

1章 行列と行列式

行列の定義

(定義) 行列

数(実数)を縦横をそろえて並べたもの。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

縦が m 行、横が n 列あるとき、
 $m \times n$ 行列という。

“ひげ”が記号として重要。縦線だけだと違う意味(行列式)とみなされる。

行列の型(大きさ)

(定義) 行列の型

行数 $\times$ 列数を行列の型あるいは大きさという。

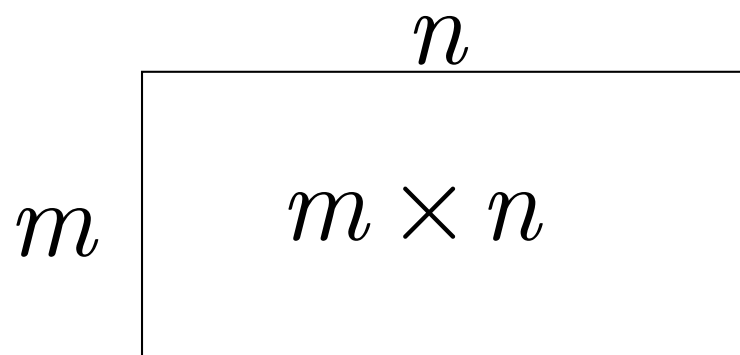
m 行 n 列の行列を、

$m \times n$ 行列

あるいは

(m, n) 型行列

という。



例

2行3列の行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(3, 3) 型行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

4 × 3 行列

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

練習

次の行列の型を答えよ。

$$(1) \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3) [4]$$

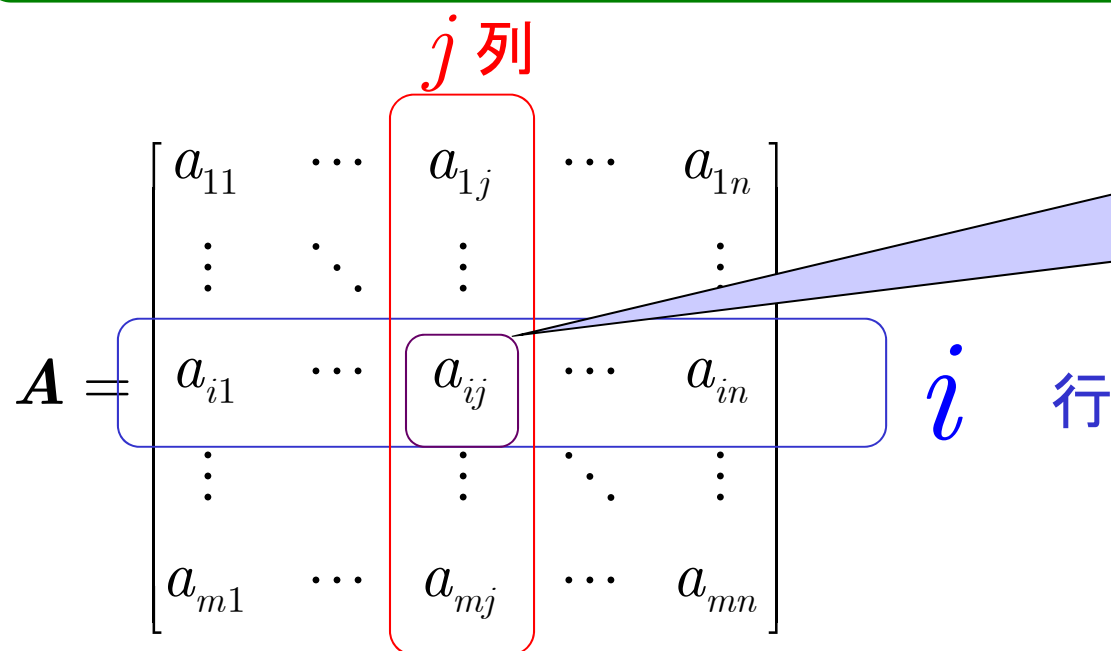
$$(4) \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ -2 & 11 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

