0章　数学基礎

1

大学では、高校より厳密に議論を行う。そのために、議論の対象を明確にする必要がある。

集合

（定義）集合

ある“もの”（基本的な対象、概念）の集まりを、**集合**という。
集合に含まれる“もの”を、集合の**要素**または**元**という。

集合では、
「含まれる」か「含まれないか」
のどちらの判定が厳密に判断できなければならない。

集合については、
3セメスタ開講の「離散数学」で詳しく扱う。

2

集合の表現1：集合の外延的表現

要素を明示する表現方法。

中括弧で、囲う。

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

要素を明示的に列挙する。

慣用的に、英大文字を用いる。

カンマで区切る

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

自然数の集合

類推が容易なとき、･･･で表す。

3

集合の表現2：集合の内包的表現

要素が含まれるための必要十分条件で定義する方法。

$$Y = \{x \mid P(x)\}$$

代表元、慣用的に英小文字

縦棒“｜”で左右に分ける。

真偽が判定できる文（命題）、すなわち必要十分条件

$$K = \{n \mid n \geq 100, n は偶数\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q は整数, q \neq 0 \right\}$$

4

空集合

（定義）空集合

要素が一つも無いようなものも集合と考え、
それを**空集合**といい、
ϕ あるいは {}
と表す。

$$\phi = \{\ \}$$

要素が一つも無いので，括弧だけを記述する。

5

慣用的な集合の記号

$$\mathbb{N} = \{x \mid x は自然数\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{x \mid x は整数\} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$
$$\mathbb{Q} = \{x \mid x は有理数\}$$
$$\mathbb{R} = \{x \mid x は実数\}$$
$$\mathbb{C} = \{x \mid x は複素数\}$$

これらの記号は万国共通に用いられる。

6

集合の要素と要素の包含

（定義）集合の要素

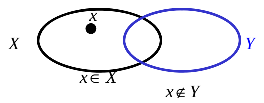
集合 X に対して、もの x が X の要素であるとき、すなわち
もの x が集合 X に含まれるとき、

$$x \in X$$

と表し、
集合 X に対して、もの x が X の要素で無いとき、すなわち
もの x が集合 X に含まれないとき、

$$x \notin X$$

と表す。



7

例題

$A = \{1,3,5,7,9\}$ とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを答えよ。
（真偽を判定せよ。）

（1） $1 \in A$　（2） $2 \in A$　（3） $3 \notin A$

（4） $4 \notin A$　（5） $5 \in A$　（6） $6 \in A$

解

（1）○（真）（2）×（偽）（3）×（偽）
（4）○（真）（5）○（偽）（6）×（偽）

8

練習

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを示せ。

（1） $10 \in \mathbb{N}$　（2） $-1 \in \mathbb{N}$　（3） $132124 \notin \mathbb{N}$

（4） $3.4 \notin \mathbb{N}$　（5） $10 \times 4 + 3 \in \mathbb{N}$　（6） $10 \div 4 + 3 \in \mathbb{N}$

9

部分集合

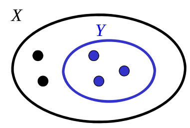
（定義）部分集合

2つの集合 X, Yについて、
$y \in Y \Rightarrow y \in X$
が成り立つとき、
Y は X の部分集合であるといい、
$Y \subset X$ または $Y \subseteq X$
と表す。

$\Rightarrow$
（ならば）とよむ。
次の論理に従う。

A	B	$A \Rightarrow B$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

F：偽
T：真



$Y \subseteq X$

10

例題

次の集合において、
部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$
$$B = \{1,3,5\}$$
$$C = \{3,5\}$$
$$D = \{2,3,5,7\}$$

解

$A \subseteq A,\ B \subseteq A,\ \ C \subseteq A$

$B \subseteq B,\ C \subseteq B$

$C \subseteq C$

$C \subseteq D,\ D \subseteq D$

11

練習

次の集合において、
部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

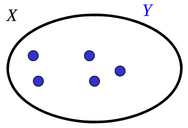
$$\mathbb{N}$$
$$A = \left\{ x \mid x\text{は}x^2 - 5x + 6 = 0\text{の解} \right\}$$
$$B = \left\{ x \mid x\text{は素数} \right\}$$
$$C = \left\{ x \mid x\text{は奇数} \right\}$$

12

集合の相等

（定義）集合の相等

2つの集合 X, Yについて、
$Y \subseteq X$ かつ $X \subseteq Y$
が成り立つとき、
X と Y は「等しい」といい、
$X = Y$
と表す。



$X = Y$

13

等しい集合の例

$\{1,3,5,7\} = \{3,7,1,5\}$

順序は関係ない。

$\{2,2,4,6,6,6,8\} = \{2,4,4,4,6,6,8,8,8,8\}$

個数は関係ない。

$\{x \mid x \text{は偶数}\} = \{y \mid \text{ある} k \in \mathbb{Z} \text{が存在して} y = 2k\}$

