4. 行列の基本変形とその応用

行列の行基本変形

連立一次方程式の解法と行列の行基本変形

連立一次方程式の加減法による解法を考察する。

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots(1) \\ 3x - y = 7 & \cdots(2) \end{cases}$$

$(1) + (2)$

$$5x = 10$$

式を減らすと、
逆方向の計算
ができない。

同値な変形ではない。

同値な変形

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots(1) \\ 3x - y = 7 & \cdots(2) \end{cases}$$

式を減らさずに
変形する。

$(2)' = (1) + (2)$

$(2) = (2)' - (1)$

$$\begin{cases} 2x \quad +y & = 3 & \cdots(1) \\ 5x & = 10 & \cdots(2)' \quad = (1) + (2) \end{cases}$$

同値な変形

同値な変形による連立一次方程式の解法

$$\begin{cases} 2x & +y & = 3 \\ 3x & -y & = 7 \end{cases}$$

式の加算

$$\begin{cases} 2x & +y & = 3 \\ 5x & & = 10 \end{cases}$$

式のスカラー倍

$$\begin{cases} 2x & +y & = 3 \\ x & & = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x & +y & = 3 \\ 2x & & = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} & y & = -1 \\ 2x & & = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} & y & = -1 \\ x & & = 2 \end{cases}$$

式の交換

$$\begin{cases} x & & = 2 \\ & y & = -1 \end{cases}$$

3種類の同値変形1

I: ある式をスカラー倍（ $k \ (k \neq 0)$ 倍）する。

II: ある式を他の式に加えたり、引いたりする。

III: ２つの式を交換する。

これでもいいのだが、通常は、
IとIIを組み合わせたものを
II' とすることが多い。

3種類の同値変形2

定義(連立一次方程式の同値変形)

I: ある式をスカラー倍($k\ (k \neq 0)$ 倍)する。

II: ある式を他の式 k 倍して加える。

III: 2つの式を交換する。

こちらの変換の組を用いることが多い。

同値な変形による連立一次方程式の解法

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots(1) \\ 3x - y = 7 & \cdots(2) \end{cases}$$

$$(2)' = (2) + 1 \times (1)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots(1) \\ 5x = 10 & \cdots(2)' \end{cases}$$

$$(2)'' = \frac{1}{5} \times (2)'$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdots(1) \\ x = 2 & \cdots(2)'' \end{cases}$$

$$(1)' = (1) - 2 \times (2)''$$

$$\begin{cases} y = -1 & \cdots(1)' \\ x = 2 & \cdots(2)'' \end{cases}$$

$$(1)' \leftrightarrow (2)''$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

この一連の変形を
行列を用いて表現する。

同値な変形と行列の変換

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ $(2)' = (2) + 1 \times (1)$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x = 10 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ $(2)'' = \frac{1}{5}(2)'$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ $(1)' = (1) - 2 \times (2)''$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ $(1)' \leftrightarrow (2)''$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

行列の行基本変形

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \quad (2)' = (2) + 1 \times (1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \quad (2)'' = \frac{1}{5}(2)'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \quad (1)' = (1) - 2 \times (2)''$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \quad (1)' \leftrightarrow (2)''$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

係数行列	変形
$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix}$	
$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{matrix}$	$(2) + 1 \times (1)$
$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	$\frac{1}{5}(2)$
$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$	$(1) - 2 \times (2)$
$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$(1) \leftrightarrow (2)$

行列の行基本変形

定義(行列の行基本変形)

I:　ある行をスカラー倍(k $(k \neq 0)$ 倍)する。

II:　ある行を他の行に k 倍して加える。

III:　2つの行を交換する。

重要

例

次の行列を行基本変形を用いて、単位行列にせよ。

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

解）

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\times(1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+3\times(1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)\times(2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+2\times(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

あくまで変形なので、矢印を用いる。
行列としては等しくないので、
「＝」を用いてはいけない。

練習

次の行列を行基本変形を用いて、単位行列にせよ。

（1）

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

（2）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

一次方程式と連立一次方程式

一次方程式

未知数

係数

$$5x = 3$$

定数

2元連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 3 \\ -x + 5y & = 7 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ として、