行列の成分

(定義) 行列の成分

i 行 j 列の要素 a_{ij} を (i, j) 要素 ((i, j) 成分)
という。


$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

j 列

i 行

添字は、
行が先で、
列が後。

行列を (i, j) 成分だけに注目して、

$$A = [a_{ij}]$$

のように表すこともある。

ベクトル

(定義)ベクトル

大きさが、 $1 \times n$ あるいは、 $m \times 1$ の行列をベクトルという。

$1 \times n$ のベクトルを行ベクトル(row vector)という。

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$$

$m \times 1$ のベクトルを列ベクトル(column vector)という。

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

行列と行ベクトル

$m \times n$ 行列は、 m 個の n 次元行ベクトルで表現可能。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix}$$

ただし、 $1 \leq i \leq m$ に対して、 $\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = (3, 2, 5)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (4, 1, -1)$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (2, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = (7, -3, -2)$$

行列と列ベクトル

$m \times n$ 行列は、 n 個の m 次元列ベクトルで表現可能。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix}} & \cdots & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$$

ただし、 $1 \leq j \leq n$ に対して、 $\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3] \quad \text{とする。}$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

例

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

このとき、

$$a_{11} = 3$$

$$a_{23} = -1$$

$$a_{41} = 7$$

例

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$ を 3×4 行列とし、 $a_{ij} = i + j$ とする。

このとき、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

練習

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ -2 & 11 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & -7 \end{bmatrix} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

次に答えよ。

(1) (1, 1)成分、(2, 3)成分、(5, 2)成分

(2) 値が11である成分、値が9である成分、
値が3である成分の集合

(3) a_{34}, a_{53}, a_{44}

(4) r_2, r_5

(5) c_3

練習

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_3 = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{r}_4 &= \begin{bmatrix} 9 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{とする。} \end{aligned}$$

このとき、
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_4 \end{bmatrix}$$
を求めよ。

練習

$A = [a_{ij}]$ を 4×3 行列とし、 $a_{ij} = 10i + j$ とする。

このとき、 A を求めよ。

行列の相等

(定義) 行列の相等

2つの行列 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ が次の (1)、(2) を満たすとき、
「等しい」といい、

$$A = B$$

と書く。

(1) A と B の大きさが等しい。

(2) すべての (i, j) 成分について $a_{ij} = b_{ij}$ である。

例

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

練習

次の行列の集合から、等しい行列の組をすべて求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

行列の演算

行列の加法

(定義) 行列の加法

同じ型 ($m \times n$) の行列 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ に対し
て、その和 $A + B$ を

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき、 $A + B$ も $m \times n$ の型になることに注意する。

例

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

和が計算できない行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq ?$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \neq ?$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq ?$$

行列の性質1

(性質) 行列の和に関する性質

A, B, C を全て同じ型の行列とする。このとき、次が成り立つ。

$$(1) \quad (A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{結合法則})$$

$$(2) \quad A + B = B + A \quad (\text{交換法則})$$

$$(3) \quad A + O = O + A = A \quad (\text{加法単位元})$$

$$(4) \quad A + (-A) = (-A) + A = O \quad (\text{加法逆元})$$

零行列

(定義) 零行列

すべての成分が0である行列を**零行列**といい、

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

で表す。特に、型にも注意する際には、

$$O_{mn}$$

と書いて、 $m \times n$ 型の零行列を表す。

例

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

加法逆元

(定義) 加法逆元

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、
 $m \times n$ 行列

$$-A = [-a_{ij}]$$

を**加法逆元**という。このとき、

$$A + (-A) = (-A) + A = O_{mn}$$

が成り立つ。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

行列のスカラー倍

(定義) 行列のスカラー倍

スカラー $k \in R$ に対して、 $m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ の k 倍を

$$kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき、 kA の大きさも $m \times n$ になることに注意する。

例

$$2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 12 \\ 2 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 12 & -3 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

行列の性質2

(性質) 行列のスカラー倍に関する性質

A, B を同じ型の行列とし、 $k, l \in \mathbf{R}$ とする。
このとき、次が成り立つ。

$$(1) \quad (k + l)A = kA + lA \quad (\text{行列のスカラーへの分配法則})$$

$$(2) \quad k(A + B) = kA + kB \quad (\text{スカラーの行列への分配法則})$$

$$(3) \quad (kl)A = k(lA) \quad (\text{結合法則})$$

$$(4) \quad 1A = A \quad (\text{公等法則})$$

$$(5) \quad 0A = O \quad (\text{零倍})$$

練習

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、行列演算の法則を用いることにより、次を計算せよ。

$$(1) \quad 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - 2(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A})$$

$$(2) \quad 5\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - 3(2\boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{C}) + 6\boldsymbol{C}$$

$$(3) \quad 3((\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}))$$

行列の積

(定義) 行列の積

$l \times m$ 行列 $A = [a_{ij}]$ と $m \times n$ 行列 $B = [b_{ij}]$ に対して、
その積である $C = AB = [c_{ij}]$ を