必要十分条件の文字（代表元）は関係ない。

$\{1,2,3,4\} \neq \{1,2,3,3\}$

$\{10,9,8,7\} \neq \{9,8,7,6\}$

14

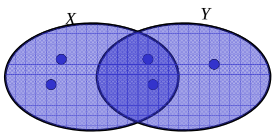
和集合

（定義）和集合

2つの集合 X, Yについて、
X または Y の要素全体からなる集合を
X と Y の和集合といい、
$X \cup Y$
と表す。すなわち、

$X \cup Y \equiv \{x \mid x \in X \text{または} x \in Y\}$

左辺を右辺で定義している。



$X \cup Y$

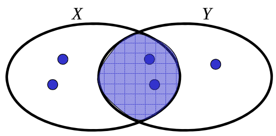
15

共通部分

（定義）共通部分

2つの集合 X, Yについて、
X と Y のどちらにも含まれる要素全体からなる集合を
X と Y の共通部分（積集合）といい、
$X \cap Y$
と表す。すなわち、

$X \cap Y \equiv \{x \mid x \in X \text{かつ} x \in Y\}$



$X \cap Y$

16

例題

$A = \{1,2,3,4,5\}$　　$B = \{1,3,5\}$
$C = \{3,5\}$　　$D = \{2,3,5,7\}$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

(1) $A \cup D$　(2) $A \cap B$　(3) $B \cup D$　(4) $A \cap B \cap C$

解

(1) $A \cup D = \{1,2,3,4,5,7\}$

(2) $A \cap B = \{1,3,5\}$

(3) $B \cup D = \{1,2,3,5,7\}$

(4) $A \cap B \cap C = \{3,5\}$

17

練習

$A = \{2,4,6,8\}$　　$B = \{1,3,5\}$
$C = \{3,6,9\}$　　$D = \{5,7,8,9\}$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

(1) $A \cup B$　　(2) $A \cap B$

(3) $B \cup D$　　(4) $A \cap D$

(5) $A \cup B \cup C$　　(6) $B \cup C \cup D$

18

集合の仲間

（定義）順序集合（列、組）

ある“もの”（基本的な対象、概念）の順序を
考慮して並べた集まりを、
順序集合（列、組）という。

丸括弧で、囲う。

$$L = (3,6,9,12)$$

カンマで区切る

19

順序集合の相等例

$$(3,6,9,12) = (3,6,9,12)$$

$$(3,6,9,12) \neq (6,9,12,3)$$

順序が違えば、
等しくない。

$$(3,6,9,12) \neq (3,6,9)$$

要素数が違え
ば、等しくない。

$$(3,6,9,12) \neq (3,6,9,15)$$

要素が違えば、
等しくない。

20

写像（関数）

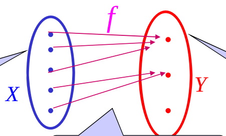
（定義）写像（関数）

2つの集合 X,Y について、X の各要素事に Y の
ある要素（1つ）が対応づけられているとき、
この対応づけのことを X から Y への写像（関数）という。
f が X から Y への写像を

$$f: X \to Y$$

と表す。

定義域（集合）と値域（集合）
が共に“数”のとき関数という
流儀もある。



定義域と
いいます。

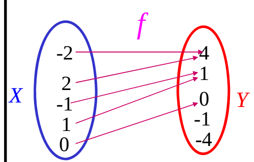
値域と
いいます。

行き先は一箇所

21

（定義）要素の像

2つの集合 X,Y に対する写像を $f: X \to Y$
とする。このとき、X の要素 x（$x \in X$）に対応する
Y の要素を
$f(x)$
と表す。（このときは、もちろん $f(x) \in Y$ である。）
また、$y = f(x)$ のとき、$f: x \mapsto y$ とも書く。



