第４回　線形代数学レポート課題(行列式とその応用）

解答例

提示：2009/6/17(水)　提出：2009/7/1 (水)

1. 次の行列式を求めよ。

サラスの公式により求める。

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\{2\cdot4\cdot3+1\cdot5\cdot1+(-1)\cdot(-3)\cdot(-1)\}-\{2\cdot5\cdot(-1)+1\cdot(-3)\cdot3+(-1)\cdot4\cdot1\}$$

$$=(24+5-3)-(-10-9-4)$$

$$=26+23$$

$$=49$$

(2)

乗算の左辺と右辺の行列式をそれぞれ求める。

$$\left|\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| \times \left|\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$\left|\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}\right| = \cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$$

よって、

$$\left|\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}\right| = 1$$

なお、行列$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$は z 軸を中心に角度θだけ回転する行列を表し、行列

$\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$は y 軸を中心に角度φだけ回転する行列を表す。

(3)

行列式の定義（展開公式）により求める。

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \text{(4行で展開)}$$

$$=(-1)^{4+2}\bullet 1\bullet\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \text{(2行で展開)}$$

$$=(-1)^{2+3}\bullet 2\bullet\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \text{(サラスの公式)}$$

$$=-2\bullet\left[\{-18-15\}-\{0\}\right]$$

$$=2\bullet 33$$

$$=66$$

(4)行列の性質を利用して求める。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & u \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & u-x \\ 0 & y^2-xy & z^2-xz & u^2-xu \\ 0 & y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & u^3-xu^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (y-x) & (z-x) & (u-x) \\ y(y-x) & z(z-x) & u(u-x) \\ y^2(y-x) & z^2(z-x) & u^2(u-x) \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & u \\ y^2 & z^2 & u^2 \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & u-y \\ 0 & z^2-zy & u^2-uy \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x)(z-y)(u-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & u \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x)(z-y)(u-y)(u-z)$$

なお、この行列式はファンデルモンドの行列式として知られている。ファンデルモンドの行列式の一般形は次の式で与えられる。一般式は帰納法で証明できる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1{}^2 & x_2{}^2 & \cdots & x_n{}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1{}^{n-1} & x_2{}^{n-1} & \cdots & x_n{}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

2. 次の問いに答えよ。

(1) 次の 2 つのベクトルに直交するベクトルを示せ。

$$\boldsymbol{a} = (-1, 2, 3), \boldsymbol{b} = (2, -3, 1)$$

直交するベクトル $\boldsymbol{c}$ は外積で求められる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (2+9)\boldsymbol{i} + (6+1)\boldsymbol{j} + (3-4)\boldsymbol{k} \\
&= 11\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

よって、$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$と求められる。このベクトルを任意定数$k \in \mathbb{R}$（スカラー）倍したベクトル$k\boldsymbol{c}$もまた、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$に直交する。

なお、長さ 1 のベクトルは、$\dfrac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|}$で求められる。

$\|\boldsymbol{c}\| = \sqrt{11^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{121+49+1} = \sqrt{171}$であるので、

$\pm\dfrac{\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}\|} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{171}}\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$がベクトル$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$に直交する単位ベクトルである。

⑵ 次の 3 点からなる 3 角形の面積を求めよ。

$$A(1,-1,2), B(-1,2,-1), C(3,-2,3)$$

点Aを始点とするベクトルを求め、外積を利用する。すなわち、三角形の面積をSとすると次式が成り立つ。

$$S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|$$

まず個々のベクトルを求める。

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2,3,-3), \\
&\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (2,-1,1)
\end{aligned}
$$

これらのベクトルより外積を求める。

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (3-3)\boldsymbol{i} + (-6+2)\boldsymbol{j} + (2-6)\boldsymbol{k}$$
$$= 0\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$
$$= -4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

このベクトルのノルムの半分が求める面積である。

$$S = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-4)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{32}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

(3) 次の３つのベクトルで構成される平行６面体の体積を求めよ。

$$\boldsymbol{a} = (-2,1,1), \boldsymbol{b} = (1,2,3), \boldsymbol{c} = (-1,2,1)$$

体積をVとすると、次式が成り立つ。

$$V = \left| \boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \right|$$

よって、スカラー三重積$\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$を求める。

$$\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-4-3+2) - (-12+1-2)$$
$$= -5 + 13$$
$$= 8$$

$$V = \left| \boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \right| = 8$$

3.次の行列に対して、余因子行列を求めることで、逆行列を求めよ。
(1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 5 & -2\\ 6 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]$ とする。

余因子行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}={}^t\left[\widetilde{a_{ij}}\right]$ は次のように計算できる。

