0章　数学基礎

大学では、高校より厳密に議論を行う。そのために、議論の対象を明確にする必要がある。

集合

(定義)集合

ある“もの”(基本的な対象、概念)の集まりを、**集合**という。
集合に含まれる“もの”を、集合の**要素**または**元**という。

集合では、
「含まれる」か「含まれないか」
のどちらの判定が厳密に判断できなければならない。

集合については、
3セメスタ開講の「離散数学」で詳しく扱う。

集合の表現

1. 要素を明示する表現。
(外延的表現)

中括弧で、囲う。

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

慣用的に、
英大文字を用いる。

カンマで区切る

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

自然数の集合

類推が容易なとき、
・・・で表す。

2. (必要十分)条件での表現。
(内包的表現)

$$Y = \{x \mid P(x)\}$$

代表元、
慣用的に英小文字

真偽が判定できる文(命題)、
すなわち必要十分条件

$$K = \{n \mid n \geq 100, n\text{は偶数}\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q\text{は整数}, q \neq 0 \right\}$$

空集合

(定義)空集合

要素が一つも無いようなものも集合と考え、
それを**空集合**といい、
ϕ あるいは {}
と表す。

$$\phi = \{\ \}$$

要素が一つも無いので,
括弧だけを記述する。

慣用的な集合の記号

$$\mathbb{N} = \{x \mid x\text{は自然数}\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{x \mid x\text{は整数}\} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$
$$\mathbb{Q} = \{x \mid x\text{は有理数}\}$$
$$\mathbb{R} = \{x \mid x\text{は実数}\}$$
$$\mathbb{C} = \{x \mid x\text{は複素数}\}$$

これらの記号は万国共通に用いられる。

集合の要素

（定義）集合の要素

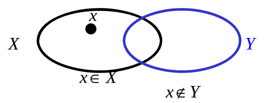
集合 X に対して、もの x がX の要素であるとき、すなわち
ものx が集合X に含まれるとき、

$x \in X$

と表し、
集合 X に対して、もの x が X の要素で無いとき、すなわち
もの x が集合X に含まれないとき、

$x \notin X$

と表す。



7

例題

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを示せ。

（1） $1 \in A$ （2） $2 \in A$ （3） $3 \notin A$

（4） $4 \notin A$ （5） $5 \in A$ （6） $6 \in A$

解

（1）○（2）×（3）×
（4）○（5）○（6）×

8

練習

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを示せ。

（1） $10 \in \mathbb{N}$ （2） $-1 \in \mathbb{N}$ （3） $132124 \notin \mathbb{N}$

（4） $3.4 \notin \mathbb{N}$ （5） $10 \times 4 + 3 \in \mathbb{N}$ （6） $10 \div 4 + 3 \in \mathbb{N}$

9

部分集合

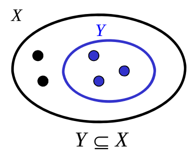
（定義）部分集合

2つの集合 X, Yについて、
$y \in Y \Rightarrow y \in X$
が成り立つとき、
Y は X の**部分集合**であるといい、
$Y \subset X$ または $Y \subseteq X$
と表す。

$\Rightarrow$
（ならば）とよむ。
次の論理に従う。

A	B	$A \Rightarrow B$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

F : 偽
T : 真



10

例題

次の集合において、
部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

$C = \{3, 5\}$

$D = \{2, 3, 5, 7\}$

解

$A \subseteq A,\ B \subseteq A,\ C \subseteq A$
$B \subseteq B,\ C \subseteq B$
$C \subseteq C$
$C \subseteq D,\ D \subseteq D$

11

練習

次の集合において、
部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

$\mathbb{N}$

$A = \{x \mid x は x^2 - 5x + 6 = 0 の解\}$

$B = \{x \mid x は素数\}$

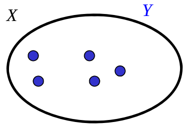
$C = \{x \mid x は奇数\}$

12

集合の相等

（定義）集合の相等

2つの集合 X, Yについて、
$Y \subseteq X$ かつ $X \subseteq Y$
が成り立つとき、
X と Y は「等しい」といい、
$X = Y$
と表す。



$X = Y$

13

等しい集合の例

$\{1,3,5,7\} = \{3,7,1,5\}$

順序は関係ない。

$\{2,2,4,6,6,6,8\} = \{2,4,4,4,6,6,8,8,8,8\}$

個数は関係ない。

$\{x \mid x\text{は偶数}\} = \{y \mid \text{ある}k \in \mathbb{Z}\text{が存在して}y = 2k\}$

