

線形代数学

1

履修にあたって

2009年度1セメスタ開講

シラバス: p.66

対象: 電子情報システム学科

科目分類: **必修** (システム科学技術基礎科目)

時間割: 水曜3時限 (12:50-14:20)

講義室: K101(AVホール)

担当: 草薙良至 (電子情報システム学科)

教員室: G I 511

(オフィスアワー、水曜日1時限)

内線: 2095

e-mail: kusakari@akita-pu.ac.jp

質問は随時可能。

サポートページ:

<http://www.akita-pu.ac.jp/system/elect/comp1/kusakari/japanese/teaching/LinearAlgebra/>

注意: 受講の際、計算用のノートを準備すること。

2

成績評価

• 評価方法

- 定期試験 70%
- レポート課題 15%
- 講義内演習(出席) 15%

3

教科書等

教科書:

「やさしく学べる線形代数」

石村園子著 共立出版社 2000円

参考書:

「テキスト 線形代数」

小寺平治著 共立出版社 2000円

「プログラミングのための線形代数」

平岡和幸、堀玄 共著、オーム社 3000円

「線形代数とその応用」

G・ストラング著 産業図書 4200円

演習書:

「演習と応用 線形代数」

寺田文行・木村宣昭著

サイエンス社 1700円

4

線形代数学とは、

○線形代数学とは、簡単にいうと
「行列」や「ベクトル」
を扱う数学です。

○高校の数学Cで扱った行列を、
より一般的に拡張したものを扱います。

5

数学Cの復習

数学Cでは主に 2×2 の行列を扱っているはずです。

ここでは、復習もかねてそれらを順に振り返ります。

○慣用的な行列の表現

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

行列を表す変数には、
太대英文字を用います。

6

行列の相等

定義: (行列の相等)

行列 A, B が同じ型で対応する成分が等しいとき、
 行列 A と行列 B は「等しい」といいます。
 記号では以下のように書きます。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p, & b = q \\ c = r, & d = s \end{cases}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

7

例題

次の等式が成り立つように、 x, y, u, v の値を定めよ。

$$\begin{pmatrix} x-y & x+y \\ u+1 & 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

解

行列の相等の定義より、

$$\begin{cases} x-y=1, & x+y=3 \\ u+1=2, & 2v=4 \end{cases}$$

が成り立つ。よって、

$$x=2, y=1, u=1, v=2$$

8

練習

次の等式が成り立つように、 x, y, u, v の値を定めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 3v \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ x & y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} u & v \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$$A = B$$

9

行列の加法

定義: (行列の和)

同じ型の行列 A, B について、対応する成分の和を成分とする
 行列を、
 A と B の和といい、

 $A + B$

と表す。

記号では以下のように書きます。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

10

例題

次の計算をせよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

解

行列の和の定義より、

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-4) & -2+3 \\ -3+2 & 6+(-1) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

11

練習

次の計算をせよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

12

加法逆元($-A$)

定義: (加法逆元)

行列 A に対して、 A の各成分の符号を反転させた行列を

$-A$

で表す。

(なお、この行列 $-A$ は、加法に関する A の逆元(加法逆元)とも呼ばれる。)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき、 } -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

13

零行列

定義: (零行列)

すべての成分が0である行列を零行列といい、

O

で表す。

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14

例題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ に対して、次の行列を求めよ。}$$

$$(1) -A \quad (2) -(-A) \quad (3) A + (-A)$$

解

$$(1) -A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) -(-A) = -\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$(3) A + (-A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

15

練習

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & x \end{pmatrix} \text{ に対して、次の行列を求めよ。}$$

$$(1) -A$$

$$(2) -(-A)$$

$$(3) A + (-A)$$

16

加法についての性質

性質: (行列加法の性質)

同じ型の行列の加法について、
次ぎのことが成り立つ。

1. 交換法則 $A + B = B + A$
2. 結合法則 $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. 零行列と、加法逆元の存在。

$$A + O = A, \quad O + A = A,$$

$$A + (-A) = O, \quad (-A) + A = O$$

17

行列の差

定義: (行列の減法)

同じ型の行列 A と B に対して

$$A + (-B)$$

を、

A と B の差といい

$$A - B$$

と書く。記号で表すと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{pmatrix}$$

18

練習

次の計算をせよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

19

行列の実数倍(スカラー倍)

