3. 正方行列

正方行列

（定義）:正方行列

行と列の数が等しい行列、すなわち

$n \times n$ 行列、(n, n) 型の行列のことを

n 次の正方行列という。

例

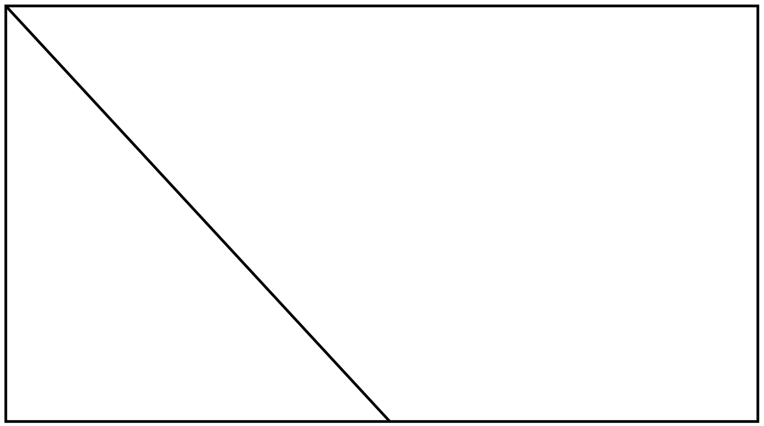
$\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$:1次の正方行列

$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$:2次の正方行列

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$:3次の正方行列

正方行列のイメージ

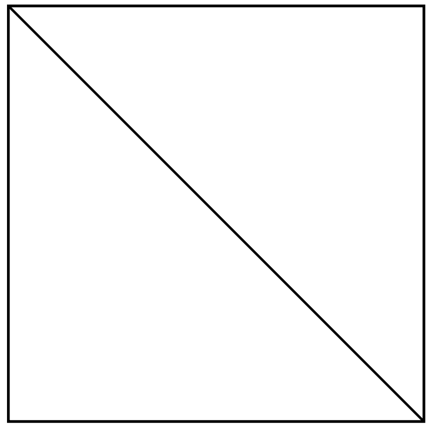
一般の行列



$m \times n$

長方形

正方行列



$n \times n$

正方形

単位行列

正方行列にしか、単位行列
は定義されないので注意すること。

（定義）:単位行列

正方行列のなかで、対角成分が1で、それ以外の成分は0である行列を単位行列といい、

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{や} \quad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で表す。特に、次数にも注意するときには、

$$\boldsymbol{E}_n \qquad \boldsymbol{I}_n$$

と書いて、n 次の$n \times n$ の単位行列を表す。

例

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_4 = \boldsymbol{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

単位行列の性質

（性質）：単位行列との積

$\boldsymbol{A}$を任意の正方行列、$\boldsymbol{A}$ と同じ型の単位行列を $\boldsymbol{I}$ とする。ことのき次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$$

例題

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 + (-1)\times 0 & 2\times 0 + (-1)\times 1 \\ 3\times 1 + 1\times 0 & 3\times 0 + 1\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 2 + 0\times 3 & 1\times(-1) + 0\times 1 \\ 0\times 2 + 1\times 3 & 0\times(-1) + 1\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

練習

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、次の式が成り立つことを確かめよ。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{I}_3\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

(正方行列の)トレース

(定義):トレース(固有和)

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ に対して、対角成分の総和を**トレース**といい、

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$$

と表す。すなわち、

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

例題

次の行列のトレースをそれぞれ求めよ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

解）

$$tr(\boldsymbol{A}) = 3 - 2 = 1$$

$$tr(\boldsymbol{B}) = -2 + 1 + 4 = 3$$

$$tr(\boldsymbol{C}) = -3 + 5 + 4 - 2 = 4$$

練習

次の行列のトレースをそれぞれ求めよ。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

トレースの性質

（性質）:トレースの性質

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}], \boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ を $n \times n$ 行列とし、k をスカラーとする。このとき、以下の式が成り立つ。

