

3. 正方行列

1

正方行列

(定義): 正方行列
行と列の数が等しい行列、すなわち
 $n \times n$ 行列、 (n, n) 型の行列のことを
 n 次の**正方行列**という。

例 $[3]$: 1次の正方行列
 $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$: 2次の正方行列
 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$: 3次の正方行列

2

正方行列のイメージ

一般の行列
 $m \times n$
長方形

正方行列
 $n \times n$
正方形

3

単位行列

(定義): 単位行列
正方行列にしか、単位行列は定義されないので注意すること。
正方行列のなかで、対角成分が1で、それ以外の成分は0である行列を**単位行列**といい、
 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$ や $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$
で表す。特に、次数にも注意する際には、
 E_n I_n
と書いて、 n 次の $n \times n$ の単位行列を表す。

4

例

$E_2 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E_3 = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$E_4 = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5

単位行列の性質

(性質): 単位行列との積
 A を任意の正方行列、 A と同じ型の単位行列を I とする。ことのき次式が成り立つ。
 $AI = IA = A$

6

例題

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + (-1) \times 0 & 2 \times 0 + (-1) \times 1 \\ 3 \times 1 + 1 \times 0 & 3 \times 0 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times (-1) + 0 \times 1 \\ 0 \times 2 + 1 \times 3 & 0 \times (-1) + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

7

練習

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、次の式が成り立つことを確かめよ。

$$AI_3 = I_3A = A$$

8

(正方行列の)トレース

(定義): トレース (固有和)

$A = [a_{ij}]$ に対して、対角成分の総和を
トレースといい、

$$\text{tr} A$$

と表す。すなわち、

$$\text{tr} A \equiv \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

9

例題

次の行列のトレースをそれぞれ求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

解)

$$\text{tr}(A) = 3 - 2 = 1$$

$$\text{tr}(B) = -2 + 1 + 4 = 3$$

$$\text{tr}(C) = -3 + 5 + 4 - 2 = 4$$

10

練習

次の行列のトレースをそれぞれ求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

11

トレースの性質

(性質): トレースの性質

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ を $n \times n$ 行列とし、 k をスカラーとする。このとき、以下の式が成り立つ。

$$(1) \text{tr}(A \pm B) = \text{tr} A \pm \text{tr} B$$

$$(2) \text{tr}(kA) = k(\text{tr} A)$$

$$(3) \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$(4) \text{tr}({}^t A) = \text{tr} A$$

積のチェックに使える。

12

証明

$$(1) \operatorname{tr}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \operatorname{tr} \mathbf{A} \pm \operatorname{tr} \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \operatorname{tr}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \\ &= \operatorname{tr}([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) \\ &= \sum_{i=1}^n ([a_{ii}] \pm [b_{ii}]) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n [a_{ii}] \right) \pm \left(\sum_{i=1}^n [b_{ii}] \right) \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

13

$$(2) \operatorname{tr}(k\mathbf{A}) = k(\operatorname{tr} \mathbf{A})$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \operatorname{tr}(k\mathbf{A}) \\ &= \operatorname{tr}(k[a_{ij}]) \\ &= \sum_{i=1}^n (k[a_{ii}]) \\ &= k \left(\sum_{i=1}^n [a_{ii}] \right) \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

14

$$(3) \operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = [c_{ij}] \quad \mathbf{D} = \mathbf{BA} = [d_{ij}] \quad \text{とする。}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \operatorname{tr}(\mathbf{AB}) & \text{右辺} &= \operatorname{tr}(\mathbf{BA}) \\ &= \operatorname{tr}([c_{ij}]) & &= \operatorname{tr}([d_{ij}]) \\ &= \sum_{i=1}^n ([c_{ii}]) & &= \sum_{j=1}^n ([d_{jj}]) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right) & &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^n b_{jl} a_{lj} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{ik} b_{ki}) & &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n (a_{lj} b_{jl}) \end{aligned}$$

