

0章 数学基础

大学では、高校より厳密に議論を行う。そのために、議論の対象を明確にする必要がある。

集合

(定義) 集合

ある“もの”(基本的な対象、概念)の集まりを、**集合**という。

集合に含まれる“もの”を、集合の**要素**または**元**という。

集合では、
「含まれる」か「含まれないか」
のどちらの判定が厳密に判断できなければならない。

集合については、
3セメスタ開講の「離散数学」で詳しく扱う。

集合の表現1: 集合の外延的表現

要素を明示する表現方法。

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

中括弧で、囲う。

慣用的に、
英大文字を用いる。

カンマで区切る

要素を明示的
に列挙する。

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

自然数の集合

類推が容易なとき、
...で表す。

集合の表現2: 集合の内包的表現

要素が含まれるための必要十分条件で定義する方法。

$$Y = \{x \mid P(x)\}$$

代表元、
慣用的に英
小文字

縦棒“ $\mid$ ”で左
右に分ける。

真偽が判定できる文(命題)、
すなわち必要十分条件

$$K = \{n \mid n \geq 100, n \text{ は偶数}\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \text{ は整数}, q \neq 0 \right\}$$

空集合

(定義) 空集合

要素が一つも無いようなものも集合と考え、
それを**空集合**といい、
 ϕ あるいは $\{\}$
と表す。

$$\phi = \{\}$$

要素が一つも無いので、
括弧だけを記述する。

慣用的な集合の記号

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \text{は自然数}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{は整数}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{は有理数}\}$$

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{は実数}\}$$

$$\mathbb{C} = \{x \mid x \text{は複素数}\}$$

これらの記号は万国共通に用いられる。

集合の要素と要素の包含

(定義) 集合の要素

集合 X に対して、もの x が X の要素であるとき、すなわち
もの x が集合 X に含まれるとき、

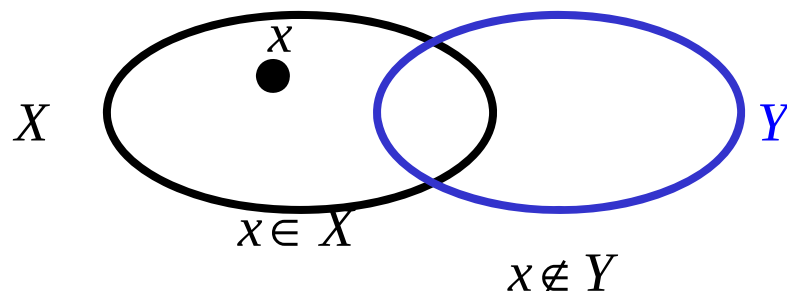
$$x \in X$$

と表し、

集合 X に対して、もの x が X の要素で無いとき、すなわち
もの x が集合 X に含まれないとき、

$$x \notin X$$

と表す。



例題

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを答えよ。
(真偽を判定せよ。)

(1)

$$1 \in A$$

(2)

$$2 \in A$$

(3)

$$3 \notin A$$

(4)

$$4 \notin A$$

(5)

$$5 \in A$$

(6)

$$6 \in A$$

解

(1) ○ (真) (2) × (偽) (3) × (偽)

(4) ○ (真) (5) ○ (偽) (6) × (偽)

練習

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを示せ。

(1)

$$10 \in \mathbb{N}$$

(2)

$$-1 \in \mathbb{N}$$

(3)

$$132124 \notin \mathbb{N}$$

(4)

$$3.4 \notin \mathbb{N}$$

(5)

$$10 \times 4 + 3 \in \mathbb{N}$$

(6)

$$10 \div 4 + 3 \in \mathbb{N}$$

部分集合

(定義) 部分集合

2つの集合 X, Y について、

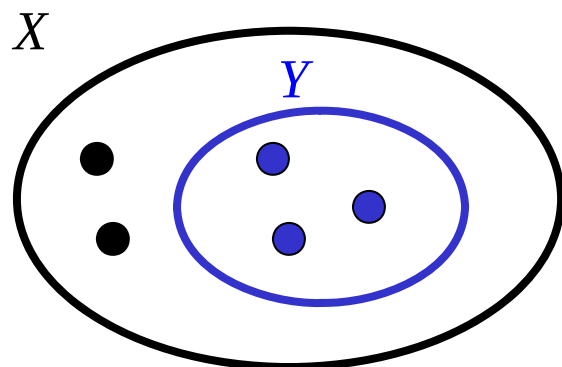
$$y \in Y \Rightarrow y \in X$$

が成り立つとき、

Y は X の部分集合であるといい、

$$Y \subset X \text{ または } Y \subseteq X$$

と表す。



$$Y \subseteq X$$

$\Rightarrow$

(ならば)とよむ。
次の論理に従う。

A	B	$A \Rightarrow B$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

F : 偽

T : 真

例題

次の集合において、
部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{3, 5\}$$

$$D = \{2, 3, 5, 7\}$$

解

$$A \subseteq A, \quad B \subseteq A, \quad C \subseteq A$$

$$B \subseteq B, \quad C \subseteq B$$

$$C \subseteq C$$

$$C \subseteq D, \quad D \subseteq D$$

練習

次の集合において、
部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

$$\mathbb{N}$$

$$A = \{x \mid x \text{ は } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ の解}\}$$