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$
$$(1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n)$$

となる行列とする。

ここで、 $C = AB$ の型は

$$l \times n$$

になる。

行列積の覚え方

$$\boxed{l \times m} \times \boxed{m \times n} = \boxed{l \times n}$$

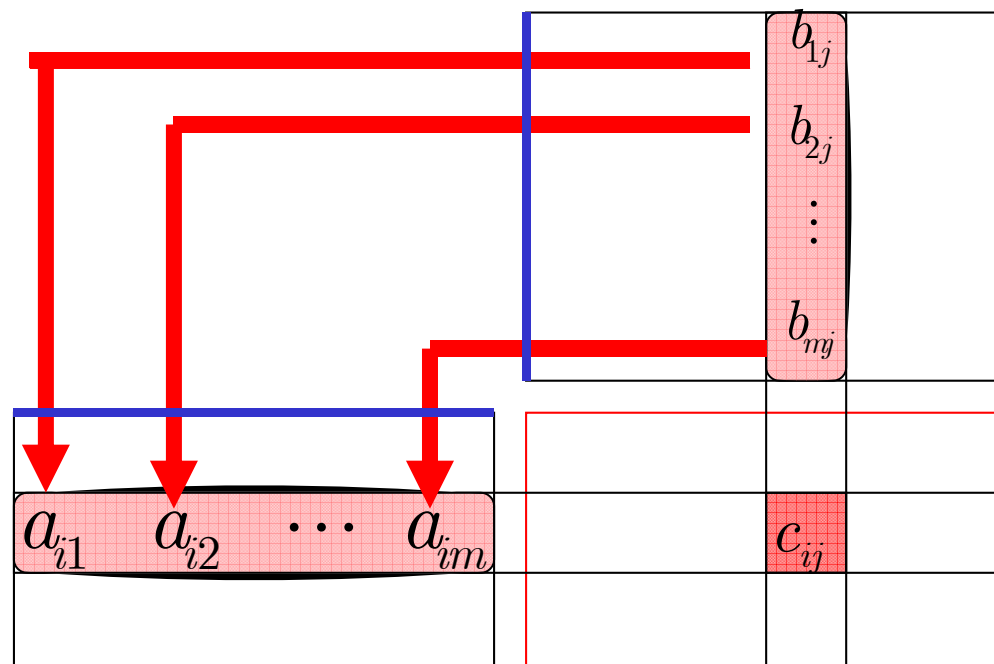
ここが同じでないと乗算できない。

(1)まず、出来上がる行列の型をきめる。

ここが同じでないと乗算できない。

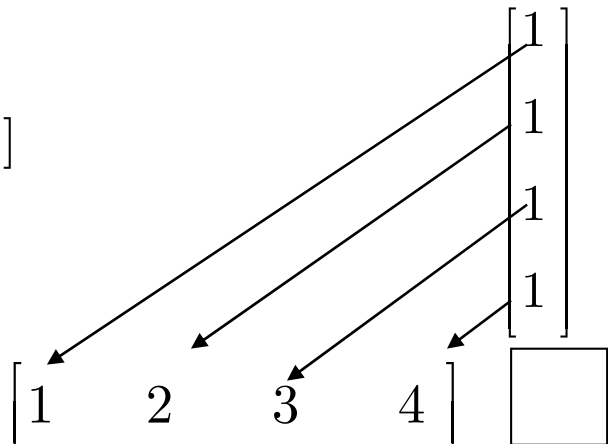
$$\boxed{l \times m} \quad \boxed{m \times n} \quad \boxed{l \times n}$$