定義: (行列のスカラー倍)

実数 k に対して、行列 A の各成分を k 倍する行列を kA

と書く。記号では次のように書く。

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

性質: (特別なスカラー倍)

また、実数倍の定義から、次ぎの性質が成り立つ。

$$1A = A, \quad (-1)A = -A, \quad 0A = O, \quad kO = O$$

20

例題

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{に対して、次の行列を求めよ。}$$

$$(1) 3A \quad (2) (-2)A$$

解

$$(1) 3A = 3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-1) & 3 \times 2 \\ 3 \times 4 & 3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

$$(2) (-2)A = (-2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \times (-1) & (-2) \times 2 \\ (-2) \times 4 & (-2) \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}$$

21

練習

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad k=2, l=-3$$

とする。

次の行列を求めよ。

$$(1) kA \quad (2) lA$$

$$(3) kB \quad (4) lB$$

22

実数倍についての性質

性質: (行列のスカラー倍)

行列の実数倍について、次ぎのことが成り立つ。
ここで、 A, B は同じ型の行列で、 k, l は実数である。

1. $(kl)A = k(lA)$
2. $(k+l)A = kA + lA$
3. $k(A+B) = kA + kB$

23

練習

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

次の行列を求めよ。

$$(1) 2A - 3C \quad (2) 2A - 3B + 4C$$

$$(3) 2(A+B) - A \quad (4) 2(3A - B) + 2B - C$$

24

ベクトル

定義: (ベクトル)

x 成分, y 成分を並べた (x, y) のように、
複数の成分を並べたもの。
成分が n 個のベクトルは、
 $1 \times n$ あるいは、 $n \times 1$ の行列とみなせる。
 $1 \times n$ のとき、行ベクトル
 $n \times 1$ のとき、列ベクトルとよぶ。

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行ベクトル 列ベクトル

25

ベクトルと行列の積

定義: (ベクトルと行列の積)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$$

とする。

行列と列ベクトルの積

$$Ax = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

行ベクトルと行列の積

$$pA = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \end{pmatrix}$$

26

行列と連立方程式

行列とベクトルを用いて連立方程式を表現できる。

次のような連立方程式

$$\begin{cases} ax+by = p \\ cx+dy = q \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

は、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

と書く事ができる。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ とおくと、}$$

$$Ax = p \quad \dots \textcircled{3}$$

とも書ける。

①、②、③は、同じ連立方程式の異なる表現。

27

1次方程式と2元連立1次方程式

一次方程式

未知数

既知の値

$$5x = 3$$

既知の値

2元連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x+3y = 3 \\ -x+5y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ として、}$$

成分全て
既知の値

$$Ax = p$$

成分全て
未知数成分全て
既知の値

28

2組の式から行列の積へ

次のような2組の式を考える。

$$\begin{cases} ax+by = s \\ cx+dy = t \end{cases} \quad \dots \textcircled{1} \quad \begin{cases} es+ft = u \\ gs+ht = v \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

このとき、 u, v を s, t を用いずに、 x, y で表す。①の s, t を、②に代入する。

$$\begin{cases} u = (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ v = (ga + hc)x + (gb + hd)y \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

これを行列の表現で調べてみる。

29

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2},$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3},$$

と、表現できる。

ここで、①'と②'から形式的に、次のような表現を書いてみる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3}',$$

このことより、

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

と決めてあげると都合がよさそう。

30

行列積の定義

定義: (行列どうしの積)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

行列Bと行列Aの積 BA は、

$$BA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

で定義される。

31

行列積の覚え方

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{の計算}$$

(1) まず、出来上がる行列の型をきめる。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \end{array}$$

(2) 個々の成分を求める。

32

練習

次の行列を求めよ。

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

33

行列積の性質

性質: (行列どうしの積の交換不可性)

$$AB \neq BA$$

となる行列A、行列Bがある。

34

例題

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

 AB , BA を計算することによって、 $AB \neq BA$ を確かめよ。

解

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+0 \\ 0+6 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+4 \\ 3+0 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{なので、} AB \neq BA$$

35

単位行列

定義: (単位行列)

対角成分が1で、他の成分が0である行列を
単位行列 (unit matrix, Identity matrix)
といい、 E あるいは I で表す。

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

36

単位行列と零行列の性質

性質: (単位行列と零行列)