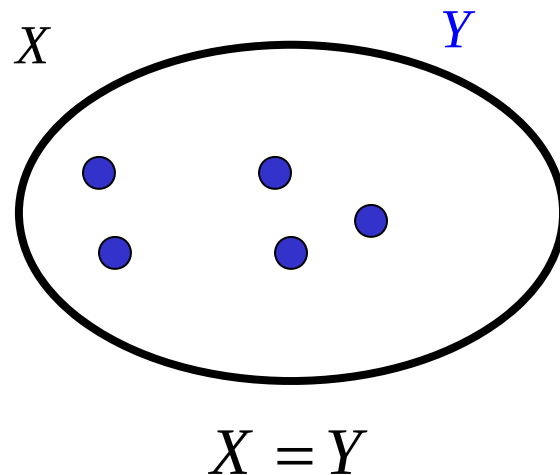
$$B = \{x \mid x \text{ は素数}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ は奇数}\}$$

集合の相等

(定義) 集合の相等

2つの集合 X, Y について、
 $Y \subseteq X$ かつ $X \subseteq Y$
が成り立つとき、
 X と Y は「等しい」といい、
 $X = Y$
と表す。



等しい集合の例

$$\{1, 3, 5, 7\} = \{3, 7, 1, 5\}$$

順序は関係ない。

$$\{2, 2, 4, 6, 6, 6, 8\} = \{2, 4, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 8, 8\}$$

個数は関係ない。

$$\{x \mid x \text{は偶数}\} = \{y \mid \text{ある } k \in \mathbb{Z} \text{ が存在して } y = 2k\}$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \neq \{1, 2, 3, 3\}$$

$$\{10, 9, 8, 7\} \neq \{9, 8, 7, 6\}$$

必要十分条件の文字(代表元)は関係ない。

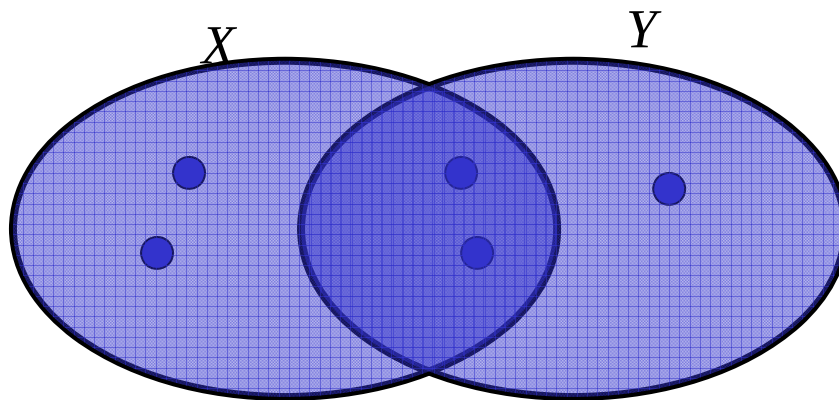
和集合

(定義)和集合

2つの集合 X, Y について、
 X または Y の要素全体からなる集合を
 X と Y の和集合といい、
 $X \cup Y$
と表す。すなわち、

$$X \cup Y \equiv \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$$

左辺を右辺で
定義している。



$X \cup Y$

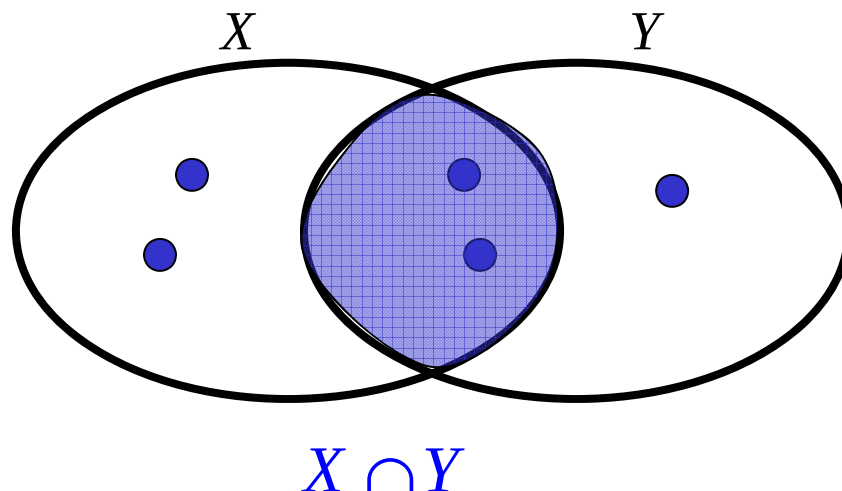
共通部分

(定義) 共通部分

2つの集合 X, Y について、
 X と Y のどちらにも含まれる要素全体からなる集合を
 X と Y の **共通部分 (積集合)** といい、

$X \cap Y$
と表す。すなわち、

$$X \cap Y \equiv \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \in Y\}$$



例題

$$\begin{array}{ll} A = \{1, 2, 3, 4, 5\} & B = \{1, 3, 5\} \\ C = \{3, 5\} & D = \{2, 3, 5, 7\} \end{array}$$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

$$(1) A \cup D \quad (2) A \cap B \quad (3) B \cup D \quad (4) A \cap B \cap C$$

解

$$(1) A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

$$(2) A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

$$(3) B \cup D = \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

$$(4) A \cap B \cap C = \{3, 5\}$$

練習

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{3, 6, 9\}$$

$$D = \{5, 7, 8, 9\}$$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

(1) $A \cup B$

(2) $A \cap B$

(3) $B \cup D$

(4) $A \cap D$

(5) $A \cup B \cup C$

(6) $B \cup C \cup D$

集合の仲間

(定義) 順序集合 (列、組)

