

線形代数学

履修にあたって

2010年度1セメスタ開講

平成22年度シラバス：p.65

対象：電子情報システム学科

科目分類：**必修**（システム科学技術基礎科目）

時間割：水曜3時限（12:50-14:20）

講義室：K101(AVホール)

担当：草苅良至（電子情報システム学科）

教員室：G I 511

（オフィスアワー、水曜日1時限）

内線：2095

質問は随時可能。

e-mail:kusakari@akita-pu.ac.jp

サポートページ：

<http://www.akita-pu.ac.jp/system/elect/comp1/kusakari/japanese/teaching/LinearAlgebra/>

注意：受講の際、計算用のノートを準備すること。

成績評価

- 評価方法
 - 定期試験 70%
 - レポート課題 15%
 - 講義内演習(出席) 15%

教科書等

教科書:

「やさしく学べる線形代数」

石村園子著 共立出版社 2000円

参考書:

「テキスト 線形代数」

小寺平治著 共立出版社 2000円

「プログラミングのための線形代数」

平岡和幸、堀玄 共著、オーム社 3000円

「線形代数とその応用」

G・ストラング著 産業図書 4200円

演習書:

「演習と応用 線形代数」

寺田文行・木村宣昭著

サイエンス社 1700円

線形代数学入門

○線形代数学とは、簡単にいうと
「行列」や「ベクトル」
を扱う数学です。

○高校の数学Cで扱った行列を、
より一般的に拡張したものを扱います。

数学Cの復習

数学Cでは主に 2×2 の行列を扱っているはずですが。

ここでは、復習もかねてそれらを順に振り返ります。

○慣用的な行列の表現

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

行列を表す変数には、
太大英文字を用います。

行列の相等

定義：（行列の相等）

行列 A, B が同じ型で対応する成分が等しいとき、
行列 A と行列 B は「等しい」といいます。

記号では以下のように書きます。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = p, & b = q \\ c = r, & d = s \end{cases}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

例題

次の等式が成り立つように、 x, y, u, v の値を定めよ。

$$\begin{pmatrix} x-y & x+y \\ u+1 & 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

解

行列の相等の定義より、

$$\begin{cases} x-y=1, & x+y=3 \\ u+1=2, & 2v=4 \end{cases}$$

が成り立つ。よって、

$$x=2, y=1, u=1, v=2$$

練習

次の等式が成り立つように、 x, y, u, v の値を定めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 3v \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ x & y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} u & v \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

$$\mathbf{A = B}$$

行列の加法

定義：（行列の和）

同じ型の行列 A, B について、対応する成分の和を成分とする行列を、
 A と B の和といい、

$$A + B$$

と表す。

記号では以下のように書く。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & d + s \end{pmatrix}$$

例題

次の計算をせよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

解

行列の和の定義より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+(-4) & -2+3 \\ -3+2 & 6+(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

練習

次の計算をせよ。

(1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

加法逆元($-A$)

定義：（加法逆元）

行列 A に対して、 A の各成分の符号を反転させた行列を

$-A$

で表す。

（なお、この行列 $-A$ は、加法に関する A の逆元（**加法逆元**）とも呼ばれる。）

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき、 } -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

零行列

定義：（零行列）

すべての成分が0である行列を**零行列**といい、

$\mathbf{0}$
で表す。

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{に対して、次の行列を求めよ。}$$

$$(1) \quad -A \qquad (2) \quad -(-A) \qquad (3) \quad A + (-A)$$

解

$$(1) \quad -A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad -(-A) &= -\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad A + (-A) &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{O} \end{aligned}$$

練習

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & x \end{pmatrix}$$

に対して、次の行列を求めよ。

(1) $-A$

(2) $-(-A)$

(3) $A + (-A)$

加法についての性質

性質：（行列加法の性質）

同じ型の行列の加法について、
次ぎのことが成り立つ。

1. 交換法則 $A + B = B + A$
2. 結合法則 $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. 零行列と、加法逆元の存在。

$$A + O = A, \quad O + A = A,$$

$$A + (-A) = O, \quad (-A) + A = O$$

行列の差

定義：（行列の減法）

同じ型の行列 A と B に対して

$$A + (-B)$$

を、

A と B の **差** といひ

$$A - B$$

と書く。記号で表すと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - p & b - q \\ c - r & d - s \end{pmatrix}$$

練習

次の計算をせよ。

(1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の実数倍（スカラー倍）

定義：（行列のスカラー倍）

実数 k に対して、行列 A の各成分を k 倍する行列を

kA

と書く。記号では次のように書く。

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

性質：（特別なスカラー倍）

また、実数倍の定義から、次ぎの性質が成り立つ。

$$1A = A, \quad (-1)A = -A, \quad 0A = \mathbf{O}, \quad k\mathbf{O} = \mathbf{O}$$

