

## 6. 低次元の行列式とその応用

1

## 行列式とは

行列式(determinant)とは、**正方行列**の特徴を表す一つのスカラーである。すなわち、行列式は正方行列からスカラーに写す写像の一種とみなすこともできる。

$$\det : \mathbf{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$A \mapsto \det(A)$$

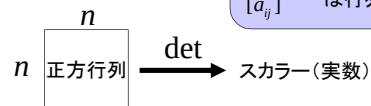
$n \times n$  の行列(matrix)に対する行列式を、 **$n$  次の行列式**という。

行列  $A$  の行列式を

$$|A|$$

とも表す。

行列式と行列の記号の違いに注意すること。  
 $|A|$  は行列式、  
 $[a_{ij}]$  は行列。



2

## 1 次の行列式

定義(一次の行列式)

$1 \times 1$  行列  $A = [a]$  の行列式  $|A|$  は次式で定義される。

$$|A| = a$$

$$\det(A) = a$$

記号は絶対値と同じだが、意味は別。  
 行列式は負の値も取りえる。

3

## 2 次の行列式

定義(2次の行列式)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

このとき、 $A$  の行列式  $|A|$  は次式で定義される。

$$|A| = ad - bc$$

行列式は、次のように書かれることもある。

$$\det(A) = ad - bc$$

$|A|$  の求め方



乗算して符号が正

乗算して符号が負

$$|A| = ad - bc$$

4

## 2元1次連立方程式から2次の行列式へ

$$\begin{cases} ax + by = k \cdots (1) \\ cx + dy = l \cdots (2) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$$

消去法によって、 $x, y$  を求める。

$$\begin{aligned} (1) \times d - (2) \times b & \quad (2) \times a - (1) \times c \\ (ad - bc)x + (bd - bd)y = kd - bl & \quad (ac - ac)x + (ad - bc)y = la - kc \\ \therefore (ad - bc)x = kd - bl & \quad \therefore (ad - bc)y = al - kc \end{aligned}$$

$(ad - bc)$  の部分が共通に現れた。  
 このスカラーが0以外であれば、  
 一意に解が存在する。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \quad \text{とすると都合が良い。}$$

5

## 2元連立一次方程式の解

$$(ad - bc)x = kd - bl$$

似ている。  
 実は、 $a$  を  $k$  に  
 $c$  を  $l$  に  
 置き換えただけ。

$x$  に対応する列ベクトルを定  
 数項ベクトルに置き換える。

$y$  に対応する列ベ  
 クトルを定数項ベク  
 トルに置き換える。

$y$  についても同様に考察できる。

よって、

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0 \text{ のとき、 } \therefore x = \frac{\begin{vmatrix} k & b \\ l & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & k \\ c & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

(この方法を**クラメールの解法**という。)

6

例題

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + y = -2 \end{cases}$$

解) まず、行列で記述する。

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

係数行列の行列式を求める。

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - (-3) \times 4 = 2 + 12 = 14 \neq 0$$

よって、解が一意に定まる。

$$x = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{14} (5 - 6) = -\frac{1}{14}$$

$$y = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{14} (-4 - 20) = -\frac{24}{14} = -\frac{12}{7}$$

7

練習

クラメルの法を用いて次の連立方程式を解け。

(1)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

8

3元1次連立方程式から3次の行列式へ？

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases}$$

これを文字だけで解くことは大変です。  
しかし、クラメルらによって一般的な解が見つけられています。  
行列式は、その解が表現できるように定義されています。  
高次元の行列式は、定義自体も複雑です。  
まず、3次元の行列式の定義からみていきます。

9

3次の行列式の定義

定義(3次の行列式)

3次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

に対して、その行列式は、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

と定義される。

10

3次の行列式の覚え方(サラスの公式)

乗算して符号が正

乗算して符号が負

11

例

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 45 + 56 + 144 - 24 - 80 - 189 = -48$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc + abc + abc - a^3 - b^3 - c^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

12

練習

次の行列式の値を求めよ。

(1)  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

(2)  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

(3)  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(4)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

13

3元1次連立方程式に対するクラメールの解法

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

の連立方程式は、行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

のときに次のような解を持つ。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

14

例

次の連立方程式をクラメールの方法で解く。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 22 \\ 2x + 3y - 4z = -8 \\ 3x + 5y + z = 24 \end{cases}$$

解)

まず係数行列の行列式を求める。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + (-24) + 30 - (-20) - 4 - 27 = 9 - 11 = -2 \neq 0$$