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

係数行列

定数項ベクトル

変数ベクトル
（未知数ベクトル）

拡大係数行列

連立一次方程式を定めるには、
変数の名前（x や y 、あるいは x_i ）は重要ではない。
すなわち、その係数行列と定数項ベクトルだけがあれば
連立一次方程式が一意に定まる。

定義（拡大係数行列）

連立一次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対して、係数行列 $\boldsymbol{A}$ と
定数項ベクトル $\boldsymbol{b}$ から作られる次の行列

$$\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right]$$

を拡大係数行列という。

このように、小行列や、ベクトルで定められる
行列をブロック行列という。

例1

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 5 \\ 3x + 2y - z &= -2 \\ -x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= -1 \end{cases}$$

この連立方程式に対して、係数行列 $\boldsymbol{A}$ 、未知数ベクトル $\boldsymbol{x}$
定数項ベクトル $\boldsymbol{b}$ 、拡大係数行列 $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$ は次のようになる。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

例2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 & = 3 \\ -3x_1 + x_3 + 5x_4 & = -2 \end{cases}$$

この連立方程式に対して、係数行列 $\boldsymbol{A}$、未知数ベクトル $\boldsymbol{x}$
定数項ベクトル $\boldsymbol{b}$ 、拡大係数行列 $\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right]$ は次のようになる。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right]$$

拡大係数行列と連立方程式の解法

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ $(2)' = (2) + 1 \times (1)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ $(2)'' = \frac{1}{5}(2)'$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ $(1)' = (1) - 2 \times (2)''$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ $(1)' \leftrightarrow (2)''$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

拡大係数行列	変形
$\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{array}$	
$\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 10 \end{array}$	$(2) + 1 \times (1)$
$\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}$	$\frac{1}{5}(2)$
$\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}$	$(1) - 2 \times (2)$
$\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$	$(1) \leftrightarrow (2)$

行列の基本変形と基本変形行列

一般のn元1次連立方程式を考える。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & \cdots(1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & \cdots(2) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & \cdots(m) \end{cases}$$

$m \times n$ の係数行列 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$

$n \times 1$ の未知数（列）ベクトル $\boldsymbol{x} = [x_i]$

$m \times 1$ の定数項（列）ベクトル $\boldsymbol{b} = [b_i]$

とすると、以下のように表せる。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

式のスカラー倍に対応する基本変形行列

ある式をスカラー($k \neq 0 \in \mathbb{R}$)倍 しても、
連立一次方程式の解には変化は無い。

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x & = b_1 & \cdots(1) \\
\vdots & & \\
ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \cdots + ka_{in}x_n & = kb_i & \cdots k \times (i) \\
\vdots & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m & \cdots(m)
\end{cases}
$$

これを行列の積で表現したい。

基本変形行列1（行列の行のスカラー倍）

$$\boldsymbol{T}_{k\times(i)} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

i 行を k 倍する
$m \times m$ の正方行列。
正方行列を乗じても、
行列の形が変わらないことに
注意する。

$$\boldsymbol{T}_{k\times(i)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_{k\times(i)}\boldsymbol{b}$$

例1

$$\boldsymbol{T}_{(-1)\times(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

左から掛ける

$$\boldsymbol{T}_{2\times(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 10 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

左から掛ける

練習

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 7 & 5 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ とする。

行列 $\boldsymbol{A}$ の3行目を2倍にする変換行列 $\boldsymbol{T}_{2\times(3)}$ を求め、
積 $\boldsymbol{T}_{2\times(3)}\boldsymbol{A}$ を計算せよ。

加減法に対応する基本変形行列

$$
\begin{cases}
\qquad\qquad \vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \qquad \cdots(i) \\
\qquad\qquad \vdots \\
a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x = b_j \qquad \cdots(j) \\
\qquad\qquad \vdots
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
(a_{i1} + ka_{j1})x_1 + (a_{i2} + ka_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \cdots(i') = (i) + k \times (j) \\
a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \cdots(j)
\end{cases}
$$