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}={}^t\begin{bmatrix}\widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{12}} & \widetilde{a_{13}}\\ \widetilde{a_{21}} & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}}\\ \widetilde{a_{31}} & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}}\end{bmatrix}$$

$$={}^t\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & -2\\ 6 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 5\\ 6 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 6 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$={}^t\begin{bmatrix}17 & -21 & -27\\ 5 & -9 & -7\\ -8 & 8 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}17 & 5 & -8\\ -21 & -9 & 8\\ -27 & -7 & 8\end{bmatrix}$$

転置と符号を忘れないこと。
逆行列 A^{-1} は、余因子行列 $\tilde{A}$ と行列式 $|A|$ を用いて次のように計算できる。

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

ここで、行列式 $|A|$ をサラスの方法により求める。

$$\begin{aligned}|A|&=(15+12+6)-(-2-9+60)\\ &=33-49\\ &=-16\end{aligned}$$

よって、

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

$$=\frac{1}{-16}\begin{bmatrix}17 & 5 & -8\\ -21 & -9 & 8\\ -27 & -7 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-17 & -5 & 8\\ 21 & 9 & -8\\ 27 & 7 & -8\end{bmatrix}$$

（験算）

$$A^{-1}\bullet A$$

$$=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-17 & -5 & 8\\ 21 & 9 & -8\\ 27 & 7 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 5 & -2\\ 6 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-17-15+48 & 17-25+8 & -34+10+24\\ 21+27-48 & -21+45-8 & 42-18-24\\ 27+21-48 & -27+35-8 & 54-14-24\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}16 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{I}$$

⑵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{B}=\left[b_{ij}\right]$とする。

まず、行列式$|\boldsymbol{B}|$を求める。

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\0 & 2 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}\quad (1列で展開)$$

$$=1\bullet\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\1 & 2 & 0\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}\quad (3列で展開)$$

$$=1\bullet 1\bullet\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=5$$

次に余因子行列 $\widetilde{\boldsymbol{B}}={}^{t}\left[\widetilde{b_{ij}}\right]$ を求める。

全ての (i,j) 要素に対して、(i,j) 余因子 $\widetilde{b_{ij}}=(-1)^{i+j}\left|\overline{b_{ij}}\right|$ を求める。

$$\widetilde{b_{11}}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\1 & 2 & 0\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=4-(-1)=5$$

$$\widetilde{b_{12}}=-\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\widetilde{b_{13}}=\begin{vmatrix}0 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\widetilde{b_{14}}=-\begin{vmatrix}0 & 2 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$$

$$\widetilde{b_{21}}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 0\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\left\{(2-3)-(2+6)\right\}=-\left\{-1-8\right\}=9$$

$$\widetilde{b_{22}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$\widetilde{b_{23}} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\widetilde{b_{24}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) - (2) = -3$$

$$\widetilde{b_{31}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1-6) - (4-3) = -7 - 1 = -8$$

$$\widetilde{b_{32}} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\{(-1)\} = 1$$

$$\widetilde{b_{33}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\widetilde{b_{34}} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\{(-2) - (-1)\} = -\{-1\} = 1$$

$$\widetilde{b_{41}} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\{(12) - (-3)\} = -\{15\} = -15$$

$$\widetilde{b_{42}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\widetilde{b_{43}} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\widetilde{b_{44}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4) - (-1) = 5$$

$$\therefore \widetilde{\boldsymbol{B}} = {}^t\begin{bmatrix} \widetilde{b_{11}} & \widetilde{b_{12}} & \widetilde{b_{13}} & \widetilde{b_{14}} \\ \widetilde{b_{21}} & \widetilde{b_{22}} & \widetilde{b_{23}} & \widetilde{b_{24}} \\ \widetilde{b_{31}} & \widetilde{b_{32}} & \widetilde{b_{33}} & \widetilde{b_{34}} \\ \widetilde{b_{41}} & \widetilde{b_{42}} & \widetilde{b_{43}} & \widetilde{b_{44}} \end{bmatrix}$$

$$= {}^t\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & -1 & -3 \\ -8 & 1 & 2 & 1 \\ -15 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 9 & -8 & -15 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

よって、逆行列は次のように求められる。

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\widetilde{\boldsymbol{B}}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 9 & -8 & -15 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

（験算）

$\boldsymbol{B}^{-1} \bullet \boldsymbol{B}$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 9 & -8 & -15 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 5+18-8-15 & 10-9-16+15 & 15-15 \\ 0 & 5 & -2+2 & 0 \\ 0 & -2+2 & 1+4 & 0 \\ 0 & -6+1+5 & 3+2-5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{I}$$