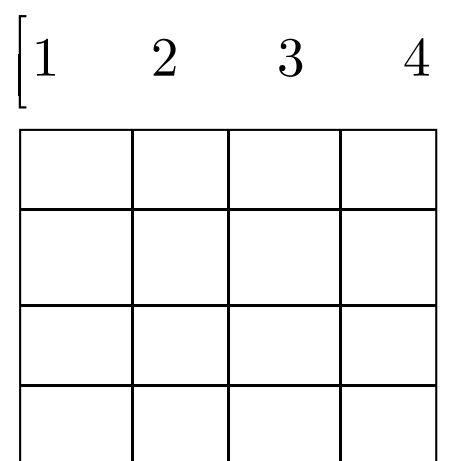
(2) 個々の成分を求める。



例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

$$A B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$


$$B A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$


練習

次の行列の中から、積が定義できるものに対して、積を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質 1

積が定義できる行列に関して、次が成り立つ。

$$(1) \quad (AB)C = A(BC) \quad (\text{結合法則})$$

$$(2) \quad A(B + C) = AB + AC \quad (\text{左分配法則})$$

$$(3) \quad (A + B)C = AC + BC \quad (\text{右分配法則})$$

$$(4) \quad k(AB) = (kA)B = A(kB) \quad (\text{スカラーの移動})$$

このような移動ができるのは、
スカラーに対してだけであることに、
注意すること。

例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 2,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \quad (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$$

$$(2) \quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$$

$$(3) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}$$

$$(4) \quad k(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

解) (1) $(AB)C = A(BC)$

左辺: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$
 $\therefore (AB)C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

右辺: $BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$
 $\therefore A(BC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

よって、左辺＝右辺

これより、 $(AB)C = A(BC) = ABC$

と書いても誤解が無い。

$$(2) \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

左辺: $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

右辺: $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

よって、左辺=右辺

$$(3) \quad (A + B)C = AC + BC$$

左辺:

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(A + B)C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

右辺:

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

よって、左辺=右辺

$$(4) \ k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 2,$$

$$k(\mathbf{AB}) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$k\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$k\mathbf{B} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

よって、成り立つ。

練習

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = -1, \quad l = 3,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \quad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$(2) \quad k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$(3) \quad l(\mathbf{BC}) = (l\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{B}(l\mathbf{C})$$

練習

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix},$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \mathbf{A}(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{A}\mathbf{D}$$

$$(2) \mathbf{B}(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{B}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{D}$$

$$(3) (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}$$

$$(4) (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{D}$$

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質2

$$AB \neq BA$$

となる行列 A 、行列 B がある。

行列の積では、交換法則は成り立たない。

例題

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{とする。}$$

$AB \neq BA$ を確かめよ。

解)

$$\text{左辺} = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 24 \\ -3 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\text{右辺} = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 25 & 5 \\ -3 & 3 & 1 \\ -6 & 12 & -2 \end{bmatrix}$$

よって、左辺 $\neq$ 右辺

行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質3

$AB = O$ でも、

$$A = O \quad \text{または} \quad B = O$$

とは限らない。すなわち、

$$A \neq O \quad \text{かつ} \quad B \neq O$$

でも、

$$AB = O$$

となることがある。

例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

$\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ を確かめよ。

解)

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

転置行列

(定義) 転置行列

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、 $n \times m$ 行列 $B = [b_{ij}]$ を