(1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \pm \mathrm{tr}\boldsymbol{B}$
(2) $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A}) = k(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})$
(3) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$
(4) $\mathrm{tr}({}^t\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}$

積のチェックに使える。

証明

（1） $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \pm \mathrm{tr}\boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) \\
&= \mathrm{tr}([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} ([a_{ii}] \pm [b_{ii}]) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} [a_{ii}] \right) \pm \left(\sum_{i=1}^{n} [b_{ii}] \right) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

（2） $\operatorname{tr}\left(k\boldsymbol{A}\right)=k\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{A}\right)$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \operatorname{tr}\left(k\boldsymbol{A}\right) \\
&= \operatorname{tr}(k[a_{ij}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(k[a_{ii}]\right) \\
&= k\left(\sum_{i=1}^{n}[a_{ii}]\right) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

（３）　$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = [c_{ij}]$　$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{BA} = [d_{ij}]$　とする。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) \\
&= \mathrm{tr}([c_{ij}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n}([c_{ii}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{ki})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA}) \\
&= \mathrm{tr}([d_{ij}]) \\
&= \sum_{j=1}^{n}([d_{jj}]) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{jl}a_{lj}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_{lj}b_{jl})
\end{aligned}
$$

よって、左辺＝右辺

(3)のイメージ

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & \mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) \\
a_{11}b_{11} & a_{12}b_{21} & \cdots & a_{1j}b_{j1} & \cdots & a_{1n}b_{n1} & & c_{11} \\
a_{21}b_{12} & a_{22}b_{22} & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\
a_{i1}b_{1i} & & \cdots & a_{ij}b_{ji} & & a_{in}b_{ni} & & c_{ii} \\
\vdots & & & & \ddots & \vdots & & \\
a_{n1}b_{1n} & & \cdots & a_{nj}b_{jn} & \cdots & a_{nn}b_{nn} & & c_{nn} \\
\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA}) \quad d_{11} & & & d_{jj} & & d_{nn} & &
\end{array}
$$

(4)　$\mathrm{tr}\left({}^{t}\boldsymbol{A}\right) = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \mathrm{tr}\left({}^{t}\boldsymbol{A}\right) \\
&= \mathrm{tr}({}^{t}[a_{ij}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left({}^{t}[a_{ii}]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}([a_{ii}]) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

QED

例題

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$ とする。このとき、

$$AB \neq BA$$ および $tr\left(AB\right) = tr\left(BA\right)$ を確かめよ。

解

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

よって、 $AB \neq BA$

$$tr(AB) = 4 + 0 = 4$$

$$tr(BA) = 1 + 3 = 4$$

よって、$tr\left(AB\right) = tr\left(BA\right)$

練習

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$ とする。このとき、

$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ および $tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA})$ を確かめよ。

行列のべき乗

正方行列に対しては、行列のべき乗が定義できる。

(定義):(正方行列の)べき乗

n次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、

$$\boldsymbol{A}^k \equiv \underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{k}$$

と定義する。また、

$$\boldsymbol{A}^0 \equiv I_n$$

とする。

$n \times n$

$n \times n$ $n \times n$

n 次の正方行列同士を
乗じると、
またn 次の正方行列になる。

べき等行列

（定義）: べき等行列

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ となる行列を**べき等行列**という。

べき等行列は、

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A} \quad (k \geq 1)$$

も成り立つ。

例

（1）
$$\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-6 & 12-18 \\ -2+3 & -6+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

（2）
$$\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-20 & -40+50 \\ 8-10 & -20+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

べき零行列

（定義）: べき零行列

$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$ 　となる自然数 k が存在するような行列。

べき零行列は、

$$\boldsymbol{A}^{k'} = \boldsymbol{O} \quad (k' \geq k)$$

も成り立つ。

例

1. $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$$

2. $$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 4 & -3\\ 1 & 3 & -2\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}2 & 4 & -3\\ 1 & 3 & -2\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & -3\\ 1 & 3 & -2\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^3=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & -3\\ 1 & 3 & -2\\ 3 & 7 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$$

