第１回　線形代数学レポート課題解答例
（行列の演算１、加算と乗算）

1.以下の行列 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$ に対して問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

（１）　和が定義されるすべての組み合わせに対して、和を求めよ。（ただし、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}$ といった同じ行列同士の和も含む。）

系統だてて列挙すること。和は、行列の型が等しくなければならない。加算は交換法則が成り立つ。

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\ -4 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}=2\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 4 & -6 & 4\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}(=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$$

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 2 & -6 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}(=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{F})$$

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 4\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

（２） 積が定義されるすべての組み合わせに対して、積を求めよ。(ただし、$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$ といった同じ行列同士の積も含む。）

系統だてて列挙すること。積において、左の行列の列数と右の行列が等しくないといけない。乗算は交換法則が成り立たない。

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\bullet0+0\bullet(-2) & 2\bullet1+0\bullet3 & 2\bullet2+0\bullet0\\ 0\bullet0+(-1)\bullet(-2) & 0\bullet1+(-1)\bullet3 & 0\bullet2+(-1)\bullet0\\ 0\bullet0+1\bullet(-2) & 0\bullet1+1\bullet3 & 0\bullet2+1\bullet0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\ 2 & -3 & 0\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AE}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AF}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BD}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 4 & -9 & 8\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CB}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0\\ -2 & 5 & 4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CC}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CE}=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&0\\-1&-3&2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CF}=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\7&4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{DA}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-3&2\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\4&5\\0&-2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{DD}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-3&2\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-3&2\\0&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&-1\\-4&13&-8\\4&-6&4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{EA}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\2&3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{ED}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-3&2\\0&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&1\\-5&9&-7\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{FB}=\begin{bmatrix}4&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2\\-2&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&10&8\\0&-1&-2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{FC}=\begin{bmatrix}4&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&6\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{FE}=\begin{bmatrix}4&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-6&4\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{FF}=\begin{bmatrix}4&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&8\\-4&-2\end{bmatrix}$$

2. 行列 $\boldsymbol{A,B,C,D,E},\boldsymbol{F}$ を1の行列とする。

このとき、次式が計算可能かどうかを調べ、計算が可能なときにはその値を求めよ。

（1） $3(\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{AC})-2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{C})$

計算不可

$\boldsymbol{B}$ は 2×3 型で C は 2×2 型なので、$(\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{C})$ の加算はできない。

また、$\boldsymbol{AB}$ は 3×3 型で $\boldsymbol{AC}$ は 3×2 型である。

なお、$\boldsymbol{0}$ 行列にも型があることに注意すること。

$6\boldsymbol{AC}-6\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{0}_{3\times 2}$

（2）$3(\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{D})-\boldsymbol{A}(3\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})$

計算可能。

与式=$3(\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{D})-\boldsymbol{A}(3\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})$

$=6\boldsymbol{D}-2\boldsymbol{AE}$

$=6\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}10 & 0 & 10\\ 14 & -24 & 12\\ -2 & 18 & 0\end{bmatrix}$

（3）$\boldsymbol{CBA}+\boldsymbol{CEA}+\boldsymbol{FBA}+\boldsymbol{FEA}$

与式＝$\boldsymbol{CBA}+\boldsymbol{CEA}+\boldsymbol{FBA}+\boldsymbol{FEA}$

$=\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{EA}\right)+\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{EA}\right)$

$=\left(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{F}\right)\left(\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{EA}\right)$

$=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\right)$

$=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-14 & 8\\ -4 & 2\end{bmatrix}$

（4）$\boldsymbol{ABC}+\boldsymbol{AEC}+\boldsymbol{AFB}+\boldsymbol{AFE}$

計算不可。

$\boldsymbol{B}$ は2×3型でC は2×2型なので、積$\boldsymbol{BC}$ は計算できない。

$\boldsymbol{E}$ は2×3型でC は2×2型なので、積$\boldsymbol{EC}$ は計算できない。

３．次の性質を満たす3×3の行列$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$を見つけよ。（無数に存在するので、１組づつ示せば良い。）

解は省略。

（１）$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$

（２）$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$かつ$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$かつ$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$