ある“もの”(基本的な対象、概念)の順序を
考慮して並べた集まりを、
順序集合 (列、組)という。

丸括弧で、囲う。

$$L = (3, 6, 9, 12)$$

カンマで区切る

順序集合の相等例

$$(3, 6, 9, 12) = (3, 6, 9, 12)$$

$$(3, 6, 9, 12) \neq (6, 9, 12, 3)$$

順序が違えば、
等しくない。

$$(3, 6, 9, 12) \neq (3, 6, 9)$$

要素数が違え
ば、等しくない。

$$(3, 6, 9, 12) \neq (3, 6, 9, 15)$$

要素が違えば、
等しくない。

写像(関数)

(定義)写像(関数)

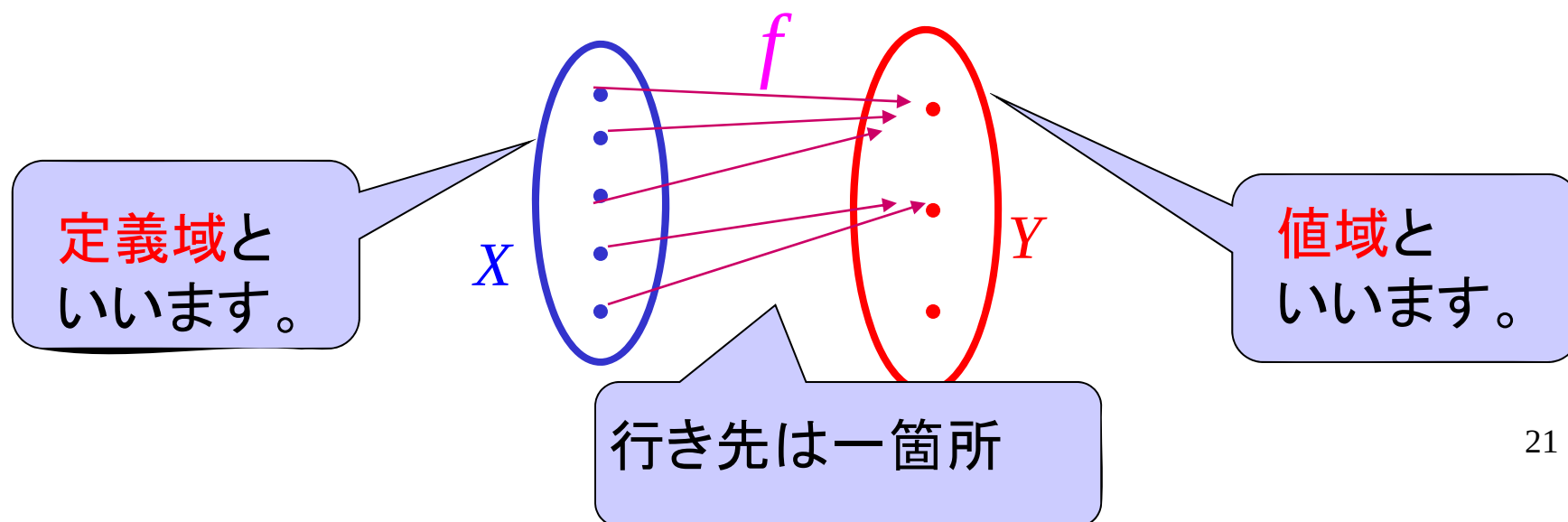
2つの集合 X, Y について、 X の各要素事に Y のある要素(1つ)が対応づけられているとき、この対応づけのことを X から Y への写像(関数)という。

f が X から Y への写像を

$$f : X \rightarrow Y$$

と表す。

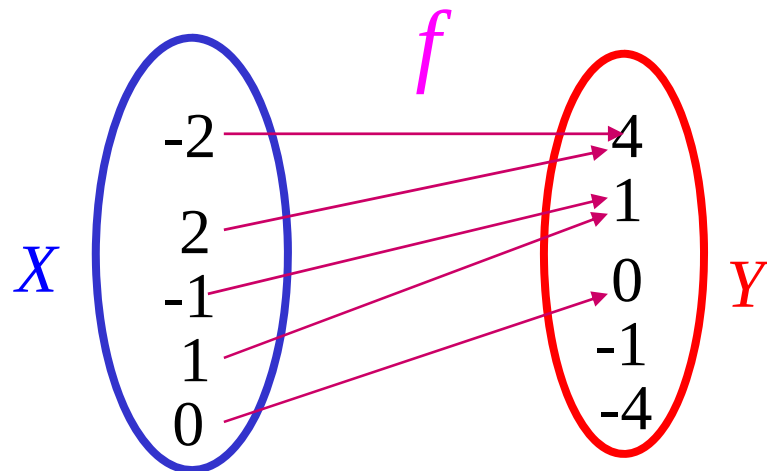
定義域(集合)と値域(集合)が共に“数”のとき関数という流儀もある。



(定義) 要素の像

2つの集合 X, Y に対する写像を $f: X \rightarrow Y$ とする。このとき、 X の要素 x ($x \in X$) に対応する Y の要素を $f(x)$

