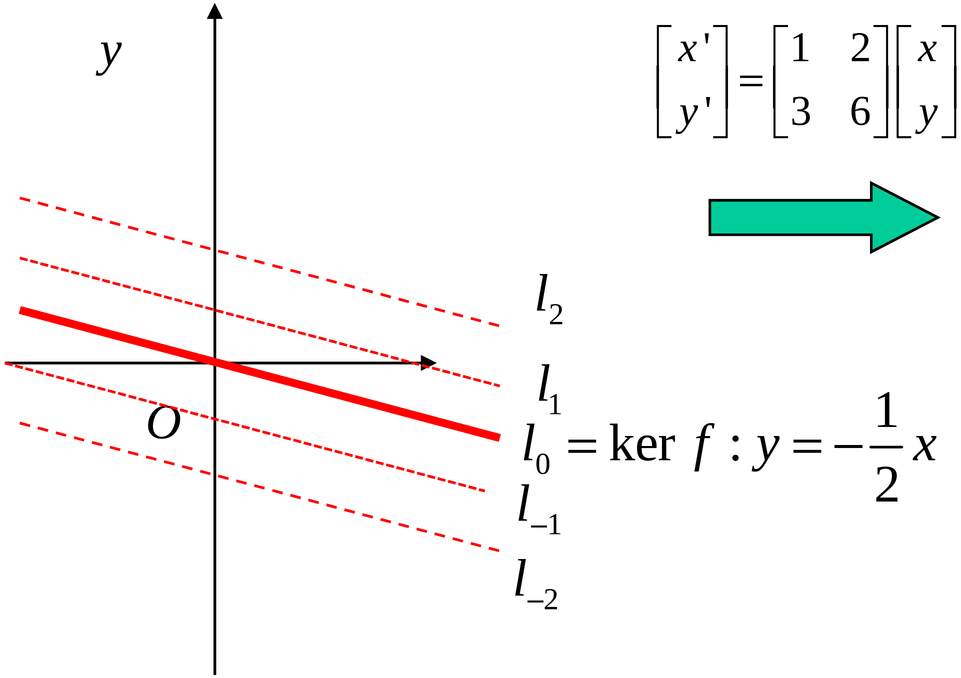
像と核の次元

定理：（次元定理）

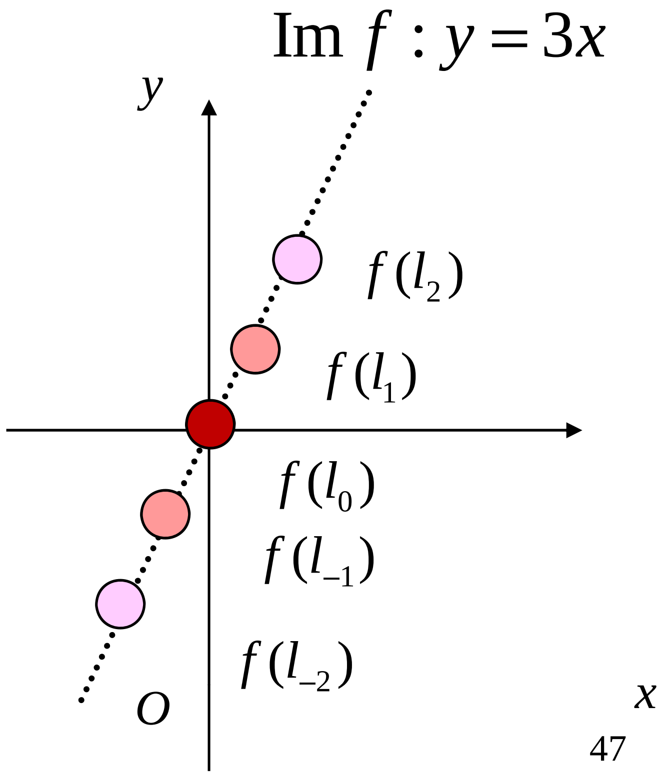
線形写像　$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して次式が成り立つ。

$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = n$$

証明略



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



例題　次の写像に関して、$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = n$
を確かめよ。

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \overset{f_1}{\mapsto} \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