例題

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{に対して、次の行列を求めよ。}$$

$$(1) \quad 3A \qquad (2) \quad (-2)A$$

解

(1)

$$3A = 3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-1) & 3 \times 2 \\ 3 \times 4 & 3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

(2)

$$(-2)A = (-2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \times (-1) & (-2) \times 2 \\ (-2) \times 4 & (-2) \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}$$

練習

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad k = 2, l = -3$$

とする。

次の行列を求めよ。

(1) kA

(2) lA

(3) kB

(4) lB

実数倍についての性質

性質：（行列のスカラー倍）

行列の実数倍について、次ぎのことが成り立つ。
ここで、 A, B は同じ型の行列で、 k, l は実数である。

1. $(kl)A = k(lA)$
2. $(k + l)A = kA + lA$
3. $k(A + B) = kA + kB$

練習

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

次の行列を求めよ。

(1) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{C}$

(2) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 4\mathbf{C}$

(3) $2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{A}$

(4) $2(3\mathbf{A} - \mathbf{B}) + 2\mathbf{B} - \mathbf{C}$

ベクトル

定義: (ベクトル)

x 成分、 y 成分を並べた (x, y) のように、
複数の成分を並べたもの。

成分が n 個のベクトルは、

$1 \times n$ あるいは、 $n \times 1$ の行列とみなせる。

$1 \times n$ のとき、行ベクトル

$n \times 1$ のとき、列ベクトルとよぶ。

$$(-2 \quad 3) \quad a = (a \quad b)$$

行ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

列ベクトル

ベクトルと行列の積

定義：（ベクトルと行列の積）

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = (p \quad q)$$

とする。

行列と列ベクトルの積

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

行ベクトルと行列の積

$$\mathbf{p}A = (p \quad q) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (pa + qc \quad pb + qd)$$

行列と連立方程式

行列とベクトルを用いて連立方程式を表現できる。

次のような連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

は、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

と書く事ができる。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{とおくと、}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{p} \quad \dots \textcircled{3}$$

とも書ける。

①、②、③は、同じ連立方程式の異なる表現。

1次方程式と2元連立1次方程式

一次方程式

未知数

既知の値

$$5x = 3$$

既知の値

2元連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ -x + 5y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ として、}$$

成分全て
既知の値

$$Ax = p$$

成分全て
既知の値

成分全て
未知数

2組の式から行列の積へ

次のような2組の式を考える。

$$\begin{cases} ax+by = s \\ cx+dy = t \end{cases} \dots \textcircled{1} \quad \begin{cases} es+ft = u \\ gs+ht = v \end{cases} \dots \textcircled{2}$$

このとき、 u, v を s, t を用いずに、 x, y で表す。

①の s, t を、②に代入する。

$$\begin{cases} u = (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ v = (ga + hc)x + (gb + hd)y \end{cases} \dots \textcircled{3}$$

これを行列の表現で調べてみる。

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \dots \textcircled{2},$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots \textcircled{3},$$

と、表現できる。

ここで、 $\textcircled{1}'$ と $\textcircled{2}'$ から形式的に、次のような表現を書いてみる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots \textcircled{3}',$$

このことより、

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

と決めてあげると都合がよさそう。

行列積の定義

定義: (行列どうしの積)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

行列 B と行列 A の積 BA は、

$$BA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

で定義される。

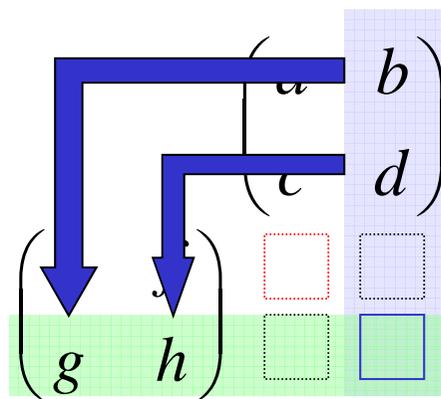
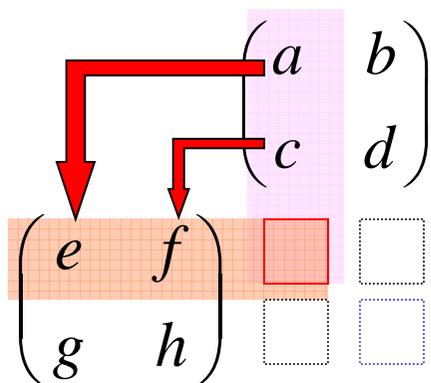
行列積の覚え方

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ の計算}$$

(1) まず、出来上がる行列の型をきめる。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

(2) 個々の成分を求める。



練習

次の行列を求めよ。

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列積の性質

性質：（行列どうしの積の交換不可性）

$$AB \neq BA$$

となる行列A、行列Bがある。

例題

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

AB , BA を計算することによって、
 $AB \neq BA$ を確かめよ。

解

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+0 \\ 0+6 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+4 \\ 3+0 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{なので、} \quad \mathbf{AB \neq BA}$$

