

1章 行列と行列式

1

行列の定義

(定義) 行列
数(実数)を縦横をそろえて並べたもの。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

縦が m 行、横が n 列あるとき、
 $m \times n$ 行列という。

“ひげ”が記号として重要。縦線だけだと違う意味(行列式)とみなされる。

2

行列の型(大きさ)

(定義) 行列の型
行数 $\times$ 列数を行列の型あるいは大きさという。
 m 行 n 列の行列を、
 $m \times n$ 行列
あるいは
 (m, n) 型行列
という。

m n
 $m \times n$

3

例

2行3列の行列 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$(3, 3)$ 型行列 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

4×3 行列 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

4

練習

次の行列の型を答えよ。

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $[4]$

(4) $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ -2 & 11 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

5

行列の成分

(定義) 行列の成分
 i 行 j 列の要素 a_{ij} を (i, j) 要素 ((i, j) 成分) という。

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ i 行 j 列

添字は、
行が先で、
列が後。

行列を (i, j) 成分だけに注目して、

$A = [a_{ij}]$
のように表すこともある。

6

ベクトル

(定義)ベクトル

大きさが、 $1 \times n$ あるいは、 $m \times 1$ の行列をベクトルという。 $1 \times n$ のベクトルを行ベクトル(row vector)という。

$$\mathbf{r} = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]$$

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

 $m \times 1$ のベクトルを列ベクトル(column vector)という。

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

7

行列と行ベクトル

 $m \times n$ 行列は、 m 個の n 次元行ベクトルで表現可能。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix}$$

ただし、 $1 \leq i \leq m$ に対して、 $\mathbf{r}_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}]$

8

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

$$\mathbf{r}_1 = [3 \quad 2 \quad 5] = (3, 2, 5)$$

$$\mathbf{r}_2 = [4 \quad 1 \quad -1] = (4, 1, -1)$$

$$\mathbf{r}_3 = [2 \quad 1 \quad 0] = (2, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_4 = [7 \quad -3 \quad -2] = (7, -3, -2)$$

9

行列と列ベクトル

 $m \times n$ 行列は、 n 個の m 次元列ベクトルで表現可能。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{c}_n]$$

$$\text{ただし、} 1 \leq j \leq n \text{ に対して、} \mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

10

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3] \text{ とする。}$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

11

例

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

このとき、

$$a_{11} = 3$$

$$a_{23} = -1$$

$$a_{41} = 7$$

12

例

$A = [a_{ij}]$ を 3×4 行列とし、 $a_{ij} = i + j$ とする。

このとき、

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

13

練習

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ -2 & 11 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & -7 \end{bmatrix} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]$$
 とする。

次に答えよ。

(1) $(1, 1)$ 成分、 $(2, 3)$ 成分、 $(5, 2)$ 成分

(2) 値が11である成分、値が9である成分、
値が3である成分の集合

(3) a_{34}, a_{53}, a_{44}

(4) r_2, r_5

(5) c_3

14

練習

$r_1 = [-2 \ 6 \ 3], r_2 = [2 \ 3 \ -1], r_3 = [-3 \ 8 \ 2],$
 $r_4 = [9 \ 0 \ -5]$ とする。

このとき、 $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$ を求めよ。

15

練習

$A = [a_{ij}]$ を 4×3 行列とし $a_{ij} = 10i + j$ とする。

このとき、 A を求めよ。

16

行列の相等

(定義) 行列の相等

2つの行列 $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ が次の(1)、(2)を満たすとき、
「等しい」といい、
 $A = B$
と書く。

(1) A と B の大きさが等しい。

(2) すべての (i, j) 成分について $a_{ij} = b_{ij}$ である。

17

例

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

18

練習

次の行列の集合から、等しい行列の組をすべて求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

19

行列の演算

行列の加法

(定義) 行列の加法

同じ型 ($m \times n$) の行列 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ に対して、その和 $A + B$ を

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき、 $A + B$ も $m \times n$ の型になることに注意する。

20

例

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

21

和が計算できない行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq ?$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \neq ?$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq ?$$

22

行列の性質1

(性質) 行列の和に関する性質

A, B, C を全て同じ型の行列とする。このとき、次が成り立つ。

(1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (結合法則)

(2) $A + B = B + A$ (交換法則)

(3) $A + O = O + A = A$ (加法単位元)

(4) $A + (-A) = (-A) + A = O$ (加法逆元)