よって、解が一意に定まる。

15

各列ベクトルを定数項ベクトルと置き換えて、行列式を求める。

$$\begin{vmatrix} 22 & 2 & 3 \\ -8 & 3 & -4 \\ 24 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 66 + (-196) + (-120) - (-440) - (-16) - (216) = -6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 22 & 3 \\ 2 & -8 & -4 \\ 3 & 24 & 1 \end{vmatrix} = (-8) + (-264) + 144 - (-96) - 44 - (-72) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 22 \\ 2 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & 24 \end{vmatrix} = 72 + (-48) + 220 - (-40) - 96 - 198 = -10$$

よって、

$$x = \frac{-6}{-2} = 3, \quad y = \frac{-4}{-2} = 2, \quad z = \frac{-10}{-2} = 5$$

16

練習

クラメールの方法により、次の方程式を解け。

(1)  $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \end{cases}$

(2)  $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

17

ベクトル

定義(ベクトル)

“向き”と“大きさ”を持つ量をベクトルという。

大きさ  $\|a\|$

向き

$a$

低次元のベクトルは矢印を用いて表現可能

18

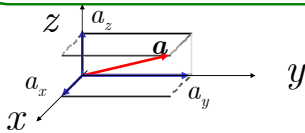
## 空間ベクトル

## 定義(空間ベクトル)

空間中のベクトルを**空間ベクトル**という。  
空間ベクトルは、3つのスカラーを用いて、  
表現できる。

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \in R^3 \text{ あるいは } b = (b_x, b_y, b_z) \in R^3 \text{ と表現できる。}$$

$3 \times 1$  行列(3次元ベクトル)あるいは  
 $1 \times 3$  行列(3次元ベクトル)を空間ベクトルという。



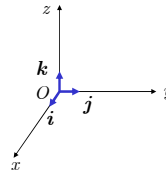
19

## 空間の単位ベクトル

応用の分野では、 $x, y, z$  の軸方向の単位ベクトルを  
 $i, j, k$  であらわす。

すなわち、

$$i = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, j = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k = e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



単位ベクトルは、座標の  
基準となるベクトル

20

## 内積

ここでは、低次元空間における内積の定義を示す。

## 定義(3次元ベクトルの内積)

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in R^3 \text{ に対して、}$$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

をベクトル  $a$  とベクトル  $b$  の**内積**といい、

$$a \cdot b \text{ あるいは } (a, b)$$

と表す。

内積は、  
同じ成分同士の  
積和であり、  
 $n$  次元ベクトル  
に拡張できる。

$$a \cdot b = b \cdot a$$

このように内積の演算結果はスカラーになるので、  
内積を**スカラー積**と呼ぶこともある。

21

## 転置による内積の表現

## 性質:(転置によるベクトルの内積表現)

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in R^3 \text{ に対して、次が成り立つ。}$$

$$a \cdot b = {}^t a b$$

証明

$${}^t a b = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{bmatrix} = a \cdot b$$

QED 22

## ベクトルのノルム

## 定義:(3次元ベクトルのノルム)

ベクトル  $a$  に対して、スカラー

$$\sqrt{a \cdot a}$$

をベクトル  $a$  の**ノルム(大きさ、長さ)**といい、

$$\|a\|$$

という記号で表す。すなわち、

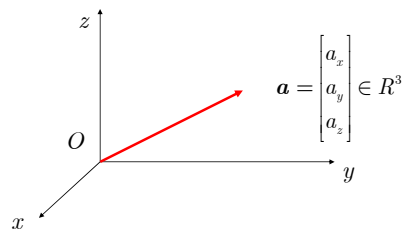
$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \in R^3 \text{ に対して、}$$

$$\|a\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

である。

23

## ベクトルのノルムの幾何学的関係



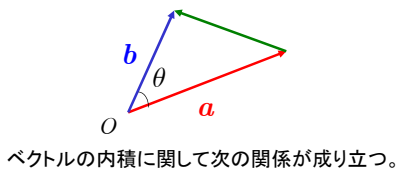
$$\|a\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

3平方の定理より、空間ベクトルのノルムは、  
ベクトルの大きさを意味している。

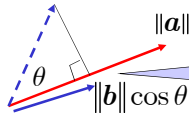
24

## 内積の幾何学的関係

性質: (内積の幾何学的表現)



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$



方向が同じベクトルは  
スカラー同士の掛け算  
になる。

25

## 直交ベクトル

定義(直交ベクトル)

2つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  の内積が0、すなわち、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

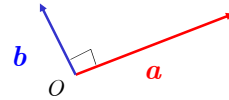
であるとき、

2つのベクトルは直交しているという。

このとき、2つのベクトルのなす角度  $\theta$  は

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

である。



26

## 外積

3次元ベクトル同士では、  
外積という演算が定義できる。

3次元空間は現実の空間であり、  
応用上重要な演算である。

外積の演算結果はベクトルであり、  
ベクトル積とも呼ばれる。

なお、外積が定義できるのは、  
3次元ベクトル同士だけであるので注意すること。

27

定義(3次元ベクトルの外積)