例2　次の一連の行列はべき零行列である。

$$\boldsymbol{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{J}_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\boldsymbol{J}_3)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

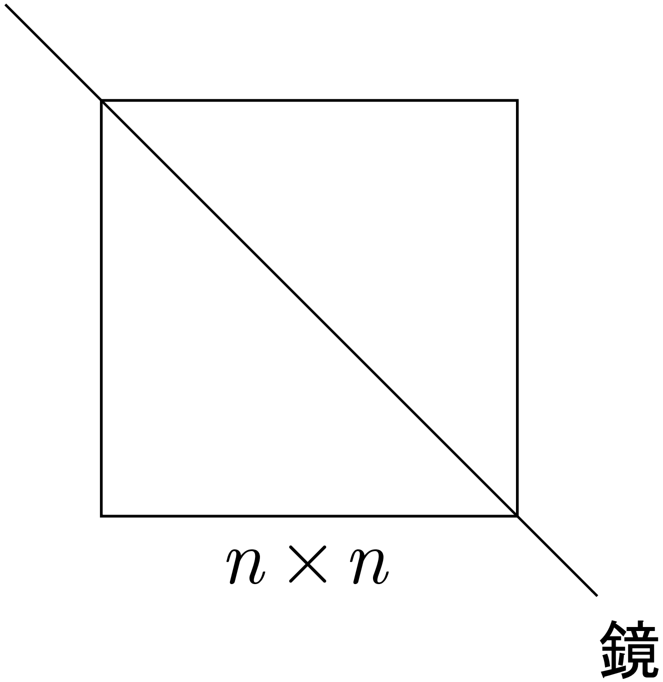
$$\boldsymbol{J}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{J}_4)^4 = \boldsymbol{O}$$

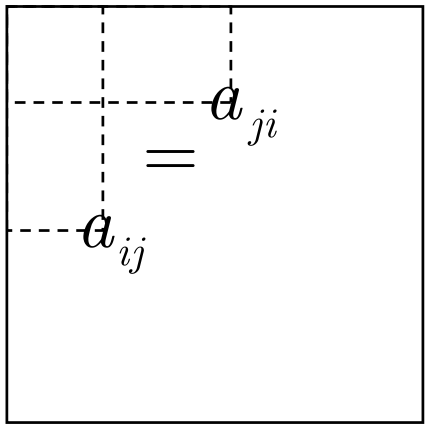
対称行列

（定義）：対称行列

${}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ なる n 次の正方行列を（ n 次の）対称行列という。すなわち、

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \text{が対称行列} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = a_{ji}$$





対称行列の例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x & a & b & c \\ a & y & d & e \\ b & d & z & f \\ c & e & f & w \end{bmatrix}$$

練習

以下の行列はすべて対称行列である。
このとき、x , y , z を求めよ。

（１） $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

（２） $\begin{bmatrix} 7 & y & 8 \\ 9 & -2 & -1 \\ 8 & x & 3 \end{bmatrix}$

（３） $\begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & x & 0 \\ y & 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & z & 5 \end{bmatrix}$

（４） $\begin{bmatrix} 2 & 1 & x & 2 \\ y & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ z & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

交代行列

（定義）:交代行列

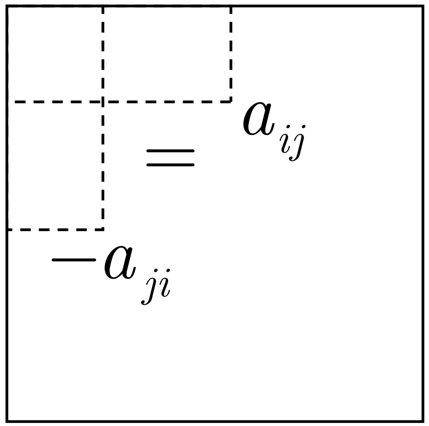
${}^t\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}$ なる n 次の正方行列を
（ n 次の）**交代行列（歪対称行列）**という。
すなわち、