と表す。(このときは、もちろん $f(x) \in Y$ である。)
また、 $y = f(x)$ のとき、 $f: x \mapsto y$ とも書く。



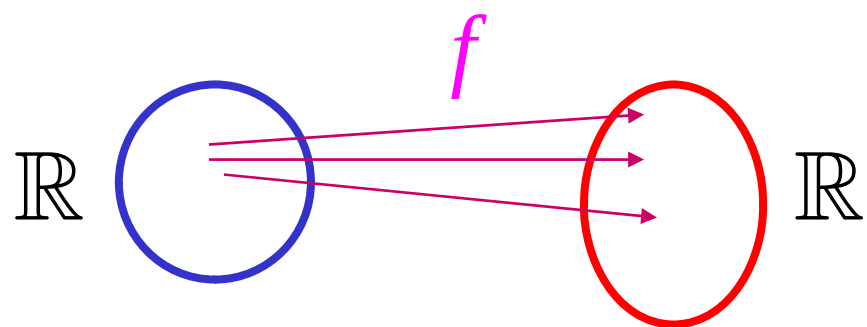
$$f(-1) = 1$$

対応関係を式で定めることもあるが、式でなくても写像は定義できる。

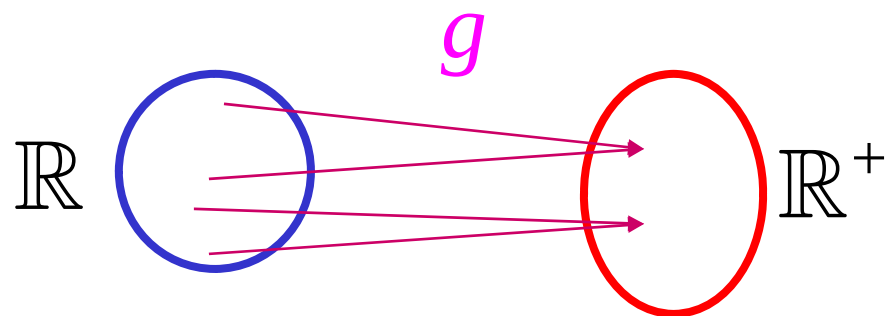
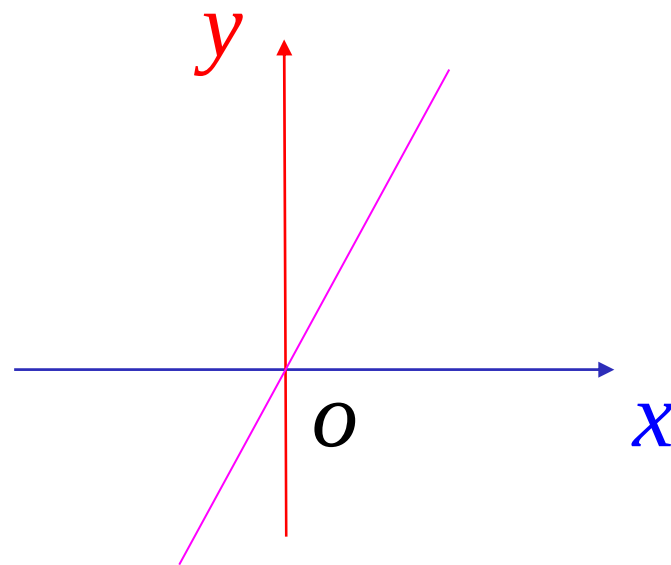
$$x \in X \text{ に対して、 } f(x) = x^2 \in Y$$

