

第3回 線形代数学レポート課題解答例

提示：2009/6/3(水) 提出：2009/6/10(水)

1. 行列 $\mathbf{X}$ の逆行列を $\mathbf{X}^{-1}$ 、転置行列を ${}^t\mathbf{X}$ と表す。

このとき、次式を

$\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{C}^{-1}, \mathbf{D}^{-1}, {}^t\mathbf{A}, {}^t\mathbf{B}, {}^t\mathbf{C}, {}^t\mathbf{D}, {}^t\mathbf{A}^{-1}, {}^t\mathbf{B}^{-1}, {}^t\mathbf{C}^{-1}, {}^t\mathbf{D}^{-1}$
を用いて表わせ。

(1)

$$\begin{aligned} \left({}^t(\mathbf{ABC})\right)^{-1} &= \left({}^t\mathbf{B}{}^t\mathbf{C}{}^t\mathbf{A}\right)^{-1} \\ &= \left({}^t\mathbf{A}^{-1}\right)\left({}^t\mathbf{B}^{-1}\right)\left({}^t\mathbf{C}^{-1}\right) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &{}^t\left((\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})\right) \\ &= {}^t\left(\mathbf{AA}^{-1} + \mathbf{AB}^{-1} + \mathbf{BA}^{-1} + \mathbf{BB}^{-1}\right) \\ &= {}^t\left(2\mathbf{I} + \mathbf{AB}^{-1} + \mathbf{BA}^{-1}\right) \\ &= 2\mathbf{I} + \left({}^t\mathbf{B}^{-1}\right)\left({}^t\mathbf{A}\right) + \left({}^t\mathbf{A}^{-1}\right)\left({}^t\mathbf{B}\right) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} &{}^t\left(\left({}^t\left(\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\right) + {}^t\mathbf{C}{}^t\mathbf{D}\right)^{-1}\right) = {}^t\left(\left({}^t\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\right) + {}^t\mathbf{C}{}^t\mathbf{D}\right)^{-1}\right) \\ &= {}^t\left(\left({}^t\mathbf{A}{}^t\mathbf{B}^{-1} + {}^t\mathbf{C}{}^t\mathbf{D}\right)^{-1}\right) \\ &= {}^t\left({}^t\mathbf{B}{}^t\mathbf{A}^{-1} + {}^t\mathbf{D}^{-1}{}^t\mathbf{C}^{-1}\right) \\ &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}^{-1} \end{aligned}$$

2. 次の行列を行基本変形で階段行列に変形し、階数を求めよ。

(1)

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-2\times(1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $\text{rank}\mathbf{E} = 1$

(2)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

よって、 $\text{rank}\mathbf{F} = 3$ 。(なお、このとき、 $\mathbf{F}$ の階数 $\text{rank}\mathbf{F} = 3$ は次数 $n = 3$ と等しいので、 $\mathbf{F}$ は正則行列であり $\mathbf{F}$ の逆行列が存在する。)

(3)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 12 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 12 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+(4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -8 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 12 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 6 & 27 & -6 \\ 0 & 9 & 41 & -8 \\ 0 & -3 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\times(2), -\frac{1}{3}\times(4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 9 & -2 \\ 0 & 9 & 41 & -8 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & 41 & -8 \\ 0 & 2 & 9 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}\times(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $\text{rank}\mathbf{G} = 3$ 。

3.次の連立方程式を解け。

(1)

$$\begin{cases} 3x & -y & = 5 \\ -6x & +2y & = -7 \end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形する。(2の $\mathbf{E}$ の変形を参照せよ。)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ -6 & 2 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{(2)+2 \times (1)} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

係数行列の階数は1であり、拡大係数行列の階数は2である。よって、係数行列と拡大係数行列の階数が異なるので解は存在しない。(不能である。)

(2)

$$\begin{cases} x & -y & +z & = 3 \\ 3x & -2y & +z & = 11 \\ 2x & +2y & +3 & = 5 \end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形する。(2の $\mathbf{F}$ の変形を参照せよ。)

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right] & \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\frac{1}{9} \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

よって、与式は次と等価。

$$\begin{cases} x & = 4 \\ y & = 0 \\ z & = -1 \end{cases}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 12x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -6 \end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形する。(2の $\mathbf{G}$ の変形を参照せよ。)

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -4 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 12 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & 2 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{(1)+(4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -8 & 4 & -9 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 12 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & 2 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -8 & 4 & -9 \\ 0 & 6 & 27 & -6 & 33 \\ 0 & 9 & 41 & -8 & 50 \\ 0 & -3 & -12 & 6 & -15 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3} \times (2), -\frac{1}{3} \times (4)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -8 & 4 & -9 \\ 0 & 2 & 9 & -2 & 11 \\ 0 & 9 & 41 & -8 & 50 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{(2) \leftrightarrow (4)} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -8 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 9 & 41 & -8 & 50 \\ 0 & 2 & 9 & -2 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{5} \times (3)} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

以上より、与式は次と等価。

$$\begin{cases} x_1 + 10x_4 = 0 \\ x_2 - 10x_4 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

未知数の数が4で、拡大係数行列のrankが3であるので、

自由度は $4-3=1$

よって、1つの任意定数 k を用いて解が表現できる。今、 $x_4 \equiv k$ とし、上の方程式から次の解が得られる。

$$\begin{cases} x_1 = -10x_4 \\ x_2 = 10x_4 + 1 \\ x_3 = -2x_4 + 1 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k \text{は任意定数})$$

この式は4次元空間内の直線の式になっている。

(4)

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$

拡大係数行列を行基本変形する。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \\ & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{3列目の掃き出し}} \\ & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -20 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -2 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

以上より、与式は次と等価。

$$\begin{cases} x_1 - 9x_4 = 3 \\ x_2 - 20x_4 - 3x_5 = 5 \\ x_3 - 13x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

未知数の数が5で、拡大係数行列の rank が3であるので、

自由度は $5 - 3 = 2$

よって、2つの任意定数 k_1, k_2 を用いて解が表現できる。今、 $x_4 \equiv k_1, x_5 \equiv k_2$ とし、上の方程式から次の解が得られる。

$$\begin{cases} x_1 = 9x_4 + 3 \\ x_2 = 20x_4 + 3x_5 + 5 \\ x_3 = 13x_4 + 2x_5 + 3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 13 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 13 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ は任意定数})$$

この式は5次元空間内の2次元平面の式になっている。