23

零行列

(定義) 零行列

すべての成分が0である行列を**零行列**といい、

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

で表す。特に、型にも注意する際には、

$$O_{mn}$$

と書いて、 $m \times n$ 型の零行列を表す。

24

例

$$O = O_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O = O_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = O_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

25

加法逆元

(定義) 加法逆元

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、
 $m \times n$ 行列

$$-A = [-a_{ij}]$$

を**加法逆元**という。このとき、

$$A + (-A) = (-A) + A = O_{mn}$$

が成り立つ。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

26

行列のスカラー倍

(定義) 行列のスカラー倍

スカラー $k \in R$ に対して、 $m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ の k 倍を

$$kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき、 kA の大きさも $m \times n$ になることに注意する。

27

例

$$2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 12 \\ 2 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 12 & -3 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

28

行列の性質2

(性質) 行列のスカラー倍に関する性質

A, B を同じ型の行列とし、 $k, l \in R$ とする。
 このとき、次が成り立つ。

- (1) $(k + l)A = kA + lA$ (行列のスカラー倍への分配法則)
- (2) $k(A + B) = kA + kB$ (スカラーの行列への分配法則)
- (3) $(kl)A = k(lA)$ (結合法則)
- (4) $1A = A$ (公等法則)
- (5) $0A = O$ (零倍)

29

練習

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、行列演算の法則を用いることにより、
 次を計算せよ。

- (1) $2A + B - 2(B + A)$
- (2) $5A + B - 3(2B + 2C) + 6C$
- (3) $3((A - B) + (B - C) + (C - A))$

30

行列の積

(定義) 行列の積

$l \times m$ 行列 $A = [a_{ij}]$ と $m \times n$ 行列 $B = [b_{ij}]$ に対して、その積である $C = AB = [c_{ij}]$ を

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}$$

$(1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n)$

となる行列とする。
ここで、 $C = AB$ の型は

$$l \times n$$

になる。

31

行列積の覚え方

$l \times m \times m \times n = l \times n$

ここが同じでないと乗算できない。

(1) まず、出来上がる行列の型をきめる。

ここが同じでないと乗算できない。

$m \times n$
 $l \times m$ $l \times n$

32

(2) 個々の成分を求める。

33

例

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする。

$A B = [10]$

$B A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

34

練習

次の行列の中から、積が定義できるものに対して、積を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

35

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質 1

積が定義できる行列に関して、次が成り立つ。

(1) $(AB)C = A(BC)$ (結合法則)

(2) $A(B + C) = AB + AC$ (左分配法則)

(3) $(A + B)C = AC + BC$ (右分配法則)

(4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ (スカラーの移動)

このような移動ができるのは、スカラーに対してだけであることに、注意すること。

36

例題

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 2,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

- (1) $(AB)C = A(BC)$
- (2) $A(B+C) = AB+AC$
- (3) $(A+B)C = AC+BC$
- (4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

37

解) (1) $(AB)C = A(BC)$

$$\text{左辺: } AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\therefore (AB)C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{右辺: } BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\therefore A(BC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

よって、左辺=右辺

$$\text{これより、} (AB)C = A(BC) = ABC$$

と書いても誤解が無い。

38

$$(2) A(B+C) = AB+AC$$

$$\text{左辺: } B+C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{右辺: } AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AB+AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

よって、左辺=右辺

39

$$(3) (A+B)C = AC+BC$$

$$\text{左辺: } A+B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(A+B)C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{右辺: } AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AC+BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

よって、左辺=右辺

40

$$(4) k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 2,$$

$$k(AB) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$kA = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (kA)B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$kB = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A(kB) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

よって、成り立つ。

41

練習

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = -1, \quad l = 3,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

- (1) $(AB)C = A(BC)$
- (2) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- (3) $l(BC) = (lB)C = B(lC)$

42

練習

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix},$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) A(C + D) = AC + AD$$

$$(2) B(C + D) = BC + BD$$

$$(3) (A + B)C = AC + BC$$

$$(4) (A + B)D = AD + BD$$

43

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質2

$$AB \neq BA$$

となる行列A、行列Bがある。

行列の積では、交換法則は成り立たない。

44

例題

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{とする。}$$

$AB \neq BA$ を確かめよ。

$$\text{解) 左辺} = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 24 \\ -3 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\text{右辺} = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 25 & 5 \\ -3 & 3 & 1 \\ -6 & 12 & -2 \end{bmatrix}$$