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \text{が交代行列} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$n \times n$$

対角成分は
すべて0



交代行列の例

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

練習

以下の行列はすべて交代行列である。
このとき、x , y , z を求めよ。

（1）
$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & x & -1 \\ y & z & 0 \end{bmatrix}$$

（3）
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & -2 \\ x & 0 & 4 & -6 \\ -5 & y & 0 & z \\ 2 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

(4)
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ x & 0 & 5 & 3 \\ -3 & -5 & 0 & -4 \\ -1 & y & z & 0 \end{bmatrix}$$

対称行列と交代行列の性質1

（性質）：対称行列と交代行列の性質

任意の$n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、

$\boldsymbol{A} + {}^t\boldsymbol{A}$ は対称行列であり、

$\boldsymbol{A} - {}^t\boldsymbol{A}$ は交代行列である。

証明

$$ {}^t\left(\boldsymbol{A} + {}^t\boldsymbol{A}\right) = {}^t\boldsymbol{A} + {}^t\left({}^t\boldsymbol{A}\right) = {}^t\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} $$

$$ {}^t\left(\boldsymbol{A} - {}^t\boldsymbol{A}\right) = {}^t\boldsymbol{A} - {}^t\left({}^t\boldsymbol{A}\right) = {}^t\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{A} - {}^t\boldsymbol{A}) $$

$\mathcal{QED}$

対称行列と交代行列の性質2

（性質）:行列の対称行列と交代行列への分解

任意の正方行列 $\boldsymbol{A}$ は、対称行列と交代行列の和で表現できる。

証明

$\boldsymbol{A} + {}^t\boldsymbol{A}$ は対称行列であり、

$\boldsymbol{A} - {}^t\boldsymbol{A}$ は交代行列である。

よって、

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A} + {}^t\boldsymbol{A}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A} - {}^t\boldsymbol{A}\right)$$

$\mathcal{QED}$

例

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&4&-1\\-2&-3&-4\\5&0&2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}+{}^t\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&4&-1\\-2&-3&-4\\5&0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-2&5\\4&-3&0\\-1&-4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&4\\2&-6&-4\\4&-4&4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-{}^t\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&4&-1\\-2&-3&-4\\5&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-2&5\\4&-3&0\\-1&-4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&6&-6\\-6&0&-4\\6&4&0\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+{}^t\boldsymbol{A}\right)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}-{}^t\boldsymbol{A}\right)=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&-3&-2\\2&-2&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&3&-3\\-3&0&-2\\3&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&4&-1\\-2&-3&-4\\5&0&2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$$

練習

次の行列を対称行列と交代行列の和で表せ。

（１）　$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

（２）　$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

正則行列(重要)

(定義):正則行列

$n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{I}$$

を満たす正方行列 $\boldsymbol{X}$ があるとき、
$\boldsymbol{A}$ を正則行列という。また、このとき、
$\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{A}$ の逆行列といい、
$\boldsymbol{A}^{-1}$
と書く。

逆行列が存在する行列が正則行列である。
正則行列の逆行列もまた正則行列である。

正則行列の性質１

（性質）:逆行列の一意性

正則な行列　$\boldsymbol{A}$　の逆行列は唯一つ存在する。

証明）背理法による。

２つの逆行列$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2 (\neq \boldsymbol{X}_1)$ が存在すると仮定する。（背理法の仮定）

定義より、

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \quad \cdots(1)$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \quad \cdots(2)$$

が成り立つ。ここで、（１）の両辺に $\boldsymbol{X}_2$ を左から乗じる。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{I}$$

$$\therefore \boldsymbol{X}_2 \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1\right) = \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{I}$$

$$\therefore \left(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2$$

$$\therefore \boldsymbol{I}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2$$

$$\therefore \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2$$

これは矛盾である。

$\mathcal{QED}$

正則行列の性質2

（性質）:正則行列と演算

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を $n \times n$ の正則行列とする。
このとき、次式が成り立つ。