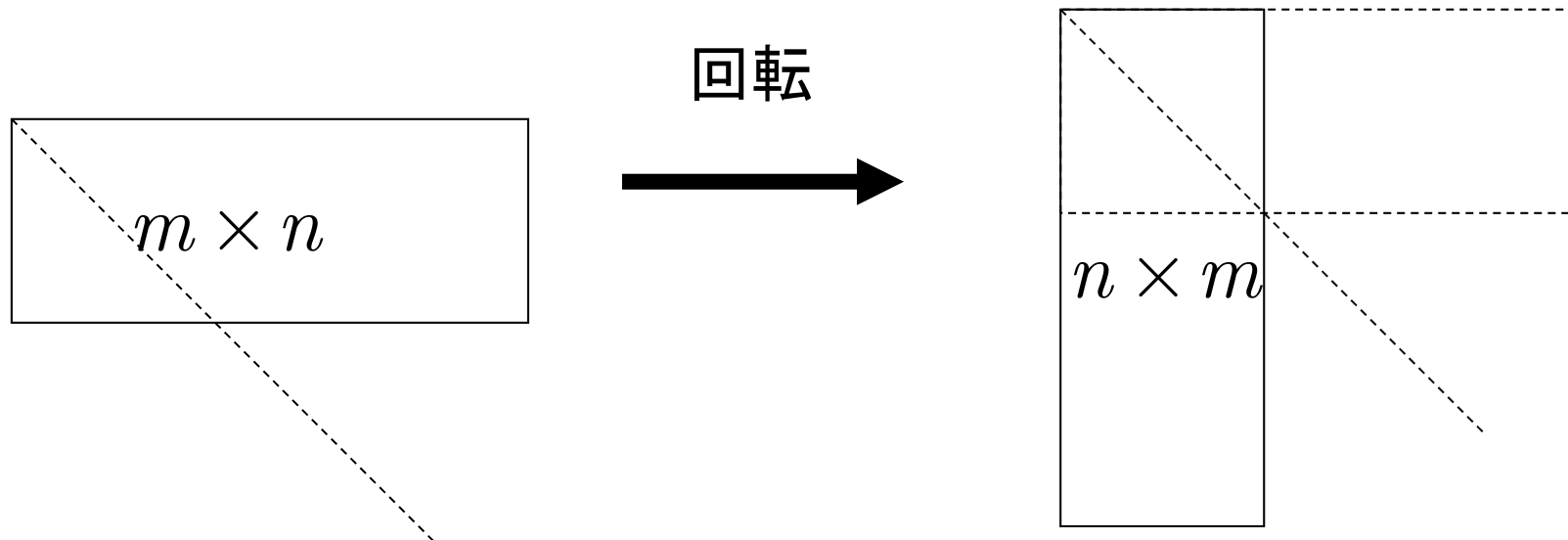
$b_{ij} = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$
と定める。このとき、 B を A の転置行列といい、
 ${}^t A$

と表す。すなわち、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{のとき} \quad {}^t A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

転置行列のイメージ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{転置}} {}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$



例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

練習

次の行列の転置行列を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

転置行列の性質

(性質) 転置行列の性質

A, B を $l \times m$ 行列とし、 C を $m \times n$ 行列とし、 $k \in R$ とする。このとき、次が成り立つ。

$$(1) \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad (\text{和と転置の交換})$$

$$(2) \quad {}^t(kA) = k({}^tA) \quad (\text{スカラー倍と転置の交換})$$

$$(3) \quad {}^t(AC) = ({}^tC)({}^tA) \quad (\text{積と転置の交換})$$

$$(4) \quad {}^t({}^t(A)) = A \quad (\text{転置の交代性})$$

証明

$\mathbf{A} = [a_{ij}], \mathbf{B} = [b_{ij}]$ を $l \times m$ 行列とする。

$$(1) \quad {}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= {}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ &= {}^t([a_{ij}] + [b_{ij}]) \\ &= {}^t([a_{ij} + b_{ij}]) \\ &= [a_{ji} + b_{ji}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B} \\ &= {}^t[a_{ij}] + {}^t[b_{ij}] \\ &= [a_{ji}] + [b_{ji}] \\ &= [a_{ji} + b_{ji}] \end{aligned}$$

よって、左辺＝右辺

$$(2) \quad {}^t(k\mathbf{A}) = k({}^t\mathbf{A})$$

$$\text{左辺} = {}^t(k\mathbf{A})$$

$$= {}^t\left(k[a_{ij}]\right)$$

$$= {}^t([ka_{ij}])$$

$$= [ka_{ji}]$$

$$\text{右辺} = k({}^t\mathbf{A})$$

$$= k({}^t[a_{ij}])$$

$$= k[a_{ji}]$$

$$= [ka_{ji}]$$

よって、左辺＝右辺

$\mathbf{C} = [c_{ij}]$ を $m \times n$ 行列とする。

$$(3) \quad {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C}) = ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$$

