

第2回 線形代数学レポート課題（行列の演算2、転置、分解、逆行列）

解答例

1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とする。

上の行列に対して、次式を求めよ。

(1) $tr(\mathbf{AB})$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore tr(\mathbf{AB}) = 0 + (-1) + (-2) = -3$$

(2) $tr(\mathbf{BA})$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore tr(\mathbf{BA}) = (-1) + (-2) = -3$$

$$(3) \quad {}^t \left({}^t \left({}^t \mathbf{A} + \mathbf{B} + {}^t \mathbf{C} \right) + \mathbf{A} \right) + {}^t \left({}^t \mathbf{B} + \mathbf{C} \right)$$

$$\begin{aligned}
& {}^t \left({}^t \left({}^t \mathbf{A} + {}^t \mathbf{B} + {}^t \mathbf{C} \right) + \mathbf{A} \right) + {}^t \left({}^t \mathbf{B} + \mathbf{C} \right) \\
&= {}^t \left({}^t \left({}^t \mathbf{A} \right) + {}^t \mathbf{B} + {}^t \left({}^t \mathbf{C} \right) + \mathbf{A} \right) + {}^t \left({}^t \mathbf{B} \right) + {}^t \mathbf{C} \\
&= {}^t \left(2\mathbf{A} + {}^t \mathbf{B} + \mathbf{C} \right) + \mathbf{B} + {}^t \mathbf{C} \\
&= 2{}^t \mathbf{A} + 2\mathbf{B} + 2{}^t \mathbf{C} \\
&= 2 \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 8 & -2 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$(4) \quad {}^t \left({}^t \left({}^t \mathbf{A} \mathbf{C} \right) + {}^t \mathbf{C} {}^t \mathbf{B} \right)$$

$$\begin{aligned}
& {}^t \left({}^t \left({}^t \mathbf{A} \mathbf{C} \right) + {}^t \mathbf{C} {}^t \mathbf{B} \right) \\
&= {}^t \left({}^t \mathbf{C} \mathbf{A} + {}^t \mathbf{C} {}^t \mathbf{B} \right) \\
&= {}^t \mathbf{A} \mathbf{C} + \mathbf{B} \mathbf{C} \\
&= \left({}^t \mathbf{A} + \mathbf{B} \right) \mathbf{C} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2.次の行列を対称行列と交代行列の和で表せ。

$$(1) \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

対称行列を求める。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{D} + {}^t\mathbf{D}) &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

交代行列を求める。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{D} - {}^t\mathbf{D}) &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ -16 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって、次のように和に分解できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{D} + {}^t\mathbf{D}) + \frac{1}{2}(\mathbf{D} - {}^t\mathbf{D}) \\ \therefore \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & -12 \\ 14 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\mathbf{E} + {}^t\mathbf{E}) &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & -12 \\ 14 & 10 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 & 14 \\ 6 & -4 & 10 \\ -4 & -12 & 8 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 2 & -8 & -2 \\ 10 & -2 & 16 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \\ 5 & -1 & 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\mathbf{E} - {}^t\mathbf{E}) &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & -12 \\ 14 & 10 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 & 14 \\ 6 & -4 & 10 \\ -4 & -12 & 8 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 10 & -18 \\ -10 & 0 & -22 \\ 18 & 22 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 5 & -9 \\ -5 & 0 & -11 \\ 9 & 11 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} + {}^t\mathbf{E}) + \frac{1}{2}(\mathbf{E} - {}^t\mathbf{E}) \\
\therefore \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & -12 \\ 14 & 10 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \\ 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -9 \\ -5 & 0 & -11 \\ 9 & 11 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. 次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

公式と行基本変形の2つの方法で求める。

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{F}|} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{21-20} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$[F \mid I] \xrightarrow{\text{行基本変形}} [I \mid F^{-1}]$$

$$[F \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{7} \times (1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(2)-5 \times (1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{-5}{7} & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7} \times (2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{7} & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{(1) - \frac{4}{7} \times (2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \end{array} \right]$$

よって、

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

(検算)

$$FF^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21-20 & -28+28 \\ 15-15 & -20+21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$(2) \ G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[G \mid I] \xrightarrow{\text{行基本変形}} [I \mid G^{-1}] \text{より求める。}$$

$$[G \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{とおく。}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(2)+1 \times (1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 14 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{(2) \leftrightarrow (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 14 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(3)-3 \times (2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{-1 \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{(2)-5 \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{(1)-6 \times (3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

よって、

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -18 \\ 5 & 5 & -14 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(検算)

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 & -18 \\ 5 & 5 & -14 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+0-6 & 6+0-6 & -18+0+18 \\ -7+15-8 & -6+15-8 & 18-42+24 \\ 0+5-5 & 0+5-5 & 0-14+15 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}$$