

第5回 線形代数学レポート課題（線形空間）

解答例

1. 次のベクトルの集合が一次独立か一次従属かを調べよ。また、一次従属である場合には、一つのベクトルを残りのベクトルの一次結合で表せ。

$$(1) \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \}. \text{ただし、} \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(解法1 係数行列の正則性に基づく方法)

3本のベクトルなので、3つの係数 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ を用意して次のように線形関係式を作る。

$$k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + k_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

$$\therefore k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって、線形関係式は連立方程式とみなすことができる。ここで、

$$\mathbf{X} \equiv [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \text{と連立方程式の係数行列を置き、} \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \text{と任意定数}$$

のベクトルをおくと、連立方程式は $\mathbf{X}\mathbf{k} = \mathbf{0}$ と表される。

係数行列 $\mathbf{X}$ の正則性を調べるために、行列 $\mathbf{X}$ の行列式 $|\mathbf{X}|$ を求める。

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-2 - 1 + 18) - (3 - 6 - 2) \\ &= 15 + 5 \\ &= 20 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

よって、係数行列 $\mathbf{X}$ は逆行列 $\mathbf{X}^{-1}$ を持ち、正則行列である。ゆえに、その列ベクトルの集

合 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ は一次独立である。

なお、係数行列 $\mathbf{X}$ は、正則であるので、逆行列 $\mathbf{X}^{-1}$ が存在する。

$$\mathbf{X}\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{k} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{0}$$

$$\therefore \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり、自明な線形関係式しか持たない。

よって、定義に基づいても、 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ は一次独立であることが分かる。

$$(2) \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}。ただし、\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(解法2 ベクトルから行列を作り、その行列を行基本変形で階段行列にする方法)

$$\mathbf{X} \equiv [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

行基本変形で階段行列化する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{(3)-1 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{列目の掃きだし}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2} \times (3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{列目の掃きだし}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\text{rank}\mathbf{X} = 3 < 4$ となり、ベクトルの本数分の階数がないので一次従属である。

$k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ とし、線形関係式 $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + k_3\mathbf{x}_3 + k_4\mathbf{x}_4 = \mathbf{0}$ を作る。

このとき、行列 $\mathbf{X}$ が係数行列になることに注意する。階段行列の形より、次の解が存在することがわかる。

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \\ l \end{bmatrix} \text{ ただし、 } l \in \mathbb{R} \text{ は任意定数。}$$

線形関係式に代入して、 $\mathbf{x}_4$ を残りのベクトル $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ の線形結合で表す。

$$-\frac{l}{2}\mathbf{x}_1 - \frac{l}{2}\mathbf{x}_2 - \frac{l}{2}\mathbf{x}_3 + l\mathbf{x}_4 = \mathbf{0}$$

$$\therefore \mathbf{x}_4 = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_3$$

$$(3) \ \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}. \text{ ただし、 } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} \equiv [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{x}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ とおく。}$$

行基本変形で階段行列にする。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-1 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2) \leftrightarrow (3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(4)-1 \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)-1 \times (3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\text{rank} \mathbf{X} = 3 < 4$ となり、ベクトルの本数分の階数がないので一次従属である。

$k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ とし、線形関係式 $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + k_3\mathbf{x}_3 + k_4\mathbf{x}_4 = \mathbf{0}$ を作る。

このとき、行列 $\mathbf{X}$ が係数行列になることに注意する。階段行列の形より、次の解が存在することがわかる。

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2l \\ -l \\ -2l \\ l \end{bmatrix} \text{ただし、} l \in \mathbb{R} \text{は任意定数。}$$

$$-2l\mathbf{x}_1 - l\mathbf{x}_2 - 2l\mathbf{x}_3 + l\mathbf{x}_4 = \mathbf{0}$$

$$\therefore \mathbf{x}_4 = 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3$$

実際、次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. 次のベクトルの集合 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ に対して、生成する部分空間 $L\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ を求めよ。

また、部分空間 $L\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ の次元 $\dim L\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ と基底を求めよ。

$$(1) \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ベクトルを並べて行列を作り、行基本変形で階段行列にする。

$$\mathbf{X} \equiv [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4} \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $\dim L[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] = \text{rank}[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] = 3$ であり、次元は3。

また、階段行列の形より、 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ が部分空間 $L[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]$ の基底になる。

よって、

$$\begin{aligned}
L[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] &= \{k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + k_3\mathbf{x}_3 \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

これは、3次元空間内の（原点を通る）平面を表す。なお、

$$\begin{cases} x = k_1 + k_2 \\ y = -k_1 + 3k_2 \\ z = -k_2 \end{cases}$$

とにおいて、 k_1, k_2 を消去することにより、 $x + y + 4z = 0$ という平面の式得られる。

$$(2) \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} \equiv [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{とおく。}$$

行基本変形で階段行列にする。

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-1 \times (1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2) \leftrightarrow (3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{(4)-1 \times (2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)-1 \times (3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

よって、 $\dim L[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_4] = \text{rank}[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_4] = 3$ であり、次元は3。

また、階段行列の形より、 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ が部分空間 $L[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_4]$ の基底になる。よつ

て、次のように部分空間が求められる。

$$\begin{aligned} L[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{x}_4] &= \{k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + k_3\mathbf{x}_3 + k_4\mathbf{x}_4 \mid k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + k_3\mathbf{x}_3 \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

これは、4次元空間中の3次元の部分空間を表している。このように元の n 次元空間中の $n-1$ 次元の部分空間を“超平面”と呼ぶ。よって、 $L[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{x}_4]$ は3次元超平面である。

$$(3) \ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} \equiv [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{x}_4 \ \mathbf{x}_5] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{とおき、行基本変形で階段行列にする。}$$

る。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって、 $\dim L[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{x}_4 \ \mathbf{x}_5] = \text{rank}[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{x}_4 \ \mathbf{x}_5] = 3$ であり、次元は3。

また、階段行列の形より、 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ が部分空間 $L[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{x}_4 \ \mathbf{x}_5]$ の基底になる。

よって、次のように部分空間が求められる。

$$\begin{aligned}
L[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_4 \quad \mathbf{x}_5] &= \{k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + k_3\mathbf{x}_3 + k_4\mathbf{x}_4 + k_5\mathbf{x}_5 \mid k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + k_3\mathbf{x}_3 \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

これは、 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ は3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の基底にもなっていることを意

味する。