$f(-1) = 1$

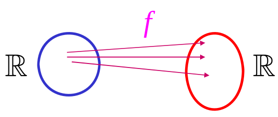
対応関係を式で定めることもあるが、
式でなくても写像は定義できる。

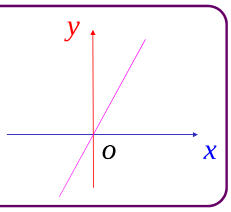
$x \in X$ に対して、$f(x) = x^2 \in Y$

代表元といいます。

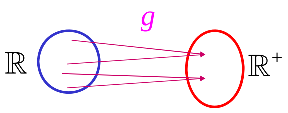
22

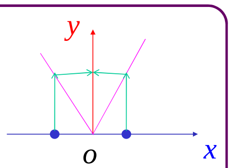
関数例





$$y = f(x) = 2x$$



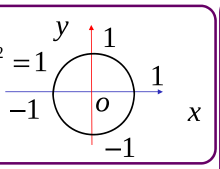


$$y = g(x) = |x|$$

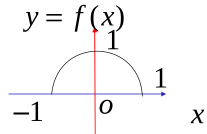
23

関数でない対応と関数

$$x^2 + y^2 = 1$$

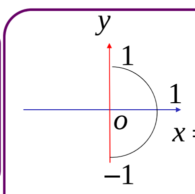


$y = f(x)$



$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f: [-1,1] \to [0,1]$$



$$x = g(y)$$

$$g(y) = \sqrt{1-y^2}$$

$$g: [-1,1] \to [0,1]$$

24

練習

次式で定義される対応(関係)が関数かどうかを答えよ。関数である場合には、どの変数からどの変数への関数かと、定義域、値域を答えよ。

(1) $x+y=4$

(2) $x+|y|=4$

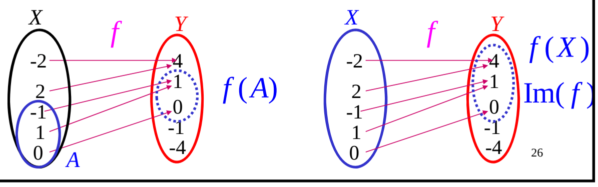
(3) $x^2+4y^2=4$

(4) $x^2+4y^2=4(y\geq 0)$

像

(定義)定義域の像

写像 $f:X\to Y$ の定義域 X の部分集合 $A(A\subseteq X)$に対して、値域 Y の部分集合
$\{f(x)\mid x\in A\}$
を写像 f による A の像(Image)といい、
$f(A)$
と表す。また、$A=X$ のとき、$f(X)$を
$\mathrm{Im}(f)$
とも表す。



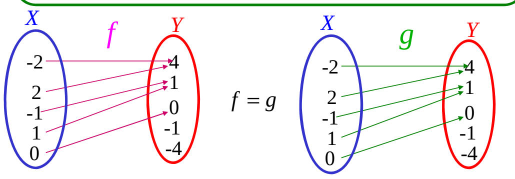
写像の相等

(定義)写像の相等

集合 X から Y への2つの写像 f,g は、
$(f:X\to Y, g:X\to Y)$

任意の $x\in X$ に対して、 $f(x)=g(x)$

が成り立つときに「等しい」といい、
$f=g$
と表す。



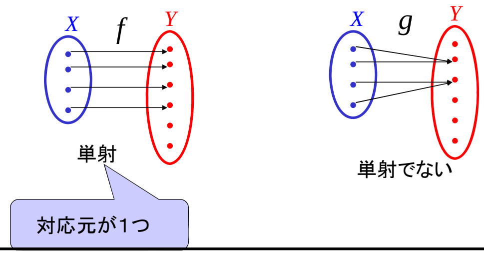
単射

(定義)単射

集合 X から Y への写像 $f:X\to Y$が、

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

を満たすとき、 f は単射(写像)であるという。



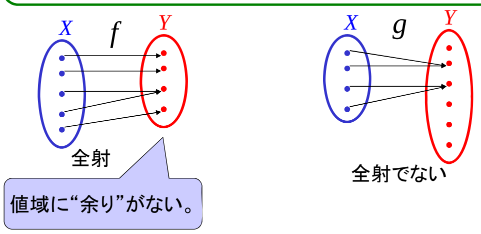
全射

(定義)全射

集合 X から Y への写像 $f:X\to Y$が、

$f(X)=Y$

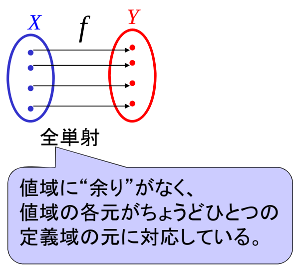
を満たすとき、 f は全射(写像)であるという。
または、上への写像ともいう。



全単射

(定義)全単射

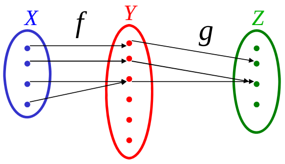
単射かつ全射であるような写像を、
全単射(写像)という。
また、全単射は、1対1上への写像ともいう。

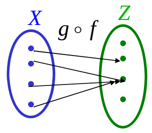


合成写像

（定義）合成写像

集合 X,Y,Z に対して、2つの写像
$f:X\to Y, g:Y\to Z$
があるとき、X の各要素 x を Z の要素 $g(f(x))$
に対応させることにより X から Z への写像ができる。
これを、f,g の合成写像といい、
$g\circ f$
と表す。すなわち、
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
である。





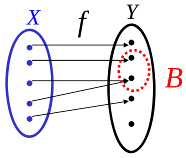
31

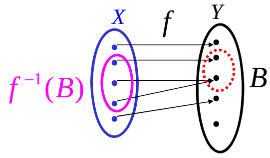
逆像

（定義）逆像

写像 $f:X\to Y$ に対して、Y の部分集合 B をとると、
$\{x\,|\,f(x)\in B\}$
は X の部分集合である。これを、f による B の逆像といい
$f^{-1}(B)$
と表す。すなわち、

$$f^{-1}(B)\equiv\{x\,|\,f(x)\in B\}$$



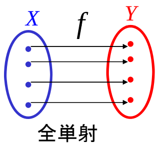


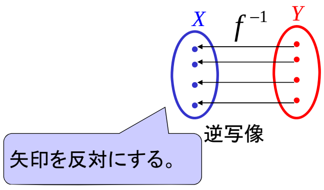
32

逆写像

（定義）逆写像

写像 $f:X\to Y$ が全単射ならば、Y の各要素 y に
対して、X の要素 $f^{-1}(y)$ を対応させる写像を定義できる。
これを、f の逆写像といい、f^{-1} と表す。





33