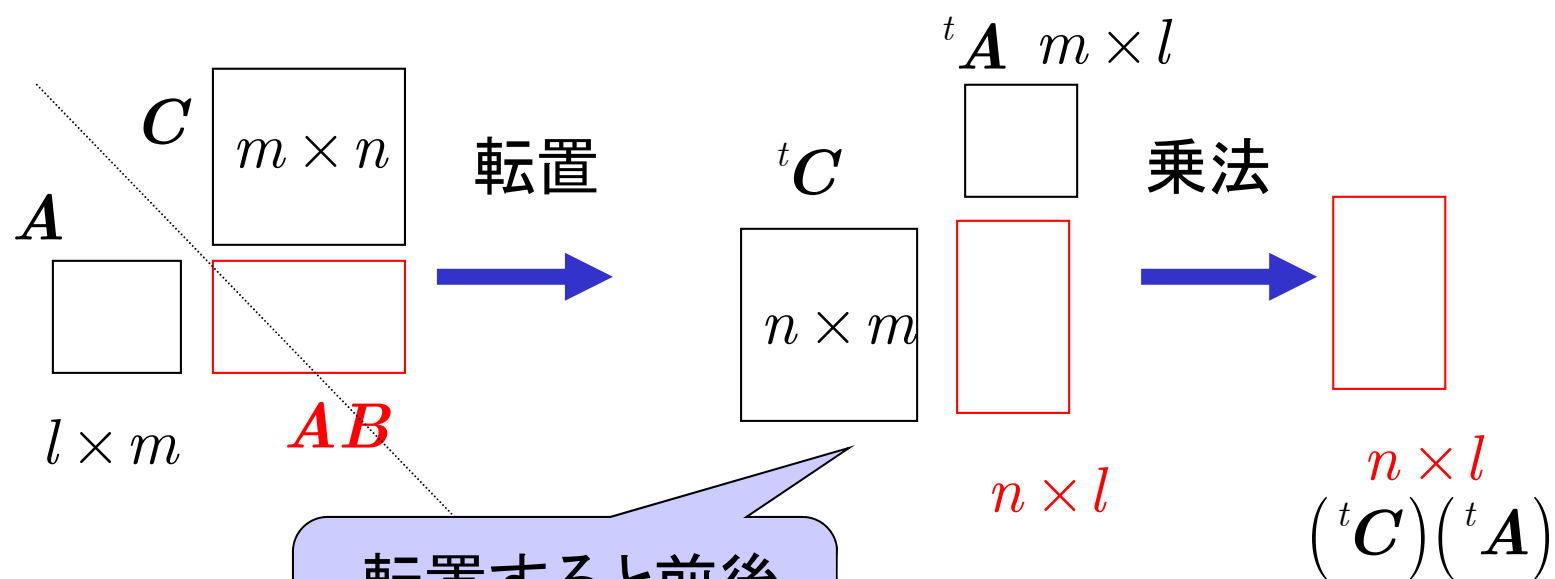
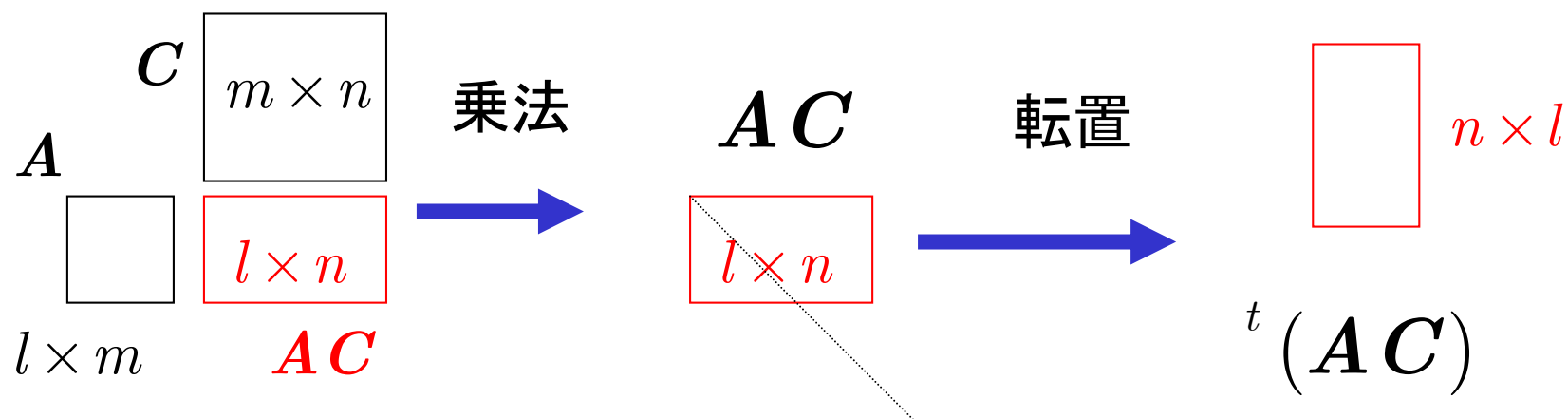
$D = [d_{ij}] = \mathbf{A}\mathbf{C}$ とする。すなわち、

