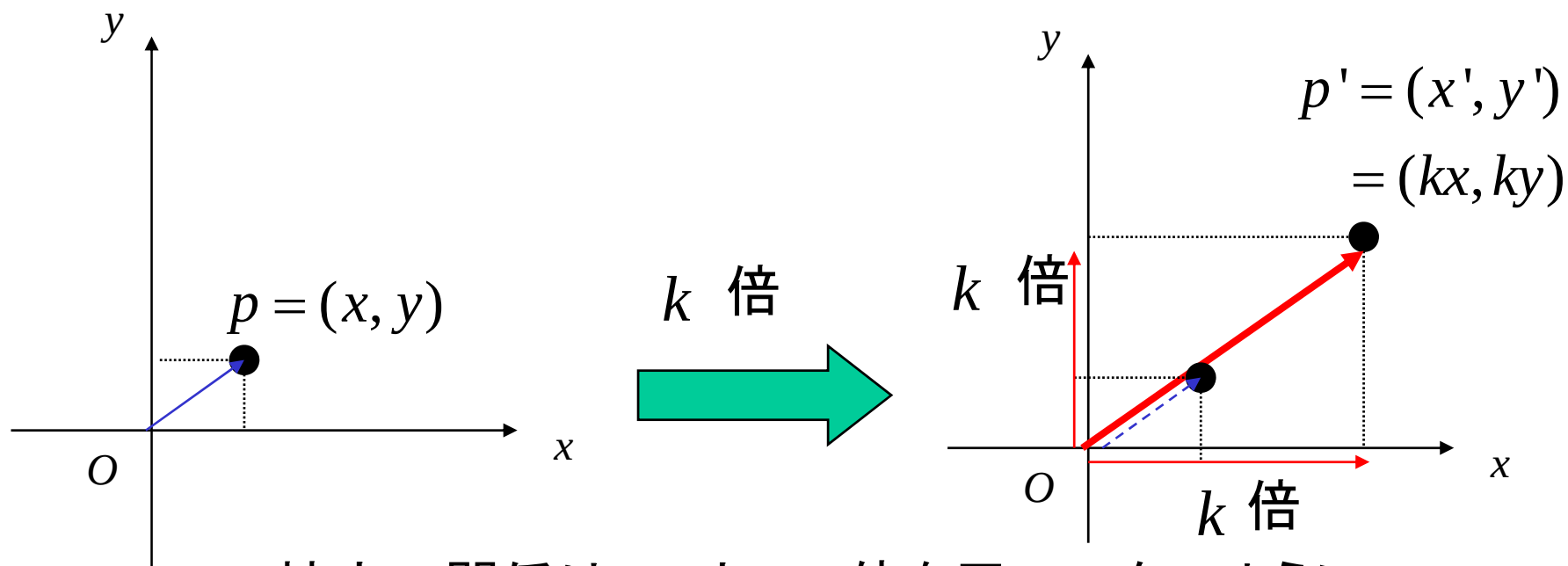


9. 線形写像

- ここでは、行列の積によって、写像を定義できることをみていく。
- また、行列の積によって定義される写像の性質を調べていく。

行列演算と写像(1次変換)