代表元といいます。

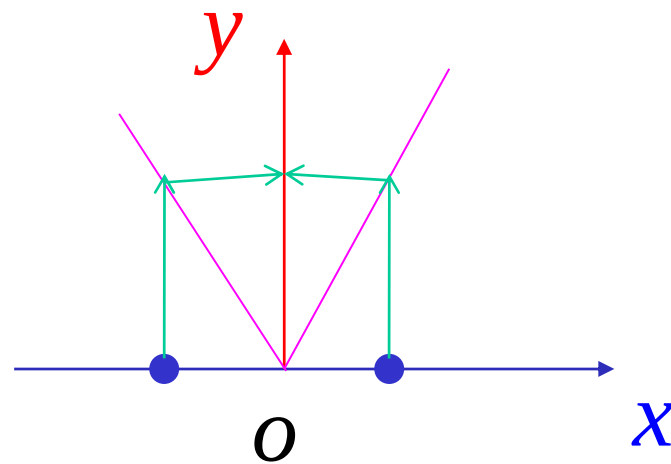
関数例



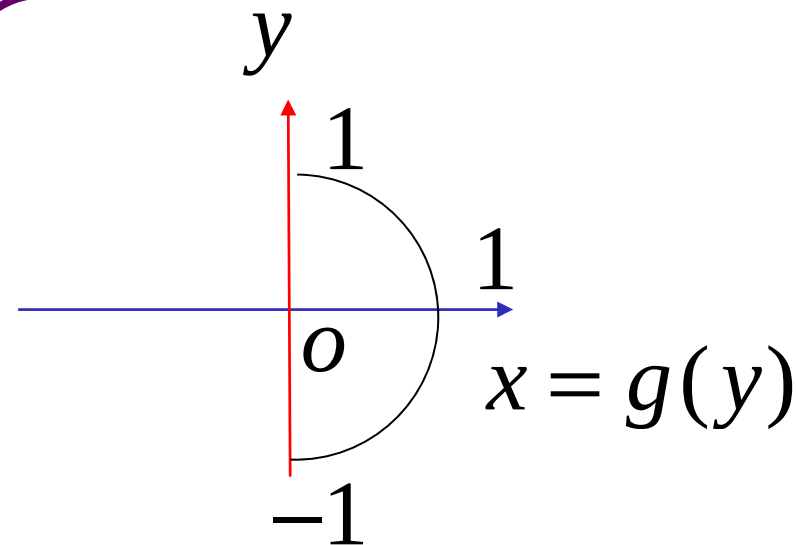
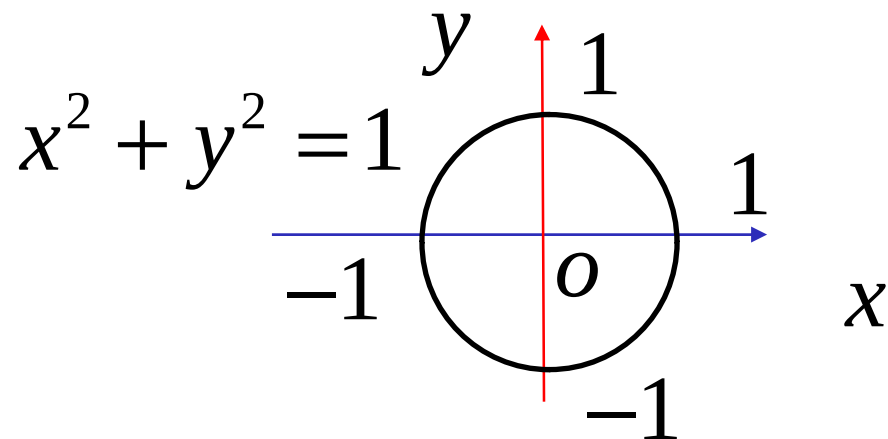
$$y = f(x) = 2x$$



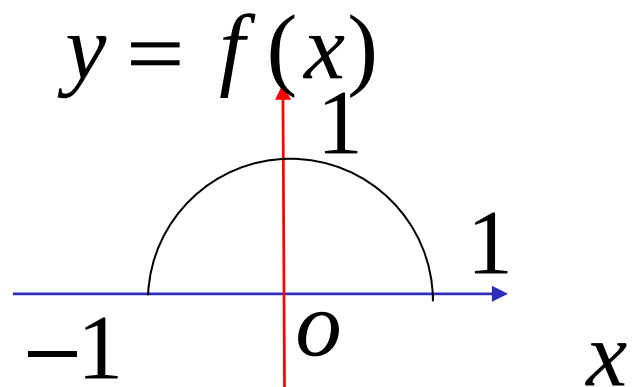
$$y = g(x) = |x|$$



関数でない対応と関数



$$g(y) = \sqrt{1 - y^2}$$
$$g : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$$



$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$$

練習

次式で定義される対応(関係)が関数かどうかを答えよ。関数である場合には、どの変数からどの変数への関数かと、定義域、値域を答えよ。

(1)

$$x + y = 4$$

(2) $x + |y| = 4$

(3) $x^2 + 4y^2 = 4$

(4) $x^2 + 4y^2 = 4 (y \geq 0)$

像

(定義) 定義域の像

写像 $f: X \rightarrow Y$ の定義域 X の部分集合 $A (A \subseteq X)$ に対して、
値域 Y の部分集合

$$\{f(x) \mid x \in A\}$$

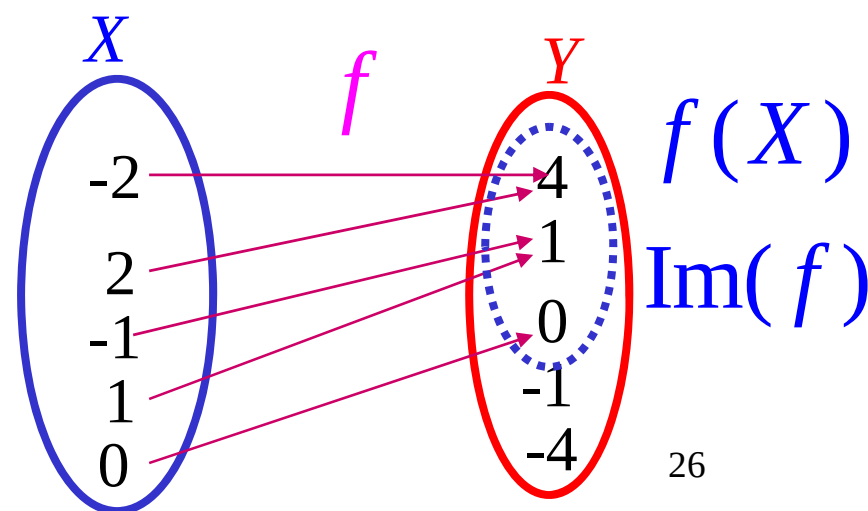
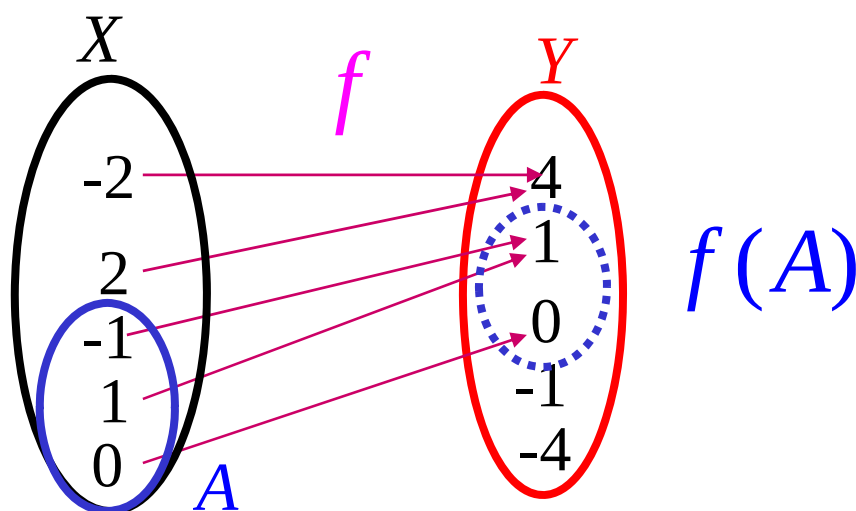
を写像 f による A の像(Image)といい、