解

$\mathrm{Im}\ f_1 = \mathbb{R}^2$ より、$\dim \mathrm{Im}\ f_1 = 2$

$\ker\ f_1 = \left\{ k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| \ k \in \mathbb{R} \right\}$ より、$\dim \ker\ f_1 = 1$

$$\therefore \dim \mathrm{Im}\ f_1 + \dim \ker\ f_1 = 3 = n$$

練習

次の写像に関して、$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = n$
を確かめよ。

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{f_2}{\mapsto} \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -9x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

線形写像と行列

定理（線形写像と行列）

（1） 線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ に対して、次式を満たす $m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_f$ が一意に決定できる。

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

（2） $m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、写像 $f_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を

$$f_A(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

で定めると、 f_A は線形写像である。

証明略

(線形写像の)表現行列

定義(表現行列)

線形写像 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ に対して、
$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_f$ を
f の表現行列という。

線形写像は、その表現行列がわかれば、
すべてがわかる。

線形写像と基底

性質：（線形写像と基底）

線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は、$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ の像

$$\{f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)\}$$

が決まれば、

任意の元 $a \in \mathbb{R}^n$ に対して、像

$$f(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^m$$

は、一意に特定される。

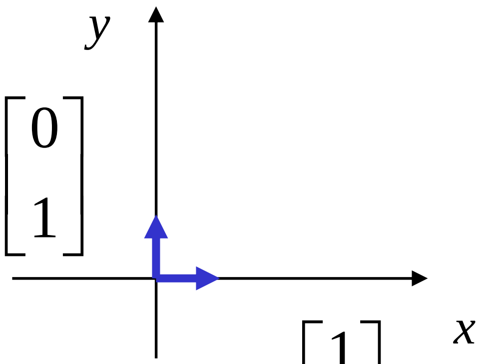
言い換えると、2つの線形写像 f, g が、$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ で同じ像をとれば、全く同じ写像になる。

線形空間の全体の像は、その線形空間の基底の像の一次結合により一意に特定される。
線形空間の要素は無数だが、基底は有限。

証明略。

標準基底の像と、空間全体の像

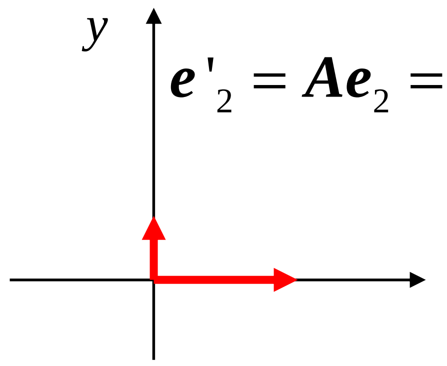
$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

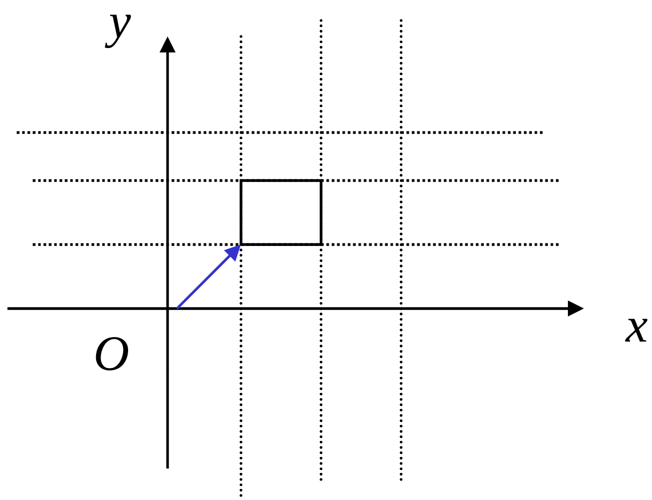
x 座標だけ
2 倍

$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

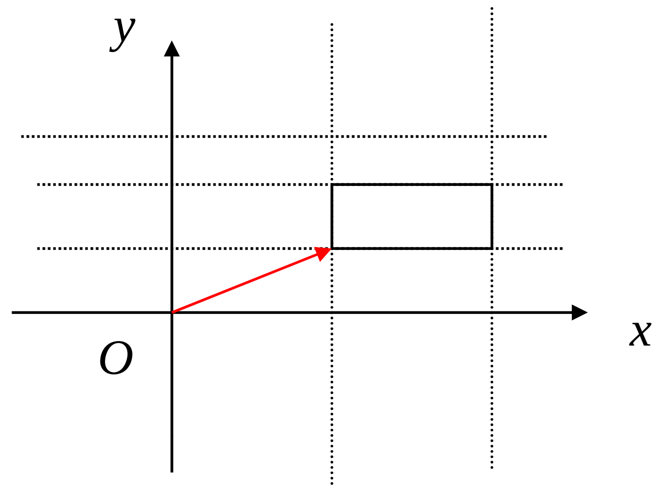


$$\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



x 座標だけ
2倍



基底の像と表現行列

性質（基底の像と表現行列）

線形写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して、$\boldsymbol{R}^n$ の
標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ の像を、