A を任意の正方行列、 A と同じ型の単位行列を I 零行列を O とする。このとき、次が成り立つ。

1. $AI = IA = A$
2. $AO = OA = O$

比較せよ。

$a \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする。このとき次が成り立つ。

1. $a \times 1 = 1 \times a = a$
2. $a \times 0 = 0 \times a = 0$

37

零因子

定義: (零因子)

行列の積では、 $A \neq O$ かつ $B \neq O$ であっても、 $AB = O$ となることがある。
このとき、 A および B を **零因子** という。

比較せよ。

$a, b \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする。このとき次が成り立つ。

$$a \times b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

($a \times b = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$ と読む。)

38

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2 & -4+4 \\ 4-4 & -8+8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

39

逆行列

定義: (逆行列)

正方行列 A に対して、
 $AX = XA = I$
を満たす正方行列 X が存在するならば、
 X を A の **逆行列** といい
 A^{-1}
で表す。

比較せよ。

$a \neq 0$ とする。

$$a \times b = b \times a = 1$$

を満たす実数 b を a の逆数といい、 a^{-1} と表す。

$$b = a^{-1} = \frac{1}{a} \text{ である。}$$

40

連立方程式の解法から逆行列へ

次のような連立方程式を考える。

$$\begin{cases} ax+by = p \\ cx+dy = q \end{cases} \text{ 行列で表すと } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

$$Ax = p$$

$$\Updownarrow$$

$$x = A^{-1}p$$

$$ax = b \Leftrightarrow x = a^{-1}b$$

$$5x = 3 \Leftrightarrow x = 5^{-1} \times 3 = \frac{3}{5}$$

通常のスカラーでの規則に、
合うように逆行列 A^{-1} を
定義したい。

41

$$\begin{aligned} \begin{cases} ax+by = p \cdots (1) \\ cx+dy = q \cdots (2) \end{cases} \text{ を解く。} \\ (1) \times d - (2) \times b \\ \frac{adx+bdy}{-bcx+bdy} = \frac{dp}{bq} \\ \hline (ad-bc)x = dp-bq \\ \\ ad-bc \neq 0 \text{ と仮定すると、} \\ x = \frac{1}{(ad-bc)}(dp-bq) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \times c - (2) \times a \\ \frac{acx+bcy}{-acx+ady} = \frac{cp}{aq} \\ \hline (bc-ad)y = cp-aq \\ \\ ad-bc \neq 0 \text{ と仮定すると、} \\ y = \frac{1}{(ad-bc)}(-cp+aq) \end{aligned}$$

42

よって、 $ad - bc \neq 0$ のときには、

$$\begin{cases} ax + by = p \cdots (1) \\ cx + dy = q \cdots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{(ad - bc)}(dp - bq) \\ y = \frac{1}{(ad - bc)}(-cp + aq) \end{cases}$$

行列を用いると、 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$ad - bc \neq 0$ ならば、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

この部分を逆行列にしたい。

逆行列の存在判定

性質：（逆行列の存在する条件）

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

$(ad - bc) \neq 0$ のとき、 A の逆行列 A^{-1} が存在して、 $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$(ad - bc) = 0$ のとき、 A の逆行列は存在しない。

行列式

定義：（2次の行列式）

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

このとき、 A の行列式 $|A|$ は次式で定義される。

$|A| = ad - bc$

行列式は、次ぎのように書かれることもある。

$\det(A) = ad - bc$

行列式・逆行列の求め方

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

$|A|$ の求め方

$|A| = ad - bc$

乗算する符号が正
乗算して符号が負

A^{-1} の求め方

$|A| \neq 0$ を確認して、

交換
乗算して符号が負
 $\frac{1}{|A|}$ 倍

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

練習

次の行列に対して、逆行列を持つかどうかを調べ、もし持てばそれを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$

逆行列の性質

性質：（逆行列の存在する条件）

正方行列 A が逆行列 A^{-1} を持つとき、次のことが成り立つ。

- $AA^{-1} = A^{-1}A = E$
- $(A^{-1})^{-1} = A$

同じ型の正方行列 A 、 B が共に逆行列を持つとき、積 AB も逆行列を持ち、次のことが成り立つ。

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

順序に注意すること。