$$f(A)$$

と表す。また、 $A = X$ のとき、 $f(X)$ を

$$\text{Im}(f)$$

とも表す。



写像の相等

(定義) 写像の相等

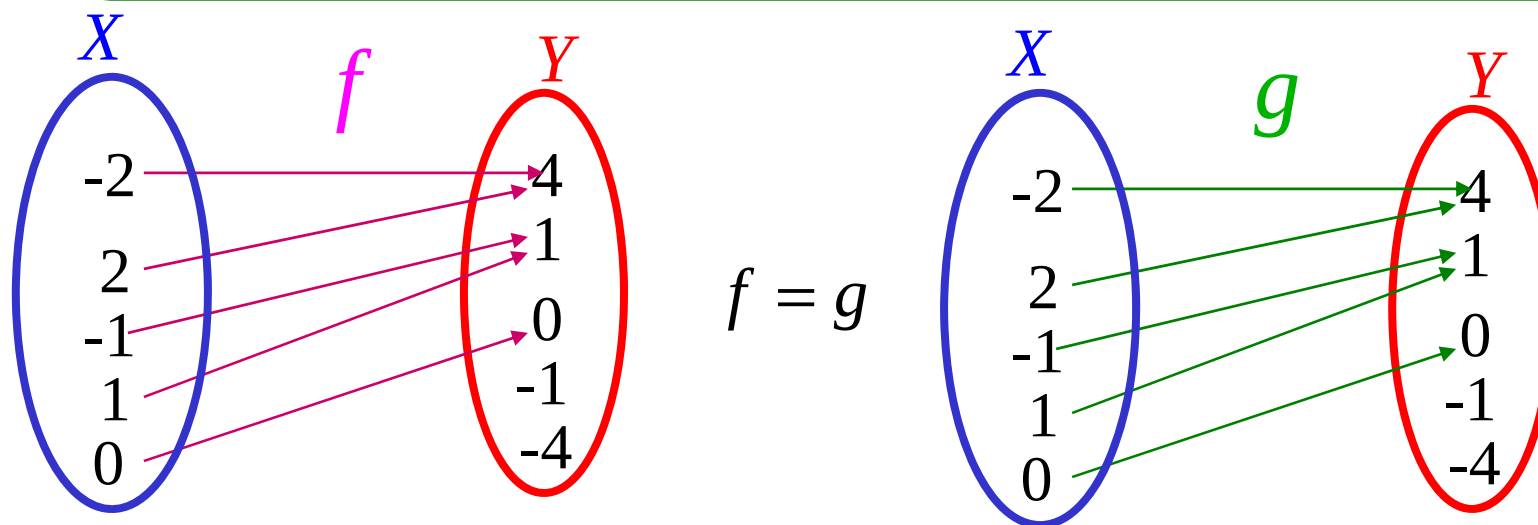
集合 X から Y への2つの写像 f, g は、
($f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$)

任意の $x \in X$ に対して、 $f(x) = g(x)$

が成り立つときに「等しい」といい、

$$f = g$$

と表す。



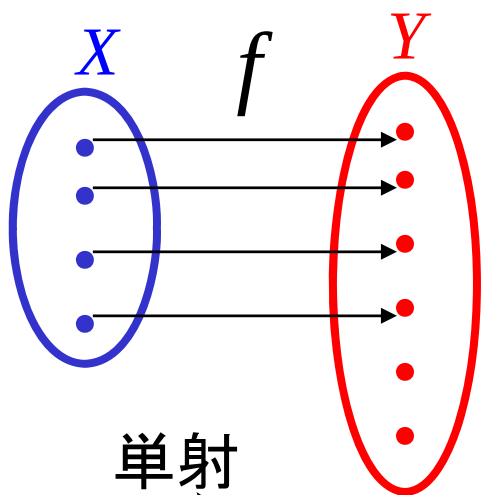
単射

(定義) 単射

集合 X から Y への写像 $f: X \rightarrow Y$ が、

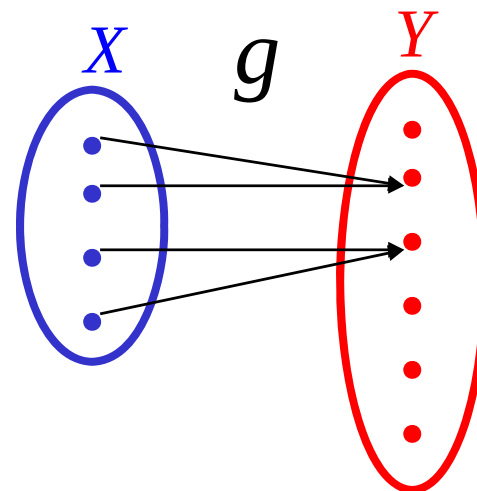
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