行を他の行へ定数倍して加算しても、
連立一次方程式は変わらない。

基本変形行列2（行の他の行への加算）

$$\boldsymbol{T}_{(i)+k\times(j)} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & (i) & & (j) & & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

i 行に j 行を k 倍して加算する $m \times m$ の正方行列。

$$\boldsymbol{T}_{(i)+k\times(j)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_{(i)+k\times(j)}\boldsymbol{b}$$

例1

$$\boldsymbol{T}_{(2)+2\times(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{左から掛ける}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 8 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_{(4)+2\times(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{左から掛ける}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

練習

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 7 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ とする。

行列 $\boldsymbol{A}$ の2行目の－1倍を1行目に加算する変換行列 $\boldsymbol{T}_{(1)+(-1)\times(2)}$ を求め、積 $\boldsymbol{T}_{(1)+(-1)\times(2)}\boldsymbol{A}$ を計算せよ。

連立一次方程式での式の交換

$$\begin{cases} \qquad\qquad\vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad = b_i \quad \cdots (i) \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \quad = b_j \quad \cdots (j) \\ \qquad\qquad\vdots \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \qquad\qquad\vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \quad = b_j \quad \cdots (i') = (j) \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x \quad = b_i \quad \cdots (j') = (i) \\ \qquad\qquad\vdots \end{cases}$$

行を交換しても、連立方程式は変わらない。

行列の基本変形3（行の交換）

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} \\
\boldsymbol{T}_{(i)\leftrightarrow(j)} = &
\begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&& O & \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
& O &&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \\ (j) \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

i 行に j 行を交換する
$m \times m$ の正方行列。

$$\boldsymbol{T}_{(i)\leftrightarrow(j)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_{(i)\leftrightarrow(j)}\boldsymbol{b}$$

例1

$$T_{(2)\leftrightarrow(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

左から掛ける

$$T_{(1)\leftrightarrow(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

左から掛ける

練習

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ とする。

行列 $\boldsymbol{A}$ の1行目と3行目に交換する変換行列 $\boldsymbol{T}_{(1)\leftrightarrow(3)}$ を求め、積 $\boldsymbol{T}_{(1)\leftrightarrow(3)}\boldsymbol{A}$ を計算せよ。

基本変形行列の積

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \ (2) + 1 \times (1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{(2)+1\times(1)} A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \ \frac{1}{5}(2)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{\frac{1}{5}\times(2)} T_{(2)+1\times(1)} A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(1) - 2 \times (2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_{(1)-2\times(2)}\boldsymbol{T}_{\frac{1}{5}\times(2)}\boldsymbol{T}_{(2)+1\times(1)}\boldsymbol{A}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(1) \leftrightarrow (2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_{(1)\leftrightarrow(2)}\boldsymbol{T}_{(1)-2\times(2)}\boldsymbol{T}_{\frac{1}{5}\times(2)}\boldsymbol{T}_{(2)+1\times(1)}\boldsymbol{A}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基本変形行列の積と逆行列

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ に対して、

$$\left(T_{(1)\leftrightarrow(2)} T_{(1)-2\times(2)} T_{\frac{1}{5}\times(2)} T_{(2)+1\times(1)} \right) A = I$$

が成り立つ。

ここで、

$$X \equiv T_{(1)\leftrightarrow(2)} T_{(1)-2\times(2)} T_{\frac{1}{5}\times(2)} T_{(2)+1\times(1)}$$ とおく。

$$XA = I$$

$$\therefore X = A^{-1} = T_{(1)\leftrightarrow(2)} T_{(1)-2\times(2)} T_{\frac{1}{5}\times(2)} T_{(2)+1\times(1)}$$

基本変形行列の性質1

（基本変形行列の正則性）

基本変形行列は、すべて正則行列である。
（逆行列が存在する。）

証明　実際に逆行列を示す。

（1）
$$\boldsymbol{T}_{k\times(i)}\boldsymbol{T}_{\frac{1}{k}\times(i)} = \boldsymbol{T}_{\frac{1}{k}\times(i)}\boldsymbol{T}_{k\times(i)} = \boldsymbol{I}$$

（2）
$$\boldsymbol{T}_{(i)+k\times(j)}\boldsymbol{T}_{(i)-k\times(j)} = \boldsymbol{T}_{(i)-k\times(j)}\boldsymbol{T}_{(i)+k\times(j)} = \boldsymbol{I}$$

