

第4回 線形代数学レポート課題(行列式とその応用)

解答例

提示：2008/5/28(水) 提出：2008/6/11(水)

1. 次の行列式を求めよ。

サラスの公式により求める。

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ = \{2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-1)\} - \{2 \cdot 5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) \cdot 3 + (-1) \cdot 4 \cdot 1\} \\ = (24 + 5 - 3) - (-10 - 9 - 4) \\ = 26 + 23 \\ = 49$$

(2)

乗算の左辺と右辺の行列式をそれぞれ求める。

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

よって、

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} = 1$$

なお、行列 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ は z 軸を中心に角度 θ だけ回転する行列を表し、行列

$\begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$ は y 軸を中心に角度 φ だけ回転する行列を表す。

(3)

行列式の定義（展開公式）により求める。

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (4\text{行で展開})$$

$$= (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (2\text{行で展開})$$

$$= (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \quad (\text{サラスの公式})$$

$$= -2 \cdot [\{-18 - 15\} - \{0\}]$$

$$= 2 \cdot 33$$

$$= 66$$

(4)行列の性質を利用して求める。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & u \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & u-x \\ 0 & y^2-xy & z^2-xz & u^2-xu \\ 0 & y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & u^3-xu^2 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} (y-x) & (z-x) & (u-x) \\ y(y-x) & z(z-x) & u(u-x) \\ y^2(y-x) & z^2(z-x) & u^2(u-x) \end{vmatrix} \\
= (y-x)(z-x)(u-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & u \\ y^2 & z^2 & u^2 \end{vmatrix} \\
= (y-x)(z-x)(u-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & u-y \\ 0 & z^2-zy & u^2-uy \end{vmatrix} \\
= (y-x)(z-x)(u-x)(z-y)(u-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & u \end{vmatrix} \\
= (y-x)(z-x)(u-x)(z-y)(u-y)(u-z)$$

なお、この行列式はファンデルモンドの行列式として知られている。ファンデルモンドの行列式の一般形は次の式で与えられる。一般式は帰納法で証明できる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

2. 次の問いに答えよ。

(1) 次の2つのベクトルに直交するベクトルを示せ。

$$\mathbf{a} = (-1, 2, 3), \mathbf{b} = (2, -3, 1)$$

直交するベクトル $\mathbf{c}$ は外積で求められる。

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2+9)\mathbf{i} + (6+1)\mathbf{j} + (3-4)\mathbf{k}$$

$$= 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

よって、 $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ と求められる。このベクトルを任意定数 $k \in \mathbb{R}$ （スカラー）倍したベク

トル $k\mathbf{c}$ もまた、 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に直交する。

なお、長さ1のベクトルは、 $\frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}$ で求められる。

$$\|\mathbf{c}\| = \sqrt{11^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{121 + 49 + 1} = \sqrt{171} \text{ であるので、}$$

$$\pm \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{171}} \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ がベクトル } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ に直交する単位ベクトルである。}$$

(2) 次の3点からなる3角形の面積を求めよ。

$$A(1, -1, 2), B(-1, 2, -1), C(3, -2, 3)$$

点Aを始点とするベクトルを求め、外積を利用する。すなわち、三角形の面積を S とすると次式が成り立つ。

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

まず個々のベクトルを求める。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2, 3, -3),$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (2, -1, 1)$$

これらのベクトルより外積を求める。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (3-3)\mathbf{i} + (-6+2)\mathbf{j} + (2-6)\mathbf{k} \\
&= 0\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \\
&= -4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}
\end{aligned}$$

このベクトルのノルムの半分が求める面積である。

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-4)^2} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{32} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

(3) 次の3つのベクトルで構成される平行6面体の体積を求めよ。

$$\mathbf{a} = (-2, 1, 1), \mathbf{b} = (1, 2, 3), \mathbf{c} = (-1, 2, 1)$$

体積を V とすると、次式が成り立つ。

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

よって、スカラー三重積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ を求める。

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-4 - 3 + 2) - (-12 + 1 - 2) \\
&= -5 + 13 \\
&= 8
\end{aligned}$$