$$\{f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)\}$$

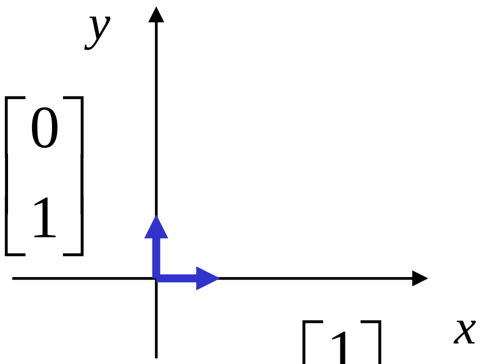
とする。このとき、 f の表現行列 $\boldsymbol{A}$ は、

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_n) \end{bmatrix}$$

と表せる。

証明略。

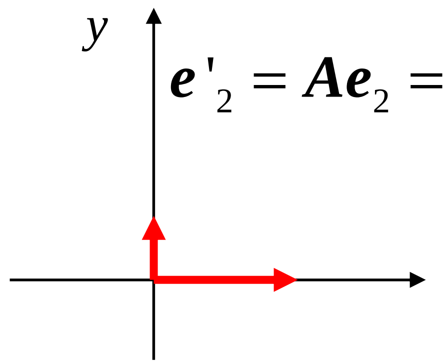
標準基底の像と、空間全体の像



$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

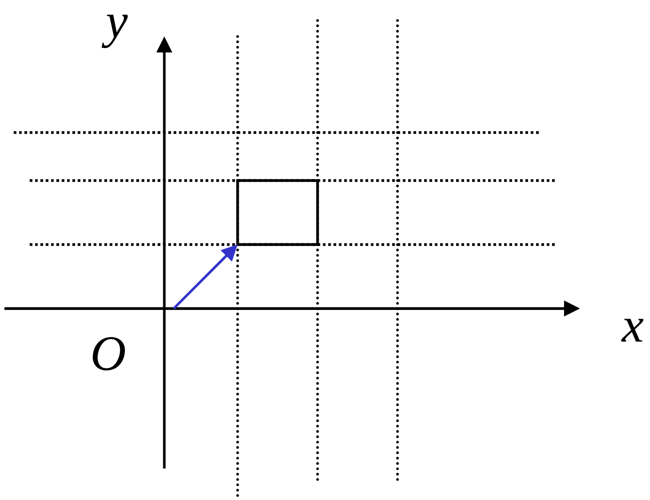
x 座標だけ
2 倍



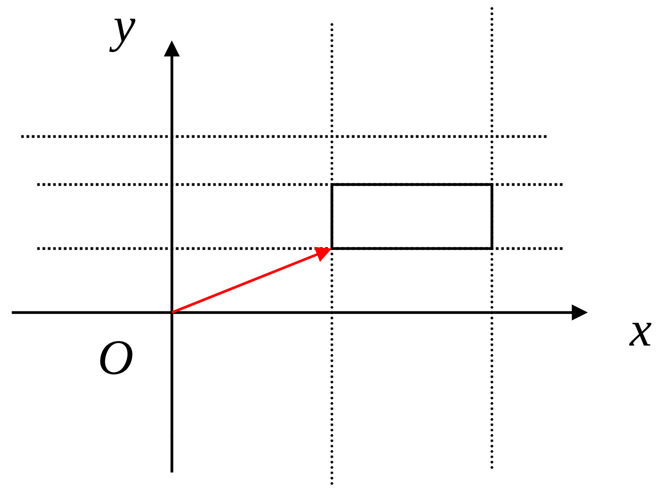
$$\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$



x座標だけ
2倍



例題

次の線形写像 $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して、表現行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

解） 写像より、

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

（別解）

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

より、

$$f(\boldsymbol{e}_1) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

練習　次の写像 f 表現行列を求めよ。

（1）

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \overset{f_1}{\longmapsto} \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（2）