（3）
$$\boldsymbol{T}_{(i)\leftrightarrow(j)}\boldsymbol{T}_{(i)\leftrightarrow(j)} = \boldsymbol{T}_{(i)\leftrightarrow(j)}\boldsymbol{T}_{(i)\leftrightarrow(j)} = \boldsymbol{I}$$

$\mathcal{QED}$

例

（1）
$$\boldsymbol{T}_{2\times(2)}\boldsymbol{T}_{\frac{1}{2}\times(2)} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$$

（2）
$$\boldsymbol{T}_{(2)-2\times(3)}\boldsymbol{T}_{(2)+2\times(3)} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$$

（3）
$$\boldsymbol{T}_{(2)\leftrightarrow(4)}\boldsymbol{T}_{(2)\leftrightarrow(4)} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$$

基本変形行列の性質2

（基本変形行列の積）

基本変形行列の積で得られる行列は正則である。

証明　正則行列の積は正則である。

実際、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を正則行列とし、その積 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ を考える。
まず、$\boldsymbol{A}$ は正則なので逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する。
同様に、逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ も存在する。
よって、積 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ が構成できる。
このとき、以下のように計算できる。

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{C} = \left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

$$\therefore \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}^{-1}$$

したがって、逆行列が存在するので$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ は正則行列。

QED

行列の基本変形の応用1
（逆行列を求める）

行基本変形による逆行列の求め方

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ をn 次の正方行列とする。

$n\times 2n$ の行列 $[\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{I}]$ を行基本変形で、$[\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{B}]$ の形に変形できれば、$\boldsymbol{A}$ は正則行列で、 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$ である。ここで、$[\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{I}]$ は n 次正方行列 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ を横に並べた行列を表す。

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & \cdots & & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & & & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & & b_{1n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{n1} & & & b_{nn} \end{array}\right]$$

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ と $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ は互いに逆行列。

証明

行に関する基本変形を行うことは、いくつかの基本変形行列を左から掛けることであった。
これらの積を $\boldsymbol{X}$ とすると、 $\boldsymbol{X}$ は正則行列である。
この $\boldsymbol{X}$ を用いて

$$\boldsymbol{X}[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}] = [\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{B}]$$

となる。
これより、

$$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{XI} = \boldsymbol{B}$$

である。
よって、

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}, \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

である。

$\mathcal{QED}$

連立方程式との関係

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Ib}$$

$\Updownarrow$ (2)+1×(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_{(2)+1\times(1)}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{T}_{(2)+1\times(1)}\boldsymbol{Ib}$$

$$\Updownarrow \quad \frac{1}{5}(2)$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 7\end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \quad (1) - 2 \times (2)$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 7\end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \quad (1) \leftrightarrow (2)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 7\end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow \quad \frac{1}{5}(2)$$

$$\boldsymbol{T}_{\frac{1}{5}\times(2)}\boldsymbol{T}_{(2)+1\times(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}_{\frac{1}{5}\times(2)}\boldsymbol{T}_{(2)+1\times(1)}\boldsymbol{I}\boldsymbol{b}$$

$$\Updownarrow \quad (1) - 2 \times (2)$$

$$\boldsymbol{T}_{(1)-2\times(2)}\boldsymbol{T}_{\frac{1}{5}\times(2)}\boldsymbol{T}_{(2)+1\times(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$=\boldsymbol{T}_{(1)-2\times(2)}\boldsymbol{T}_{\frac{1}{5}\times(2)}\boldsymbol{T}_{(2)+1\times(1)}\boldsymbol{I}\boldsymbol{b}$$

$$\Updownarrow \quad (1) \leftrightarrow (2)$$

$$\boldsymbol{T}_{(1)\leftrightarrow(2)}\boldsymbol{T}_{(1)-2\times(2)}\boldsymbol{T}_{\frac{1}{5}\times(2)}\boldsymbol{T}_{(2)+1\times(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$=\boldsymbol{T}_{(1)\leftrightarrow(2)}\boldsymbol{T}_{(1)-2\times(2)}\boldsymbol{T}_{\frac{1}{5}\times(2)}\boldsymbol{T}_{(2)+1\times(1)}\boldsymbol{I}\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{T}_{(1)\leftrightarrow(2)}\boldsymbol{T}_{(1)-2\times(2)}\boldsymbol{T}_{\frac{1}{5}\times(2)}\boldsymbol{T}_{(2)+1\times(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{XAx} = \boldsymbol{XIb}$$

$$\because \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Xb}$$

$$= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\therefore \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$$