必要十分条件の文字（代表元）は関係ない。

$\{1,2,3,4\} \neq \{1,2,3,3\}$

$\{10,9,8,7\} \neq \{9,8,7,6\}$

14

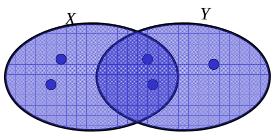
和集合

（定義）和集合

2つの集合 X, Yについて、
X または Y の要素全体からなる集合を
X と Y の和集合といい、
$X \cup Y$
と表す。すなわち、

$X \cup Y \equiv \{x \mid x \in X \text{または} x \in Y\}$

左辺を右辺で定義している。



$X \cup Y$

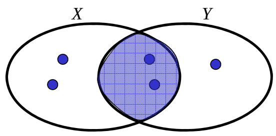
15

共通部分

（定義）共通部分

2つの集合 X, Yについて、
X と Y のどちらにも含まれる要素全体からなる集合を
X と Y の共通部分（積集合）といい、
$X \cap Y$
と表す。すなわち、

$X \cap Y \equiv \{x \mid x \in X \text{かつ} x \in Y\}$



$X \cap Y$

16

例題

$A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{1,3,5\}$
$C = \{3,5\}$ $D = \{2,3,5,7\}$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

（1） $A \cup D$ （2） $A \cap B$ （3） $B \cup D$ （4） $A \cap B \cap C$

解

（1） $A \cup D = \{1,2,3,4,5,7\}$

（2） $A \cap B = \{1,3,5\}$

（3） $B \cup D = \{1,2,3,5,7\}$

（4） $A \cap B \cap C = \{3,5\}$

17

練習

$A = \{2,4,6,8\}$ $B = \{1,3,5\}$
$C = \{3,6,9\}$ $D = \{5,7,8,9\}$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

（1） $A \cup B$ （2） $A \cap B$

（3） $B \cup D$ （4） $A \cap D$

（5） $A \cup B \cup C$ （6） $B \cup C \cup D$

18

集合の仲間

(定義）順序集合（列、組）

ある“もの”（基本的な対象、概念）の順序を
考慮して並べた集まりを、
順序集合（列、組）という。

丸括弧で、囲う。

$$L = (3,6,9,12)$$

カンマで区切る

19

順序集合の相等例

$$(3,6,9,12) = (3,6,9,12)$$

$$(3,6,9,12) \neq (6,9,12,3)$$

順序が違えば、等しくない。

$$(3,6,9,12) \neq (3,6,9)$$

要素数が違えば、等しくない。

$$(3,6,9,12) \neq (3,6,9,15)$$

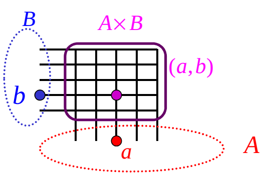
要素が違えば、等しくない。

20

直積集合

(定義）直積

n 個の集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に対して、
次の集合
$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i (i = 1, 2, \cdots n)\}$
を$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の直積（直積集合）といい、
$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$
と表す。



$a \in A$

$b \in B$

$(a,b) \in A \times B$

21

例題

$A = \{3,4,5\}$ $B = \{2,3\}$

とする。このとき、$A \times B$ と $B \times A$ を求めよ。

解

$$A \times B = \{(3,2),(3,3),(4,2),(4,3),(5,2),(5,3)\}$$

$$B \times A = \{(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

22

練習

$A = \{1,2\}$ $B = \{3,6\}$ $C = \{k,l\}$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

(1) $A \times B$ (2) $B \times A$

(3) $B \times C$ (4) $A \times A$

(5) $A \times B \times C$ (6) $A \times C \times B$

23

写像

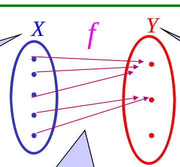
(定義）写像

2つの集合 X, Y について、X の各要素事に Y の
ある要素（1つ）が対応づけられているとき、
この対応づけのことを X から Yへの写像（関数）という。
f が X から Y への写像を

$$f : X \to Y$$

と表す。

定義域といいます。



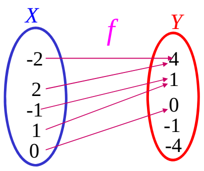
値域といいます。

行き先は一箇所

24

（定義）要素の像

2つの集合 X, Y に対する写像を $f : X \to Y$ とする。このとき、X の要素 x（$x \in X$）に対応する Y の要素を
$f(x)$
と表す。（このときは、もちろん $f(x) \in Y$ である。）