単位行列

定義：（単位行列）

対角成分が1で、他の成分が0である行列を
単位行列 (unit matrix, Identity matrix)
といい、 E あるいは I で表す。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

単位行列と零行列の性質

性質：（単位行列と零行列）

A を任意の正方行列、 A と同じ型の単位行列を I
零行列を O とする。このとき、次が成り立つ。

1. $AI = IA = A$

2. $AO = OA = O$

比較せよ。

$a \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする。このとき次が成り立つ。

1. $a \times 1 = 1 \times a = a$

2. $a \times 0 = 0 \times a = 0$

零因子

定義：（零因子）

行列の積では、 $A \neq \mathbf{O}$ かつ $B \neq \mathbf{O}$ であっても、
 $AB = \mathbf{O}$ となることがある。
このとき、 A および B を零因子という。

比較せよ。

$a, b \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする。このとき次が成り立つ。

$$a \times b = 0 \quad \rightarrow \quad (a = 0) \vee (b = 0)$$

（ $a \times b = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$ と読む。）

例

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2 & -4+4 \\ 4-4 & -8+8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

逆行列

定義：（逆行列）

正方行列 A に対して、

$$AX = XA = I$$

を満たす正方行列 X が存在するならば、

X を A の逆行列といい

A^{-1}
で表す。

比較せよ。

$a \neq 0$ とする。

$$a \times b = b \times a = 1$$

を満たす実数 b を a の逆数といい、 a^{-1} と表す。

$$b = a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{である。}$$

連立方程式の解法から逆行列へ

次のような連立方程式を考える。

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad \text{行列で表すと} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{とおく。}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{p}$$



$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{p}$$

$$ax = b \Leftrightarrow x = a^{-1}b$$

$$5x = 3 \Leftrightarrow x = 5^{-1} \times 3 = \frac{3}{5}$$

通常のスカラーでの規則に、
合うように逆行列 A^{-1} を
定義したい。

$$\begin{cases} ax + by = p \cdots (1) \\ cx + dy = q \cdots (2) \end{cases} \text{を解く。}$$

$$\begin{array}{r} (1) \times d - (2) \times b \\ \quad adx + bdy = dp \\ - \quad bcx + bdy = bq \\ \hline (ad - bc)x = dp - bq \end{array}$$

$ad - bc \neq 0$ と**仮定**すると、

$$x = \frac{1}{(ad - bc)}(dp - bq)$$

$$(1) \times c - (2) \times a$$

$$\begin{array}{r} \quad acx + bcy = cp \\ - \quad acx + ady = aq \\ \hline (bc - ad)y = cp - aq \end{array}$$

$ad - bc \neq 0$ と**仮定**すると、

$$y = \frac{1}{(ad - bc)}(-cp + aq)$$

よって、 $ad - bc \neq 0$ のときには、

$$\begin{cases} ax + by = p \cdots (1) \\ cx + dy = q \cdots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{(ad - bc)}(dp - bq) \\ y = \frac{1}{(ad - bc)}(-cp + aq) \end{cases}$$

行列を用いると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$ad - bc \neq 0$ ならば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

この部分を逆行列にしたい。

逆行列の存在判定

性質：（逆行列の存在する条件）

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$(ad - bc) \neq 0$ のとき、 A の逆行列 A^{-1} が存在して、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$(ad - bc) = 0$ のとき、 A の逆行列は存在しない。

行列式

定義：（2次の行列式）

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

このとき、 A の行列式 $|A|$ は次式で定義される。

$$|A| = ad - bc$$

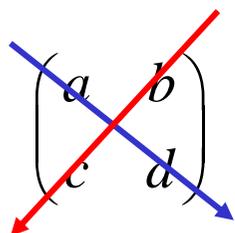
行列式は、次ぎのように書かれることもある。

$$\det(A) = ad - bc$$

行列式・逆行列の求め方

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$|A|$ の求め方



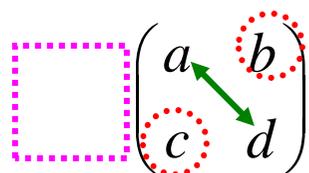
乗算する符号が正

乗算して符号が負

$$|A| = ad - bc$$

A^{-1} の求め方

$|A| \neq 0$ を確認して、



交換

乗算して符号が負

$\frac{1}{|A|}$ 倍

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

練習

次の行列に対して、逆行列を持つかどうかを調べ、もし持てばそれを求めよ。

(1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

逆行列の性質

性質：（逆行列の存在する条件）

正方行列 A が逆行列 A^{-1} を持つとき、次のことが成り立つ。

$$1. \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$2. \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

同じ型の正方行列 A 、 B が共に逆行列を持つとき、積 AB も逆行列を持ち、次のことが成り立つ。

$$3. \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

順序に注意すること。