掃きだし法

逆行列を作るときには、
対角成分に注目する。

- 系統的な行基本変形
  - （1）ある要素を1にする。（スカラー倍の基本変形 $T_{k\times(i)}$ ）
  - （2）その列の（1）の要素以外を0にする。（加減法の基本変形 $T_{(j)-s\times(i)}$ ）
  - (3)これらを左から順に全ての列に行う。

j 列における掃き出し

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ を $m \times n$ 行列とする。

$a_{ij} \neq 0$ のとき、

$T_{\frac{1}{a_{ij}}\times(i)}$ を左からかける。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

同様に、繰り返し $T_{(k)-a_{kj}\times(i)}$ を左からかける。

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} a'_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{i1}}{a_{ij}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{a_{in}}{a_{ij}} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$

このように、j列で (i,j)成分以外を0にできる。

この一連の操作を　j列の(i,j) 成分による**掃きだし**という。

例

行列　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ。

1列目の掃きだし
終了

解

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{T_{(2)-1\times(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{T_{-1\times(2)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[T_{(1)-1\times(2)}]{}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[T_{(3)-1\times(2)}]{}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

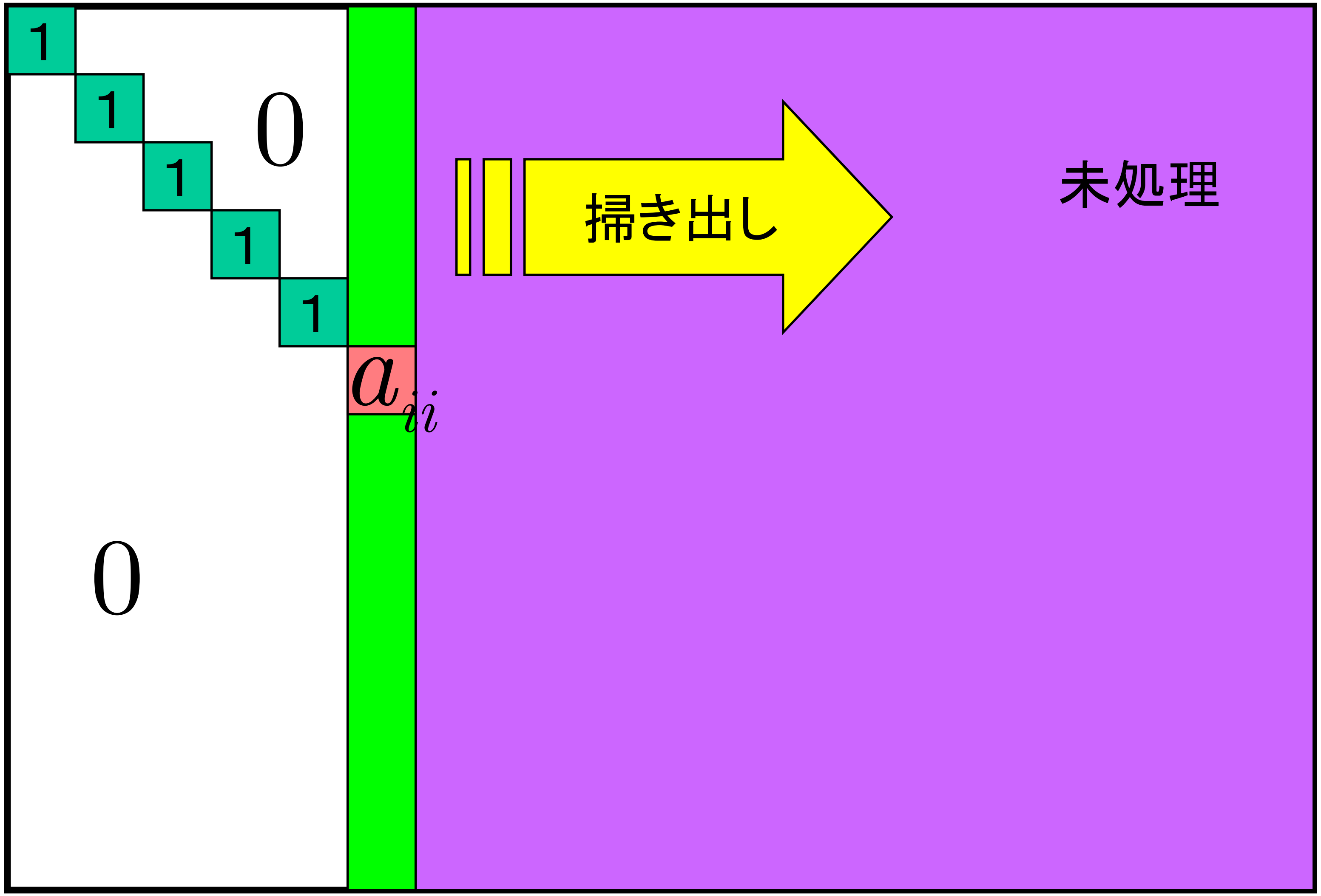
$T_{\frac{1}{2}\times(3)}$ $\qquad T_{(2)+1\times(3)}$ $\qquad T_{(1)-1\times(3)}$