よって、左辺=右辺

15

(3)のイメージ

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{21} & \cdots & a_{1j}b_{j1} & \cdots & a_{1n}b_{n1} & \text{tr}(\mathbf{AB}) \\ a_{21}b_{12} & a_{22}b_{22} & & & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1}b_{1i} & \cdots & a_{ij}b_{ji} & \cdots & a_{in}b_{ni} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \\ a_{n1}b_{1n} & \cdots & a_{nj}b_{jn} & \cdots & a_{nn}b_{nn} & & \\ \text{tr}(\mathbf{BA}) & d_{11} & & d_{jj} & & d_{nn} & \end{array}$$

c_{11}
 c_{ii}
 c_{nn}

16

$$(4) \operatorname{tr}({}^t \mathbf{A}) = \operatorname{tr} \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \operatorname{tr}({}^t \mathbf{A}) \\ &= \operatorname{tr}({}^t [a_{ij}]) \\ &= \sum_{i=1}^n ({}^t [a_{ii}]) \\ &= \sum_{i=1}^n ([a_{ii}]) \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

QED

17

例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{とする。このとき、}$$

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad \text{および} \quad \operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}) \quad \text{を確かめよ。}$$

解

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{よって、} \quad \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = 4 + 0 = 4$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{BA}) = 1 + 3 = 4 \quad \text{よって、} \quad \operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$$

18

練習

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{とする。このとき、}$$

$$AB \neq BA \quad \text{および} \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad \text{を確かめよ。}$$

19

行列のべき乗

正方行列に対しては、行列のべき乗が定義できる。

(定義): (正方行列の)べき乗
 n 次の正方行列 A に対して、

$$A^k \equiv \underbrace{AA \cdots A}_k$$

と定義する。また、

$$A^0 \equiv I_n$$

とする。

$$\begin{matrix} n \times n \\ n \times n \\ n \times n \end{matrix}$$

n 次の正方行列同士を
乗じると、
また n 次の正方行列になる。

20

べき等行列

(定義): べき等行列

$AA = A$ となる行列を **べき等行列** という。

べき等行列は、

$$A^k = A \quad (k \geq 1)$$

も成り立つ。

21

例

$$(1) \quad \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-6 & 12-18 \\ -2+3 & -6+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-20 & -40+50 \\ 8-10 & -20+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

22

べき零行列

(定義): べき零行列

$A^k = O$ となる自然数 k が存在するような行列。

べき零行列は、

$$A^{k'} = O \quad (k' \geq k)$$

も成り立つ。

23

例

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$$2. \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

24

例2 次の一連の行列はべき零行列である。

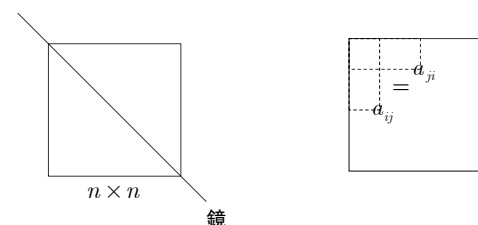
$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (J_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (J_3)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (J_4)^4 = O$$

25

対称行列

(定義): 対称行列

${}^tA = A$ なる n 次の正方行列を
(n 次の) 対称行列という。すなわち、

$$A = [a_{ij}] \text{ が対称行列} \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$$


26

対称行列の例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & a & b & c \\ a & y & d & e \\ b & d & z & f \\ c & e & f & w \end{bmatrix}$$

27

練習

以下の行列はすべて対称行列である。
このとき、 x, y, z を求めよ。

(1) $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 7 & y & 8 \\ 9 & -2 & -1 \\ 8 & x & 3 \end{bmatrix}$

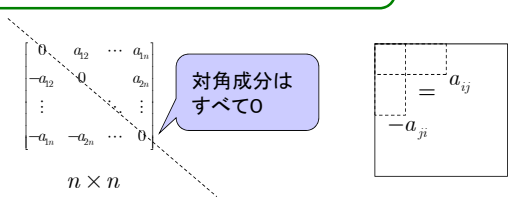
(3) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & x & 0 \\ y & 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & z & 5 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & x & 2 \\ y & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ z & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

28

交代行列

(定義): 交代行列

${}^tA = -A$ なる n 次の正方行列を
(n 次の) 交代行列(歪対称行列)という。
すなわち、

$$A = [a_{ij}] \text{ が交代行列} \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$$


29

交代行列の例

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

30

練習

以下の行列はすべて交代行列である。
このとき、 x, y, z を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & x \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & x & -1 \\ y & z & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & -2 \\ x & 0 & 4 & -6 \\ -5 & y & 0 & z \\ 2 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ x & 0 & 5 & 3 \\ -3 & -5 & 0 & -4 \\ -1 & y & z & 0 \end{bmatrix}$$