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = 8$$

3.次の行列に対して、余因子行列を求めることで、逆行列を求めよ。

(1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \text{ とする。}$$

余因子行列 $\tilde{\mathbf{A}} = {}^t [\widetilde{a_{ij}}]$ は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{12}} & \widetilde{a_{13}} \\ \widetilde{a_{21}} & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} \\ \widetilde{a_{31}} & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17 & -21 & -27 \\ 5 & -9 & -7 \\ -8 & 8 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17 & 5 & -8 \\ -21 & -9 & 8 \\ -27 & -7 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

転置と符号を忘れないこと。

逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ は、余因子行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ と行列式 $|\mathbf{A}|$ を用いて次のように計算できる。

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}}$$

ここで、行列式 $|\mathbf{A}|$ をサラスの方法により求める。

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (15 + 12 + 6) - (-2 - 9 + 60) \\ &= 33 - 49 \\ &= -16 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \tilde{A} \\
&= \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} 17 & 5 & -8 \\ -21 & -9 & 8 \\ -27 & -7 & 8 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -17 & -5 & 8 \\ 21 & 9 & -8 \\ 27 & 7 & -8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(驗算)

$$\begin{aligned}
&A^{-1} \cdot A \\
&= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -17 & -5 & 8 \\ 21 & 9 & -8 \\ 27 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -17-15+48 & 17-25+8 & -34+10+24 \\ 21+27-48 & -21+45-8 & 42-18-24 \\ 27+21-48 & -27+35-8 & 54-14-24 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{I}
\end{aligned}$$

(2)

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \text{ とする。}$$

まず、行列式 $|\boldsymbol{B}|$ を求める。

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (1\text{列で展開})$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (3\text{列で展開})$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5$$

次に余因子行列 $\widetilde{\mathbf{B}} = {}^t[\widetilde{b}_{ij}]$ を求める。

全ての (i, j) 要素に対して、 (i, j) 余因子 $\widetilde{b}_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{b_{ij}}$ を求める。

$$\widetilde{b}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - (-1) = 5$$

$$\widetilde{b}_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\widetilde{b}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\widetilde{b}_{14} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\widetilde{b}_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\{(2-3)-(2+6)\} = -\{-1-8\} = 9$$

$$\widetilde{b}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$\widetilde{b}_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\widetilde{b}_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) - (2) = -3$$

$$\widetilde{b}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - 6) - (4 - 3) = -7 - 1 = -8$$

$$\widetilde{b}_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\{(-1)\} = 1$$

$$\widetilde{b}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\widetilde{b}_{34} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\{(-2) - (-1)\} = -\{-1\} = 1$$

$$\widetilde{b}_{41} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\{(12) - (-3)\} = -\{15\} = -15$$

$$\widetilde{b}_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\widetilde{b}_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\widetilde{b}_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4) - (-1) = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \widetilde{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \widetilde{b}_{11} & \widetilde{b}_{12} & \widetilde{b}_{13} & \widetilde{b}_{14} \\ \widetilde{b}_{21} & \widetilde{b}_{22} & \widetilde{b}_{23} & \widetilde{b}_{24} \\ \widetilde{b}_{31} & \widetilde{b}_{32} & \widetilde{b}_{33} & \widetilde{b}_{34} \\ \widetilde{b}_{41} & \widetilde{b}_{42} & \widetilde{b}_{43} & \widetilde{b}_{44} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & -1 & -3 \\ -8 & 1 & 2 & 1 \\ -15 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 9 & -8 & -15 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって、逆行列は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{B}|} \widetilde{\mathbf{B}} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 9 & -8 & -15 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(検算)

$$\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 9 & -8 & -15 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 5+18-8-15 & 10-9-16+15 & 15-15 \\ 0 & 5 & -2+2 & 0 \\ 0 & -2+2 & 1+4 & 0 \\ 0 & -6+1+5 & 3+2-5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{I}$$