よって、

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

この計算手順に従えば、一般のn次の正則行列に対する逆行列を求めることができる。

掃き出し方のイメージ



練習

次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

行列の基本変形の応用２
（行列の階数(rank)）

連立一次方程式と階数

例

$$\begin{cases} 3x+2y &= 4 \quad \cdots(1) \\ 6x+4y &= 8 \quad \cdots(2) \\ 5x+3y &= 3 \quad \cdots(3) \\ 15x+9y &= 9 \quad \cdots(4) \end{cases}$$

$(2) = 2 \times (1)$

$(4) = 3 \times (3)$

の関係に注目する。

4本の方程式があるが、意味のある方程式は2本である。

このようなとき、連立一次方程式中に意味のある方程式の本数を調べたい。

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 15 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

例2

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 & \text{-------------} \quad (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 & \text{-------------} \quad (2) \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 4 & \text{-------------} \quad (3) \end{cases}$$

このような方程式においても、
$(3) = (1) + (2) \times 2$ と表せるので、
本質的な方程式の本数は2本である。

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

一般的に、

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

のような連立方程式では、その係数行列に本質的な方程式の本数が隠れている。

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \\
a_{m1} & \cdots & & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m
\end{bmatrix}
$$

係数行列

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \\
a_{m1} & \cdots & & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m
\end{bmatrix}
$$

