

線形代数学レポート課題解答例

第2回 行列の演算2 (転置、トレース、逆行列)

提示：2008/5/7(水) 提出：2007/5/14(水)

1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とする。

上の行列に対して、次式を求めよ。

(1)

$$\begin{aligned} & {}^t \left({}^t \left({}^t (\mathbf{A}\mathbf{C}) + {}^t \mathbf{C}\mathbf{B} \right) \right) \\ &= {}^t (\mathbf{A}\mathbf{C}) + {}^t \mathbf{C}\mathbf{B} \\ &= {}^t \mathbf{C} {}^t \mathbf{A} + {}^t \mathbf{C}\mathbf{B} \\ &= {}^t \mathbf{C} ({}^t \mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) $tr(\mathbf{A}\mathbf{C})$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AC} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
 \therefore \text{tr}(\mathbf{AC}) &= 1 + 2 = 3
 \end{aligned}$$

$$(3) \text{tr}(\mathbf{CA})$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{CA} &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \therefore \text{tr}(\mathbf{CA}) &= 0 + 3 + 0 = 3
 \end{aligned}$$

2.次の行列を対称行列と交代行列の和で表せ。

(1)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$${}^t\mathbf{D} = {}^t \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} + {}^t\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} - {}^t\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + {}^t\mathbf{D}) + \frac{1}{2}(\mathbf{D} - {}^t\mathbf{D})$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & -6 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^t\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & -6 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} + {}^t\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & -6 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -8 \\ 8 & -8 & -2 \\ -8 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} - {}^t\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & -6 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 2 & -4 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 4 & 0 & -10 \\ -8 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + {}^t\mathbf{E}) + \frac{1}{2}(\mathbf{E} - {}^t\mathbf{E})$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & -6 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3.次の行列の逆行列を求めよ。

(1)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

(解法1) 公式による方法

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{-9 - (-10)} \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(解法2) 行基本変形による方法 ($[\mathbf{F} \mid \mathbf{I}] \xrightarrow{\text{行基本変形}} [\mathbf{I} \mid \mathbf{F}^{-1}]$)

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{(1)-1 \times (2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(2)-2 \times (1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{(1)+2 \times (2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\text{よって、}\mathbf{F}^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 5 \\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

(驗算)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} &= \begin{bmatrix}3 & -5 \\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 5 \\ -2 & 3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-9+10 & 15-15 \\ -6+6 & 10-9\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I}\end{aligned}$$

$$(2) \mathbf{G} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 8\end{bmatrix}$$

解) 行基本変形により求める。 $([\mathbf{G} \mid \mathbf{I}] \xrightarrow{\text{行基本変形}} [\mathbf{I} \mid \mathbf{G}^{-1}])$

$$\begin{aligned}&\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{(2)-2\times(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{(2)-1\times(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \\ &\xrightarrow{(3)+3\times(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 3 & -2\end{array}\right] \xrightarrow{-1\times(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & 2\end{array}\right] \\ &\xrightarrow{(2)+3\times(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 & 2\end{array}\right]\end{aligned}$$

$$\text{よって、}\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 5 \\ 6 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

(驗算)

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 2-32+30 & 0+16-15 & 0-10+10 \\ 0-48+48 & 0+24-24 & 0-15+16 \end{bmatrix} \mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}$$