（1）$\boldsymbol{A}^{-1}$ も正則行列であり、$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$ 。

（2）$\boldsymbol{AB}$ も正則行列であり、$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)$。

（3）${}^{t}\boldsymbol{A}$ も正則行列であり、$\left({}^{t}\boldsymbol{A}\right)^{-1} = {}^{t}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)$。

証明

（1）$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{A}^{-1}$　とおく。

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$$

よって、定義より $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{C}$ の逆行列。

$$\therefore \boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}$$

（2） $\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)$

$\boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{AB}$ とおく。

$$\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \left(\boldsymbol{AB}\right)\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{BB}^{-1}\right)\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{AIA}^{-1} = \boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

$$\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{C} = \left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{AB}\right) = \boldsymbol{B}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BIB}^{-1} = \boldsymbol{BB}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

よって、定義より$\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\right)$ は $\boldsymbol{C}$ の逆行列。

$$\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \boldsymbol{C}^{-1} = \left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}$$

（3）　$\left({}^t\boldsymbol{A}\right)^{-1} = {}^t\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)$

$\boldsymbol{C} \equiv {}^t\boldsymbol{A}$ とおく。

$$\boldsymbol{C}\,{}^t\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = {}^t\boldsymbol{A}\,{}^t\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = {}^t\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right) = {}^t\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$$

$${}^t\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{C} = {}^t\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right){}^t\boldsymbol{A} = {}^t\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right) = {}^t\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$$

よって、定義より ${}^t\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)$ は $\boldsymbol{C}$ の逆行列。

$${}^t\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \boldsymbol{C}^{-1} = \left({}^t\boldsymbol{A}\right)^{-1}$$

$\mathcal{QED}$

2次の逆行列(復習)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ とする。

$|\boldsymbol{A}|$ の求め方

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

↘ 乗算する符号が正

↙ 乗算して符号が負

$$|\boldsymbol{A}|=ad-bc$$

$\boldsymbol{A}^{-1}$ の求め方

$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ を確認して、

$$\boxed{}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

↔ 交換

○ 乗算して符号が負

$\boxed{}$ $\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$ 倍

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例題

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

に対して、次式が成り立つことを確かめよ。

（1）$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$　（2）$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)$　（3）$\left({}^{t}\boldsymbol{A}\right)^{-1} = {}^{t}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)$

解）

（1）

$$\left|\boldsymbol{A}\right| = 7\times(-2) - 5\times(-3) = 1$$

$$\therefore \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| = 1$$

$$\therefore \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7 & 5\\ -3 & -2\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}7 & 5\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & -5\\ -7 & 2\end{bmatrix}$$

$$\left|\boldsymbol{AB}\right|=17\times 2-(-5)(-7)=-1$$

$$\therefore \left(\boldsymbol{AB}\right)^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 7 & 17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -5\\ -7 & -17\end{bmatrix}$$

$$\left|\boldsymbol{B}\right|=1\times(-1)-0=-1$$

$$\therefore \boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -5\\ 3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -5\\ -7 & -17\end{bmatrix}$$

(3) $\left({}^{t}\boldsymbol{A}\right)^{-1} = {}^{t}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$${}^{t}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left|{}^{t}\boldsymbol{A}\right| = 7 \times (-2) - (-3) \times 5 = 1$$

$$\therefore \left({}^{t}\boldsymbol{A}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore {}^{t}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

n 次の逆行列について

- 一般の n 次の逆行列は、
  ２次の逆行列を求めるときのうように、
  簡単に求めることはできない。

２次

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \overset{\text{公式}}{\Longleftrightarrow} \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

n次

$$A \Longleftrightarrow A' \Longleftrightarrow A'' \Longleftrightarrow \quad - - - - \quad \Longleftrightarrow A^{-1}$$

行列の行基本変形