31

対称行列と交代行列の性質1

(性質): 対称行列と交代行列の性質

任意の $n \times n$ 行列 A に対して、

$A + {}^tA$ は対称行列であり、

$A - {}^tA$ は交代行列である。

証明

$${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A$$

$${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA)$$

QED

32

対称行列と交代行列の性質2

(性質): 行列の対称行列と交代行列への分解

任意の正方行列 A は、対称行列と交代行列の和で表現できる。

証明

$A + {}^tA$ は対称行列であり、

$A - {}^tA$ は交代行列である。

よって、

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

QED

33

例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + {}^tA = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - {}^tA = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -6 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

34

練習

次の行列を対称行列と交代行列の和で表せ。

$$(1) A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(2) B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

35

正則行列(重要)

(定義): 正則行列

$n \times n$ 行列 A に対して、

$$AX = XA = I$$

を満たす正方行列 X があるとき、
 A を **正則行列** という。また、このとき、
 X を A の **逆行列** といい、

A^{-1}
と書く。

逆行列が存在する行列が正則行列である。
正則行列の逆行列もまた正則行列である。

36

正則行列の性質1

(性質): 逆行列の一意性

正則な行列 A の逆行列は唯一つ存在する。

証明) 背理法による。

2つの逆行列 $X_1, X_2 (X_1 \neq X_2)$ が存在すると仮定する。(背理法の仮定)定義より, $AX_1 = X_1A = I \quad \dots(1)$ $AX_2 = X_2A = I \quad \dots(2)$ が成り立つ。ここで、(1)の両辺に X_2 を左から乗じる。

$$AX_1 = I$$

$$\therefore X_2(AX_1) = X_2I$$

$$\therefore (X_2A)X_1 = X_2$$

$$\therefore IX_1 = X_2$$

これは矛盾である。

QED 37

$$\therefore X_1 = X_2$$

正則行列の性質2

(性質): 正則行列と演算

 A, B を $n \times n$ の正則行列とする。

このとき、次式が成り立つ。

(1) A^{-1} も正則行列であり、 $(A^{-1})^{-1} = A$ 。

(2) AB も正則行列であり、 $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$ 。

(3) tA も正則行列であり、 $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ 。

38

証明

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

 $C \equiv A^{-1}$ とおく。

$$CA = A^{-1}A = I$$

$$AC = AA^{-1} = I$$

よって、定義より A は C の逆行列。

$$\therefore A = C^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

39

(2) $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$

 $C \equiv AB$ とおく。

$$C(B^{-1}A^{-1}) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})C = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = BIB^{-1} = BB^{-1} = I$$

よって、定義より $(B^{-1}A^{-1})$ は C の逆行列。

$$(B^{-1})(A^{-1}) = C^{-1} = (AB)^{-1}$$

40

(3) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

 $C \equiv {}^tA$ とおく。

$$C({}^tA^{-1}) = {}^tA({}^tA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI = I$$

$$({}^tA^{-1})C = {}^t(A^{-1})({}^tA) = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI = I$$

よって、定義より $({}^tA^{-1})$ は C の逆行列。

$$({}^tA^{-1}) = C^{-1} = ({}^tA)^{-1}$$

QED

41

2次の逆行列(復習)

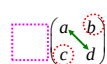
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

 $|A|$ の求め方

乗算する符号が正

乗算して符号が負

$$|A| = ad - bc$$

 A^{-1} の求め方 $|A| \neq 0$ を確認して、

交換

乗算して符号が負

 $\frac{1}{|A|}$ 倍

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

42

例題

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

に対して、次式が成り立つことを確かめよ。

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$ (2) $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$ (3) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

解)

(1) $|A| = 7 \times (-2) - 5 \times (-3) = 1$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$
$$|A^{-1}| = 1$$
$$\therefore (A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

43

$$(2) (AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$$
$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$
$$|AB| = 17 \times 2 - (-5)(-7) = -1$$
$$\therefore (AB)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -7 & -17 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 1 \times (-1) - 0 = -1$$
$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -7 & -17 \end{bmatrix}$$

44

$$(3) ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$
$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$
$${}^tA = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$
$$|{}^tA| = 7 \times (-2) - (-3) \times 5 = 1$$
$$\therefore ({}^tA)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\therefore {}^t(A^{-1}) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

45

n 次の逆行列について

● 一般の n 次の逆行列は、
2次の逆行列を求めるときにように、
簡単に求めることはできない。

2次

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{公式}} A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

n 次

$$A \longleftrightarrow A' \longleftrightarrow A'' \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow A^{-1}$$

行列の行基本変形

46