を満たすとき、 f は**単射(写像)**であるという。



単射

対応元が1つ



単射でない

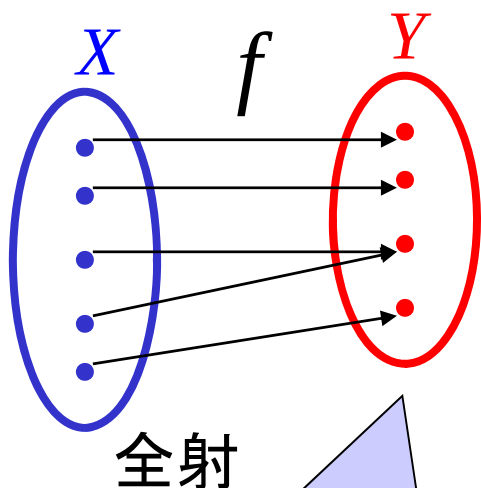
全射

(定義) 全射

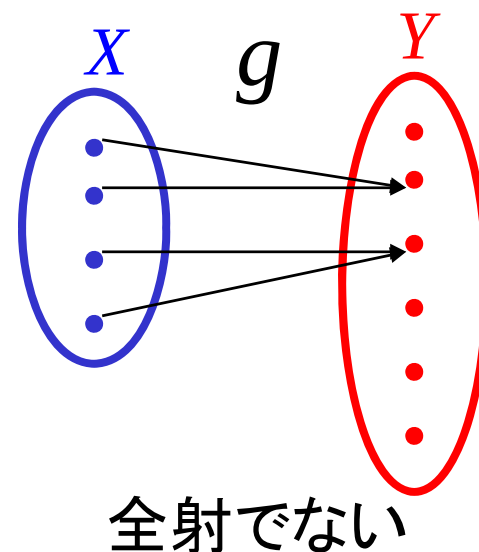
集合 X から Y への写像 $f: X \rightarrow Y$ が、

$$f(X) = Y$$

を満たすとき、 f は**全射(写像)**であるという。
または、**上への写像**ともいう。



値域に“余り”がない。



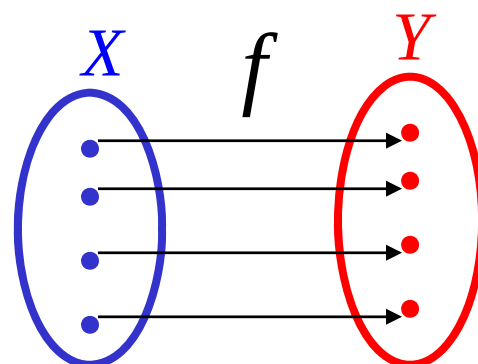
全単射

(定義) 全単射

単射かつ全射であるような写像を、

全単射(写像)という。

また、全単射は、**1対1上への写像**ともいう。



全単射

値域に“余り”がなく、
値域の各元がちょうどひとつの
定義域の元に対応している。

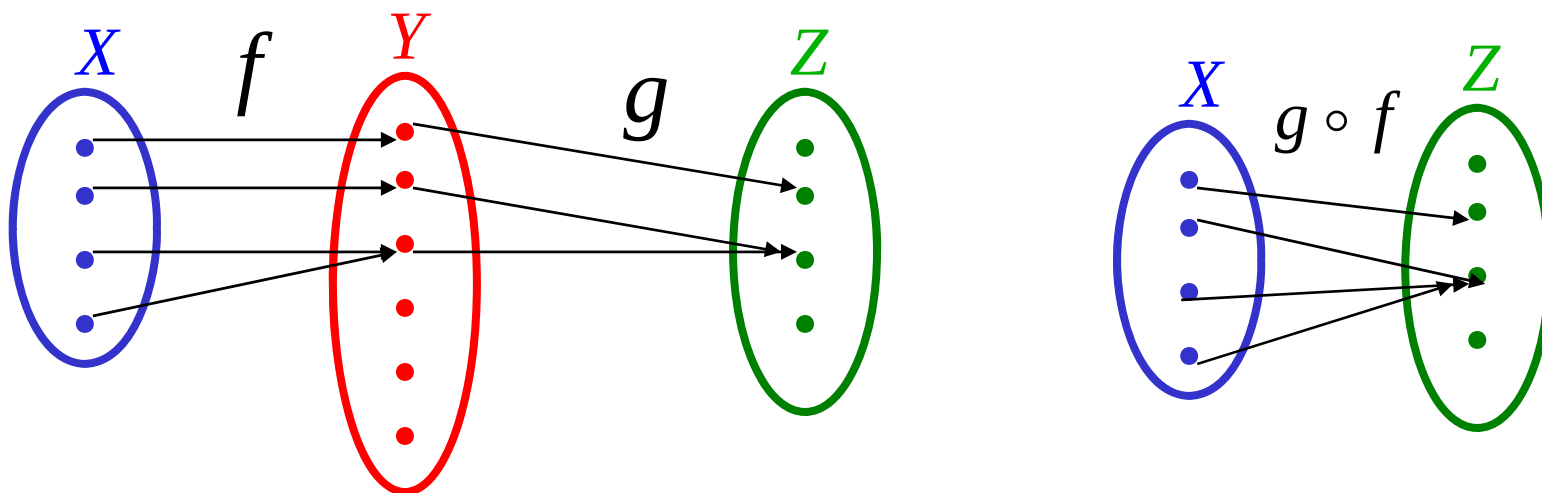
合成写像 (定義) 合成写像

集合 X, Y, Z に対して、2つの写像

$$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$$

があるとき、 X の各要素 x を Z の要素 $g(f(x))$ に対応させることにより X から Z への写像ができる。これを、 f, g の合成写像といい、