$f(-1) = 1$

対応関係を式で定めることもあるが、式でなくても写像は定義できる。
$x \in X$ に対して、$f(x) = x^2 \in Y$

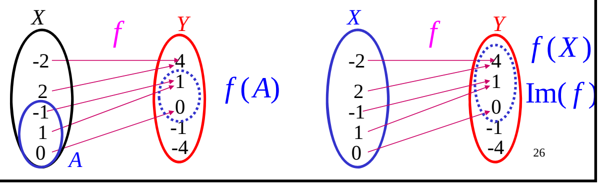
代表元といいます。

25

像

（定義）定義域の像

写像 $f : X \to Y$ の定義域 X の部分集合 $A (A \subseteq X)$ に対して、値域 Y の部分集合
$\{ f(x) \mid x \in A \}$
を写像 f による A の像（Image）といい、
$f(A)$
と表す。また、$A = X$ のとき、$f(X)$ を
$\mathrm{Im}(f)$
とも表す。



26

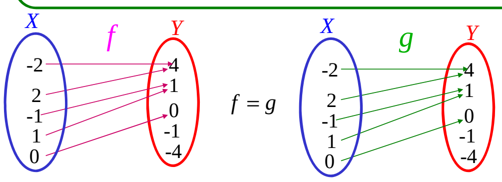
写像の相等

（定義）写像の相等

集合 X から Y への2つの写像 f, g は、
$(f : X \to Y, g : X \to Y)$

任意の $x \in X$ に対して、 $f(x) = g(x)$

が成り立つときに「等しい」といい、
$f = g$
と表す。



27

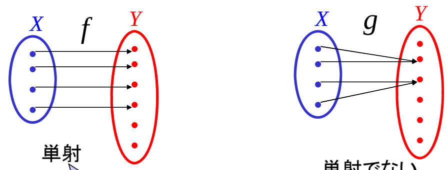
単射

（定義）単射

集合 X から Y への写像 $f : X \to Y$ が、

$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$

を満たすとき、 f は単射（写像）であるという。



単射　　単射でない

対応元が1つ

28

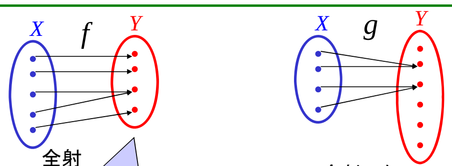
全射

（定義）全射

集合 X から Y への写像 $f : X \to Y$ が、

$f(X) = Y$

を満たすとき、 f は全射（写像）であるという。
または、上への写像ともいう。



全射　　全射でない

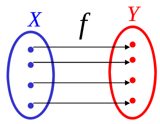
値域に“余り”がない。

29

全単射

（定義）全単射

単射かつ全射であるような写像を、
全単射（写像）という。
また、全単射は、1対1上への写像ともいう。



全単射

値域に“余り”がなく、
値域の各元がちょうどひとつの定義域の元に対応している。

30

合成写像

(定義)合成写像

集合 X,Y,Z に対して、2つの写像

$$f:X\to Y,\ g:Y\to Z$$

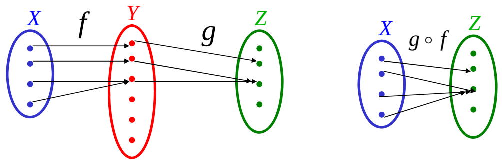
があるとき、X の各要素 x を Z の要素 $g(f(x))$
に対応させることにより X から Z への写像ができる。
これを、f,g の合成写像といい、

$$g\circ f$$

と表す。すなわち、

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

である。



31

逆像

(定義)逆像

写像 $f:X\to Y$ に対して、Y の部分集合 B をとると、

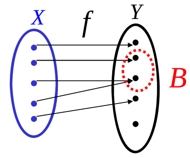
$$\{x \mid f(x)\in B\}$$

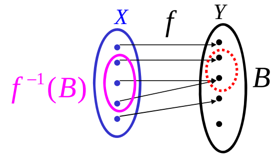
は X の部分集合である。これを、f による B の**逆像**といい

$$f^{-1}(B)$$

と表す。すなわち、

$$f^{-1}(B)\equiv\{x \mid f(x)\in B\}$$



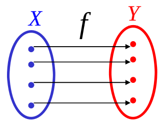


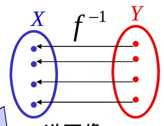
32

逆写像

(定義)逆写像

写像 $f:X\to Y$ が全単射ならば、Y の各要素 y に
対して、X の要素 $f^{-1}(y)$ を対応させる写像を定義できる。
これを、f の逆写像といい、f^{-1} と表す。





矢印を反対にする。

33