よって、左辺 $\neq$ 右辺

45

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質3

$AB = O$ でも、

$$A = O \quad \text{または} \quad B = O$$

とは限らない。すなわち、

$$A \neq O \quad \text{かつ} \quad B \neq O$$

でも、

$$AB = O$$

となることがある。

46

例題

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

$AB = O$ を確かめよ。

解)

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

47

転置行列

(定義) 転置行列

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、 $n \times m$ 行列 $B = [b_{ij}]$ を

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

と定める。このとき、 B を A の転置行列といい、

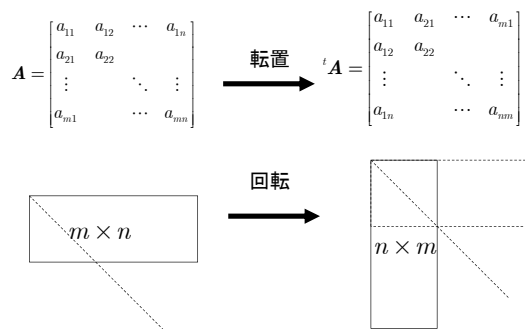
$${}^t A$$

と表す。すなわち、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{のとき} \quad {}^t A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

48

転置行列のイメージ



49

例

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^tA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^tB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^tC = [2 \quad 3 \quad -5 \quad 1]$$

50

練習

次の行列の転置行列を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

51

転置行列の性質

(性質) 転置行列の性質

A, B を $l \times m$ 行列とし、 C を $m \times n$ 行列とし、 $k \in R$ とする。このとき、次が成り立つ。

- (1) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ (和と転置の交換)
- (2) ${}^t(kA) = k({}^tA)$ (スカラー倍と転置の交換)
- (3) ${}^t(AC) = ({}^tC)({}^tA)$ (積と転置の交換)
- (4) ${}^t({}^t(A)) = A$ (転置の交代性)

52

証明

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ を $l \times m$ 行列とする。

$$(1) \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= {}^t(A + B) & \text{右辺} &= {}^tA + {}^tB \\ &= {}^t([a_{ij}] + [b_{ij}]) & &= {}^t[a_{ij}] + {}^t[b_{ij}] \\ &= {}^t([a_{ji} + b_{ji}]) & &= [a_{ji}] + [b_{ji}] \\ &= [a_{ji} + b_{ji}] & &= [a_{ji} + b_{ji}] \end{aligned}$$

よって、左辺=右辺

53

$$(2) \quad {}^t(kA) = k({}^tA)$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= {}^t(kA) & \text{右辺} &= k({}^tA) \\ &= {}^t(k[a_{ij}]) & &= k({}^t[a_{ij}]) \\ &= {}^t([ka_{ij}]) & &= k[a_{ji}] \\ &= [ka_{ji}] & &= [ka_{ji}] \end{aligned}$$

よって、左辺=右辺

54

$C = [c_{ij}]$ を $m \times n$ 行列とする。

(3) ${}^t(AC) = ({}^tC)({}^tA)$

$D = [d_{ij}] = AC$ とする。すなわち、

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} c_{kj}$$

左辺 $= {}^t(AC)$ 右辺 $= ({}^tC)({}^tA)$

$$= {}^t([d_{ij}]) = [d_{ji}] = \left[\sum_{k=1}^m a_{jk} c_{ki} \right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^m c_{jk} a_{ki} \right]$$

よって、左辺=右辺

55

(3)のイメージ

56

(4) ${}^t({}^t(A)) = A$

左辺 $= {}^t({}^tA)$

$$= {}^t({}^t[a_{ij}]) = {}^t[a_{ji}] = [a_{ij}] = \text{右辺}$$

QED

57

例題

$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k = 3$,

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

(1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(2) ${}^t(kA) = k({}^tA)$

(3) ${}^t(AC) = ({}^tC)({}^tA)$

(4) ${}^t({}^t(A)) = A$

58

解) (1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

左辺 $= {}^t\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

右辺 $= {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

左辺=右辺

(2) ${}^t(kA) = k({}^tA)$

左辺 $= {}^t\left(3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$

右辺 $= 3\left({}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$

左辺=右辺

59

(3) ${}^t(AC) = ({}^tC)({}^tA)$

左辺 $= {}^t\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

右辺 $= {}^t\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

左辺=右辺

(4) ${}^t({}^t(A)) = A$

左辺 $= {}^t\left({}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{右辺}$

60