$g \circ f$
と表す。すなわち、
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
である。



逆像

(定義) 逆像

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、 Y の部分集合 B をとると、

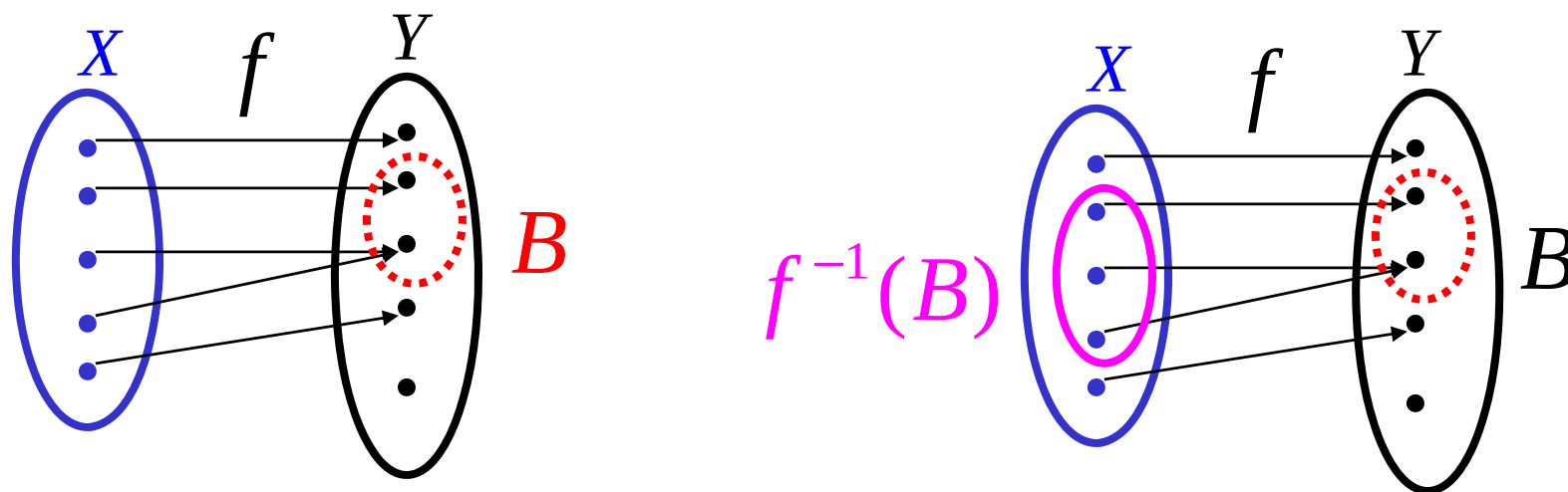
$$\{x \mid f(x) \in B\}$$

は X の部分集合である。これを、 f による B の逆像といい

$$f^{-1}(B)$$

と表す。すなわち、

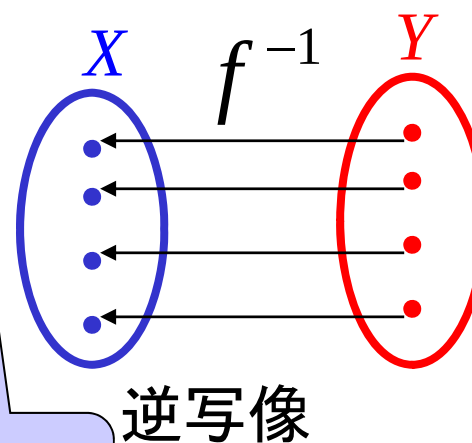
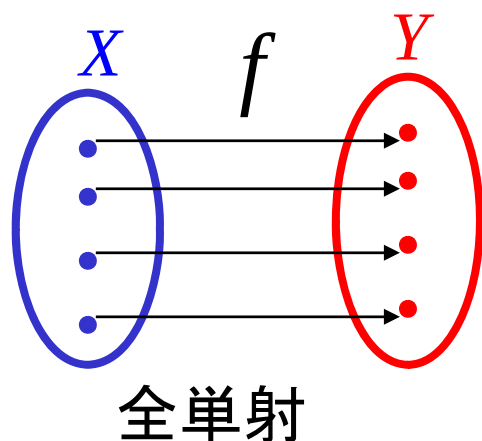
$$f^{-1}(B) \equiv \{x \mid f(x) \in B\}$$



逆写像

(定義) 逆写像

写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射ならば、 Y の各要素 y に対して、 X の要素 $f^{-1}(y)$ を対応させる写像を定義できる。これを、 f の逆写像といい、 f^{-1} と表す。



矢印を反対にする。