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{f_2}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -9x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

表現行列と線形写像

性質（表現行列と線形写像）

表現行列が $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ であるような $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 f について次がなりたつ。

（1） $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^n) = L\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$

（2） $\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$

証明略

例題1 次の写像 f に関して、表現行列を $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ とする。このとき、

（1） $\mathrm{Im}(f) = L\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$

（2） $\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$

を確かめよ。

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

解）

（１）

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ より、

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2 = L\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

（２）

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^2 = 2$$

$$rank\boldsymbol{A} = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\therefore \dim \operatorname{Im} f = rank\boldsymbol{A}$$

合成写像と表現行列の積

性質（合成写像と表現行列の積）

２つの線形写像

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$$

の表現行列をそれぞれ、

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_f, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_g$$

とすれば、$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 型で、$\boldsymbol{B}$ は $l \times m$ 型である。

また、合成写像 $g \circ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ 表現行列を$\boldsymbol{C}$
とすれば、$\boldsymbol{C}$ は $l \times n$ 型であり、

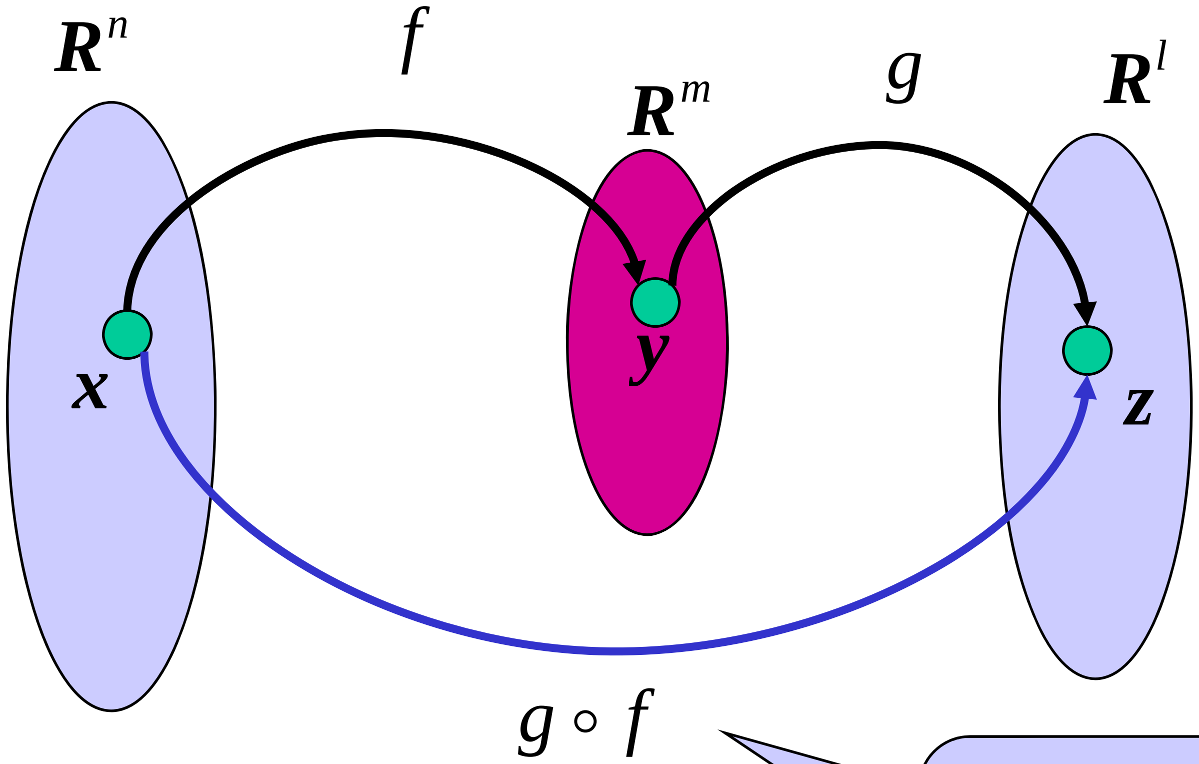
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$$

と表せる。

証明略

イメージ

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{bmatrix} = \boldsymbol{z} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{bmatrix} = \boldsymbol{z} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$g \circ f(\boldsymbol{x}) = g\left(f(\boldsymbol{x})\right)$

と覚えればよい。