 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  に対して、ベクトル

$$\begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

外積は、  
演算結果が  
3次元ベクトル

をベクトル  $\mathbf{a}$  とベクトル  $\mathbf{b}$  の外積といい

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

外積は交換  
不可

と表す。

28

## 3次の行列式を用いた外積の計算法

 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \mathbb{R}^3$  に対して、外積は、

3次の行列式の記号を援用して

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$$

行列式はスカラーであるので、これは行列式ではない。しかし、記号的には覚えるのに便利である。外積がベクトルであることに注意して、この表現を利用するとよい。

29

 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \mathbb{R}^3$  に対して、外積は、

3次の行列式の記号を援用して

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

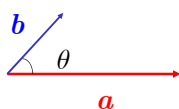
$$= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$$

行列式はスカラーであるので、これは行列式ではない。しかし、記号的には覚えるのに便利である。外積がベクトルであることに注意して、この表現を利用するとよい。

30

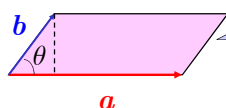
## 外積のノルム

性質: (外積のノルム(大きさ))



ベクトルの外積に関して、次の式が成り立つ。

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \theta$$

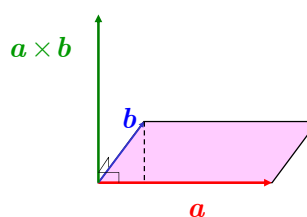


外積のノルムはこの平行4辺形の面積である。

31

## 外積の幾何学的性質

性質: (外積の幾何学的性質(外積の向き))

外積のベクトルは、右ねじの方向に、ベクトル  $a$  とベクトル  $b$  で生成される平面に直交する。

32

## 例題

外積を利用して、次の2つのベクトルと直交するベクトルを求めよ。

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

解)

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (12-15)i + (12-6)j + (5-8)k = -3i + 6j - 3k$$

よって、

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

33

## 練習

2つのベクトルと直交するベクトルを求めよ。

$$(1) \quad a = (2, 1, 3) \quad b = (-1, 2, -1)$$

$$(2) \quad a = (1, -1, -1) \quad b = (4, 1, 3)$$

$$(3) \quad a = (-2, 0, 1) \quad b = (4, 2, 0)$$

34

## 例2

外積を利用して、次の3点を頂点とする3角形の面積を求めよ。

$$A(2, 1, 1), B(3, -1, 1), C(4, 1, -1)$$

解)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ -1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 4-2 \\ 1-1 \\ -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4i + 2j - 4k$$

面積は、

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36} = 3$$

と求められる。

35

## 練習

外積を利用して、次の3点を頂点とする3角形の面積を求めよ。

$$(1) \quad A(1, 2, 1), B(2, 1, -1), C(3, 4, 2)$$

$$(2) \quad A(3, -1, 2), B(2, -2, 1), C(3, 5, -1)$$

36

外積の性質

外積は、次のような性質を満足する。

性質: (外積の演算規則)

$a, b, c \in R^3$  を3次元実数ベクトルとし、 $k \in R$  をスカラー(実数)とする。このとき、以下が成り立つ。

(1)  $a \times b = -b \times a$

交換したら符号反転。特に、外積は交換不可

$a \times b \neq b \times a$

(2)  $(ka) \times b = a \times (kb) = k(a \times b)$

スカラーの抜き出し

(3)  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

分配法則

37

平行6面体の体積とスカラー3重積

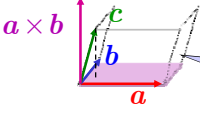
定義(スカラー3重積)

3次元の3つのベクトル  $a, b, c \in R^3$  に対して、スカラー  $(a \times b, c) = (a \times b) \cdot c$  をベクトル  $a, b, c$  のスカラー3重積という。

3つのベクトル  $a, b, c$  を辺とするような平行6面体の体積は、 $|(a \times b) \cdot c|$  に等しい。

ベクトルの向きで、負の値になることがある。ただし、大きさは等しい。

$c$  と  $a \times b$  のなす角度を  $\theta$  とすると、平行6面体の高さは  $\cos \theta$  と表せる。



38

行列式によるスカラー3重積の表現

性質: (スカラー3重積の行列式表現)

$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \in R^3$  に対して、

スカラー3重積は、

$$(a \times b, c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

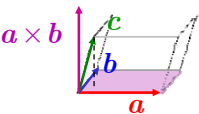
と計算できる。

39

練習

次のベクトルで構成される平行6面体の体積を求めよ。

$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



40