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} c_{kj}$$

左辺	$= {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C})$	右辺	$= ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$
	$= {}^t([d_{ij}])$		$= {}^t[c_{kj}] {}^t[a_{ik}]$
	$= [d_{ji}]$		$= [c_{jk}] [a_{ki}]$
	$= \left[\sum_{k=1}^m a_{jk} c_{ki} \right]$		$= \left[\sum_{k=1}^m c_{jk} a_{ki} \right]$

よって、左辺＝右辺

(3) のイメージ

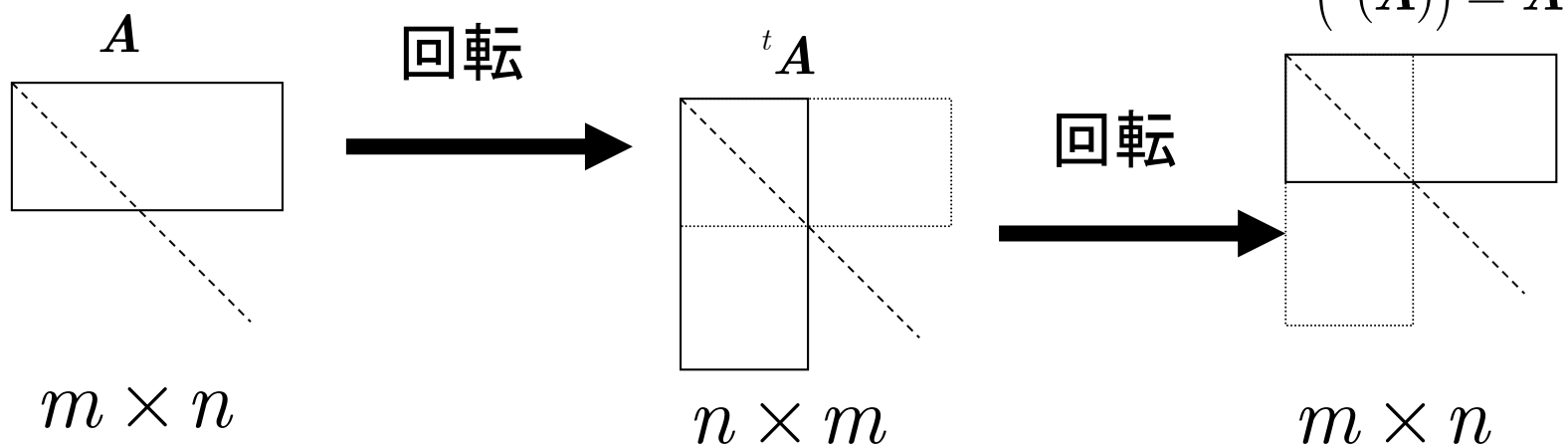


転置すると前後
が入れ替わる

$$(4) \quad {}^t({}^t(A)) = A$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= {}^t({}^t(A)) \\ &= {}^t({}^t[a_{ij}]) \\ &= {}^t[a_{ji}] \\ &= [a_{ij}] \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

QED



例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 3,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \quad {}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$$

$$(2) \quad {}^t(k\mathbf{A}) = k({}^t\mathbf{A})$$

$$(3) \quad {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C}) = ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$$

$$(4) \quad {}^t({}^t(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$$

解) (1) ${}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$

$$\text{左边} = {}^t\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{右边} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 左边 = 右边

(2) ${}^t(k\mathbf{A}) = k({}^t\mathbf{A})$

$$\text{左边} = {}^t\left(3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{右边} = 3\left({}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 左边 = 右边

$$(3) \quad {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C}) = ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$$

$$\text{左边} = {}^t\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{右边} = {}^t\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \text{左边} = \text{右边}$

$$(4) \quad {}^t\left({}^t(\mathbf{A})\right) = \mathbf{A}$$

$$\text{左边} = {}^t\left({}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{右边}$$