係数行列

連立方程式の本質的な本数は、
係数行列の階数（ランク、rank）と等しい。

係数行列の階数を求めるためには、
係数行列を行基本変形することで、
階段行列に変形することで調べることができる。

階段行列

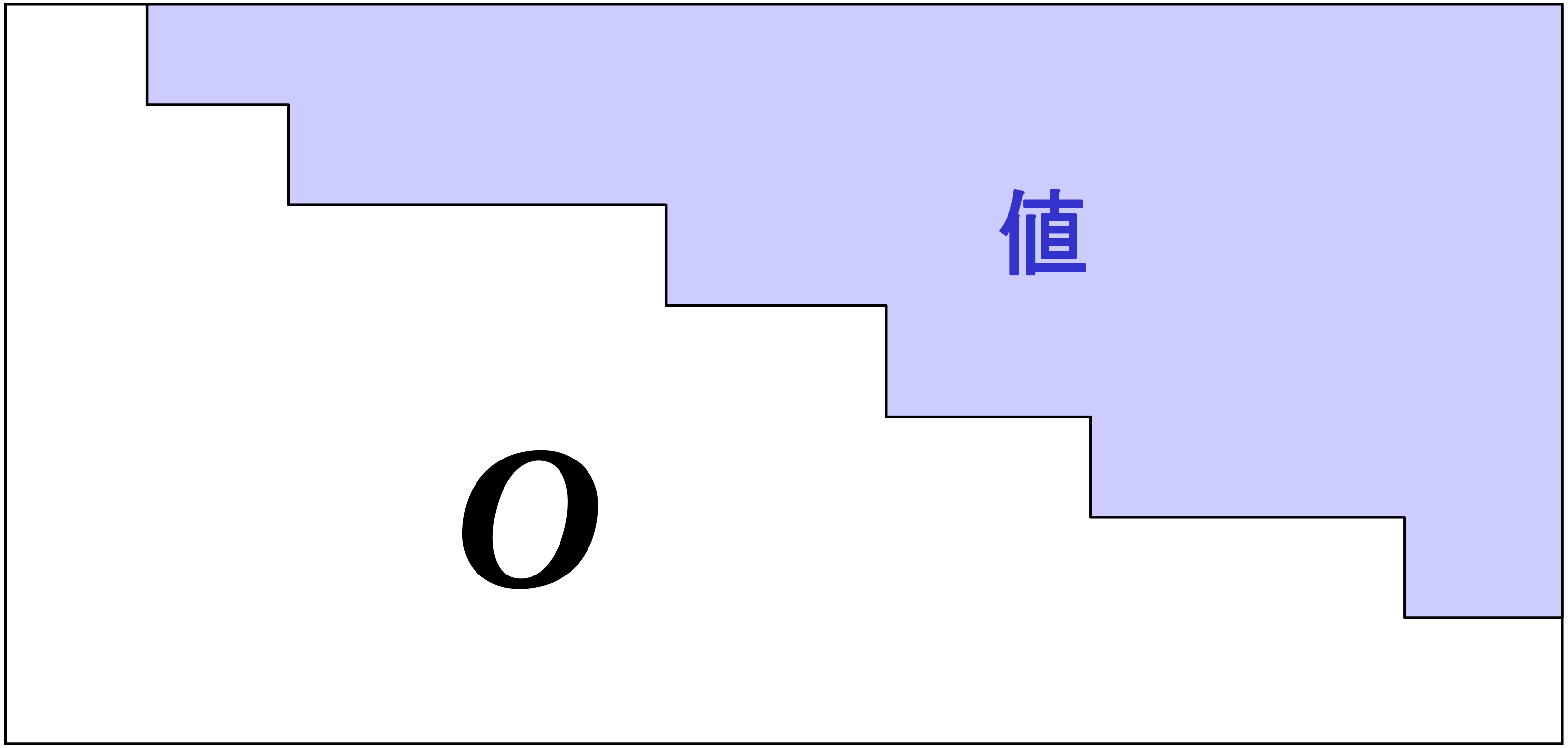
定義（階段行列）

次のような形の行列を**階段行列**とよぶ。

$$
\begin{bmatrix}
0\cdots 0 & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j'_1} & & & & & & & \\
0\cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j'_2} & \ddots & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & a_{rj_r} & \cdots & a_{rj'_r} \\
 & & & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\
0\cdots 0 & 0 & \cdots & & & & & & \vdots & \cdots & \vdots
\end{bmatrix}
$$

ただし、 $a_{1j_1} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, \cdots, a_{rj_r} \neq 0$

階段行列のイメージ



注意：
（1）全ての行で、値のある列数は異なる。
（“一段跳び”の階段は無い）。
（2）行ごとに2列以上の違いがあっても良い。
（長い“踊り場”があっても良い。）

階段行列の例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 49 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

階段状でない

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 56 & 49 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0以外の開始列が
同一の行がある。

練習

次の行列が階段行列であるか答えよ。

（1）
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（3）
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（4）
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 49 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行基本変形と階段行列

（行列の階段行列化）

任意の行列 $\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n\right]$ は、
有限回の行基本変形だけを行うことにより、
階段行列に変形できる。

証明

次のような手順を踏めばよい。

（1）第１列から順に、$\boldsymbol{0}$ ベクトルでない列 $\boldsymbol{a}_{j_1}$ 探す。
（2）$\boldsymbol{A}$ の行を入れ替えて、$(1, j_1)$ 成分が0で無いようにする。
（3）第１行に適当なスカラーを掛けて、$(1, j_1)$ 成分を1にする。
（4）$2 \leq i \leq m$ に対して、$(1, j_1)$ 成分で掃き出して、
(i, j_1) 成分をすべて0 にする。

