第１回　線形代数学レポート課題解答例

1.以下の行列$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$に対して問いに答えよ。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

（１）　和が定義されるすべての組み合わせに対して、和を求めよ。(ただし、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}$といった同じ行列同士の和も含む。

系統だてて列挙すること。

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 0\\ -2 & 2\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 4\\ 6 & 10 & 0\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 10 & -1\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}=2\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 6 & 10 & 4\\ -4 & 4 & 6\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 10 & -2\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

（２）　積が定義されるすべての組み合わせに対して、積を求めよ。(ただし、$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$といった同じ行列同士の積も含む。)

系統だてて列挙すること。

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&2\\3&5&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+9&2+15&2+0\\0+0&4+0&4+0\\0+3&-2+5&-2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&17&2\\0&4&4\\3&3&-2\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+6&1+3\\-2+0&2+0\\1+2&-1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\-2&2\\3&0\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&5&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0&0+15&1-3\\2+0&0+0&2+0\\-1+0&0+5&-1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&15&-2\\2&0&2\\-1&5&-2\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-3&1+0\\2+0&2+0\\-1-1&-1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\2&2\\-2&-1\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&2\\3&5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+4-2&0+0+2\\3+10+0&9+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\13&9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0&2&2\\3&5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&5&2\\-2&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+6-4&0+10+4&0+4+6\\3+15+0&0+25+0&-3+10+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&14&10\\18&25&7\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&2\\3&5&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+3&-2+5&-2+0\\0+3&4+5&4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&-2\\3&9&4\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2&-1+1\\-2+2&2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&5&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+0&0+5&-1-1\\2+0&0+5&2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&5&-2\\2&5&1\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-1&-1+0\\2-1&2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1\\1&2\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&5&2\\-2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0+1&3+0-1\\3+10-2&9+0+2\\-2+4-3&-6+0+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\11&11\\-1&-3\end{bmatrix}、$$

$$\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&5&2\\-2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&5&2\\-2&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0+2&0+0-2&-1+0-3\\3+15-4&0+25+4&-3+10+6\\-2+6-6&0+10+6&2+4+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2&-4\\14&29&13\\-2&16&15\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&5&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0-1&3+0+1\\0+10+1&0+0-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&4\\11&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&5&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&5&2\\-2&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0-2&0+0+2&-1+0+3\\0+15+2&0+25-2&0+10-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&2\\17&23&7\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&2\\3&5&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+3&2+5&2+0\\0+0&-2+0&-2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&7&2\\0&-2&-2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+2&1+1\\1+0&-1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&5&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0&0+5&1-1\\-1+0&0+0&-1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1&1+0\\-1+0&-1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

2. 行列$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$を 1 の行列とし、$k=1,l=-2$とする。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\-1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&2&2\\3&5&0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\3&5&2\\-2&2&3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&5&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

このとき、次式が計算可能かどうかを調べ、計算が可能なときにはその値を求めよ。

（1） $k(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{DA})$

$\boldsymbol{B}$は$2\times3$行列に対して$\boldsymbol{DA}$は$3\times2$行列なので、右の括弧中の加算が計算不可能。

（2） $(k-l)(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{F})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{D}-k\boldsymbol{CBD}+l\boldsymbol{FED}$

すべての項が、$2\times3$行列となり計算可能。

$$(k-l)(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{F})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{D}-k\boldsymbol{CBD}+l\boldsymbol{FED}$$
$$=(k-l)(\boldsymbol{CBD}+\boldsymbol{CED}+\boldsymbol{FBD}+\boldsymbol{FED})-k\boldsymbol{CBD}+l\boldsymbol{FED}$$
$$=-l\boldsymbol{CBD}+(k-l)\boldsymbol{CED}+(k-l)\boldsymbol{FBD}+k\boldsymbol{FED}$$
$$=2\boldsymbol{CBD}+3\boldsymbol{CED}+3\boldsymbol{FBD}+\boldsymbol{FED}$$

各項を求める。

$$2\boldsymbol{CBD}=2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{BD})=2\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 14 & 10\\ 18 & 25 & 7\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}16 & 11 & -3\\ 22 & 53 & 27\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 22 & -6\\ 44 & 106 & 54\end{bmatrix}$$

$$3\boldsymbol{CED}=3\boldsymbol{C}(\boldsymbol{ED})=3\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 17 & 23 & 7\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}20 & 21 & 5\\ 15 & 27 & 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60 & 63 & 15\\ 45 & 81 & 33\end{bmatrix}$$

$$3\boldsymbol{FBD}=3\boldsymbol{F}(\boldsymbol{BD})=3\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 14 & 10\\ 18 & 25 & 7\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}20 & 39 & 17\\ -2 & -14 & -10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60 & 117 & 51\\ -6 & -42 & -30\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{FED}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{ED})=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 17 & 23 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 25 & 9\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

以上より、

与式

$$=\begin{bmatrix}32 & 22 & -6\\ 44 & 106 & 54\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}60 & 63 & 15\\ 45 & 81 & 33\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}60 & 117 & 51\\ -6 & -42 & -30\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}16 & 25 & 9\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}168 & 227 & 69\\ 84 & 143 & 55\end{bmatrix}$$

（3） $(k-l)(\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CF})\boldsymbol{B}+(l-k)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{D})$

すべての項が$2\times3$行列となり計算可能。

$$(k-l)(\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CF})\boldsymbol{B}+(l-k)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{D})$$
$$=(k-l)\boldsymbol{CFB}+(l-k)\boldsymbol{BD}$$
$$=3\boldsymbol{CFB}-3\boldsymbol{BD}$$

各項を求める。

$$3\boldsymbol{CFB}=3(\boldsymbol{CF})\boldsymbol{B}=3\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}-3 & -9 & -4\\ 6 & 12 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -27 & -12\\ 18 & 36 & 6\end{bmatrix}$$

$$-3\boldsymbol{BD}=-3\begin{bmatrix}2 & 14 & 10\\ 18 & 25 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -42 & -30\\ -54 & -75 & -21\end{bmatrix}$$

以上より、

与式

$$=\begin{bmatrix}-9 & -27 & -12\\ 18 & 36 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & -42 & -30\\ -54 & -75 & -21\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-15 & -69 & -42\\ -36 & -39 & -15\end{bmatrix}$$

（4） $k\boldsymbol{ABAC}-l\boldsymbol{CEDF}$

$\boldsymbol{D}$ が $3\times3$ 行列で、$\boldsymbol{F}$ が $2\times2$ 行列であるので、$(\boldsymbol{DF})$ の計算ができない。

３．次の性質を満たす $3\times3$ の行列 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ を見つけよ。(無数に存在するので、１組づつ示せば良い。)

解答

（1） $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$

（2） $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ かつ $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ かつ $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$