同様に、

（1）第 j_1+1列から順に、2行目以降が $\boldsymbol{0}$ でない列ベクトル $\boldsymbol{a}_{j_2}$ を探す。

（2） 行を（$2 \sim m$ 行で）入れ替えて、$(2, j_2)$成分が0で無いようにする。
（3）第2行に適当なスカラーを掛けて、$(2, j_2)$ 成分を1にする。
（4）$3 \leq i \leq m$ に対して、$(2, j_2)$ 成分で掃き出して、(i, j_2) 成分をすべて0にする。

以下,同様に行なえば、階段行列にできる。

$\mathcal{QED}$

例1

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}
$$
を階段行列に変形せよ。

基本変形では「＝」と書かないこと。

解）

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{(2)-5\times(1)}}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{(2)-9\times(1)}}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{-\frac{1}{4}\times(2)}}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{(3)-8\times(2)}}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

例2

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3&-1&4\\-2&3&1&2&-5\\-1&5&4&1&-1\\4&2&14&3&12\end{bmatrix}$$ を階段行列に変形せよ。

解）

$$\begin{bmatrix}1&2&3&-1&4\\-2&3&1&2&-5\\-1&5&4&1&-1\\4&2&14&3&12\end{bmatrix}\xrightarrow{(1,1)\text{による掃出し}}\begin{bmatrix}1&2&3&-1&4\\0&7&7&0&3\\0&7&7&0&3\\0&-6&2&7&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{(3)-1\times(2)}}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&-1&4\\0&7&7&0&3\\0&0&0&0&0\\0&-6&2&7&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{(2)+1\times(4)}}\begin{bmatrix}1&2&3&-1&4\\0&1&9&7&-1\\0&0&0&0&0\\0&-6&2&7&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{(3)\leftrightarrow(4)}}\begin{bmatrix}1&2&3&-1&4\\0&1&9&7&-1\\0&-6&2&7&-4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\boldsymbol{T}_{(3)+6\times(2)}}\begin{bmatrix}1&2&3&-1&4\\0&1&9&7&-1\\0&0&56&49&-10\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

練習

次の行列を行基本変形により階段行列にせよ。

（１） $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

（２） $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

階数(rank)

定義(行列の階数)

行列 $\boldsymbol{A}$ を行基本変形で階段行列 $\boldsymbol{A}^s$ に変形したとき、
階段行列 $\boldsymbol{A}^s$ の段数を、元の行列 $\boldsymbol{A}$ の**階数**といい、

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$$

と表す。

もちろん、

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^s)$$

であり、そのうえ

変形途中で現れる全ての行列は、
同じ階数を持つ。

練習

次の行列の階数を求めよ。

（1）

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

階数の性質1

定理（階数と転置）

行列 $\boldsymbol{A}$ の階数は、転置しても変わらない。
すなわち、

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}({}^t\boldsymbol{A})$$

定理（階数と行数、列数の関係）

行列 $\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列とするとき、

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \leq \min\{m, n\}$$

例

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^t\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

階数の性質2

定理（階数と正則行列の積）

行列 $\boldsymbol{A}$ の階数は、正則行列を掛けてもかわらない。
すなわち、$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ を積の定義できる正則行列すると、
次式が成り立つ。

（1）　$\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$

（2）　$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$

（3）　$\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$

$\boldsymbol{A}$ 自身は正則行列でなくてもかまわないことに注意する。さらに、$\boldsymbol{A}$ は正方行列でなくてもかまわない。

階数の性質3

定理（行列の積と階数）

行列 $\boldsymbol{A}$ と行列 $\boldsymbol{B}$ の積では、階数は変わらないか、
あるいは減少する。
すなわち、

（1） $\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) \leq \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$

これは、次のようにも記述できる。

（2） $\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}), \mathrm{rank}(\boldsymbol{B})\}$

階数の性質4

定理（階数と正則行列）

n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ が正則行列であるための必要十分条件は、

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = n$$

である。

これまでの、性質は正方行列以外でも成り立つ。この性質だけ、正方行列と階数の関係を示している。