拡大とスカラー倍



拡大の関係は、スカラー倍を用いて次のように表現できる。

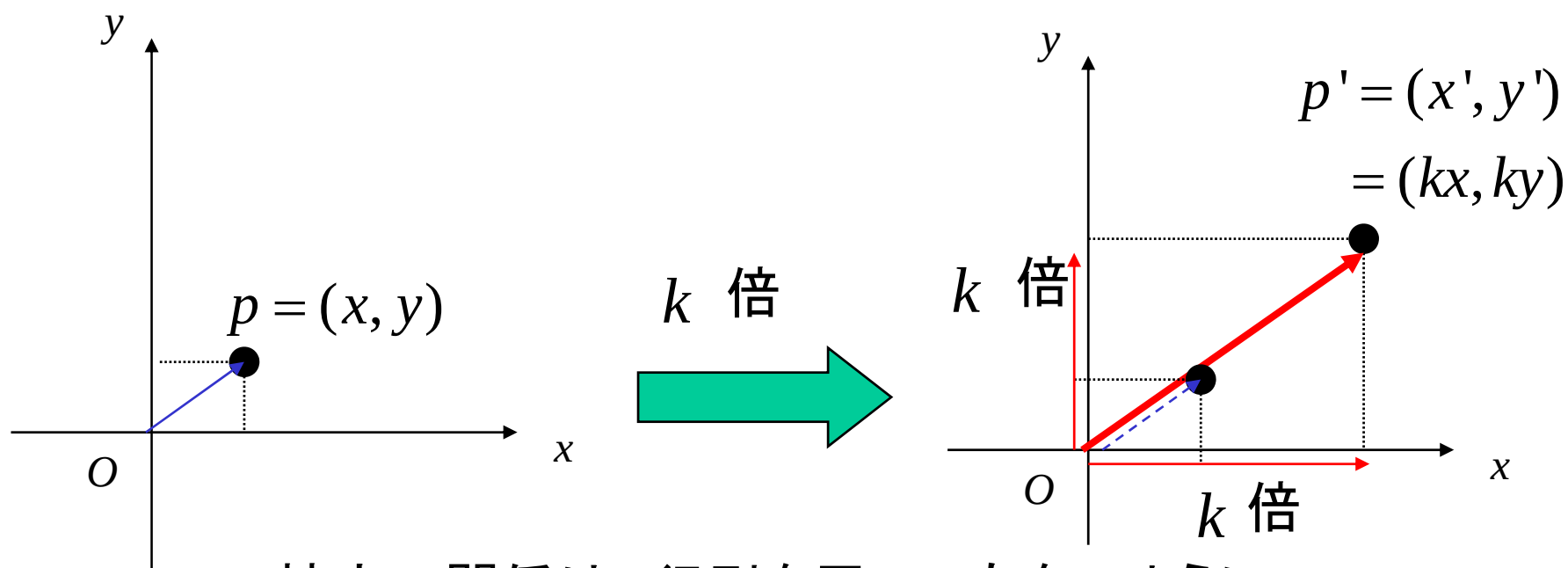
拡大後

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

拡大前

拡大

拡大と行列の積



拡大の関係は、行列を用いても次のように表現できる。

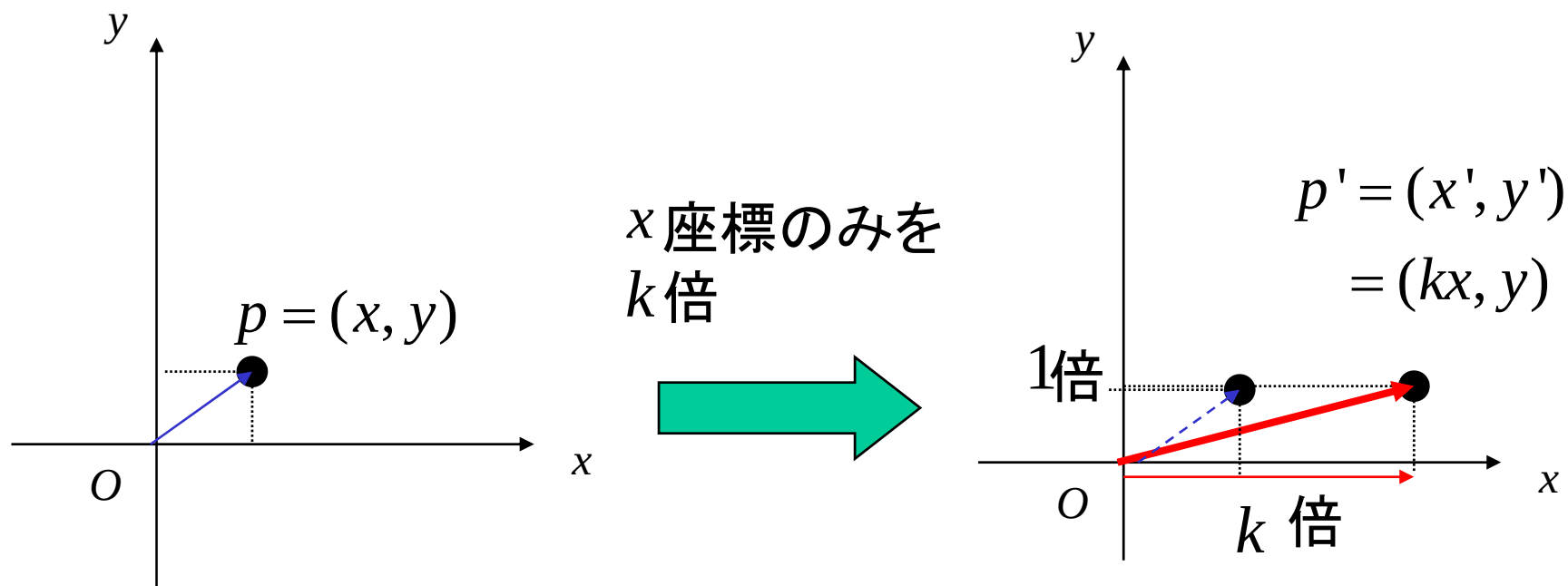
拡大後

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

拡大前

拡大

変形と行列



行列を用いるといろいろな変形が表現できる。

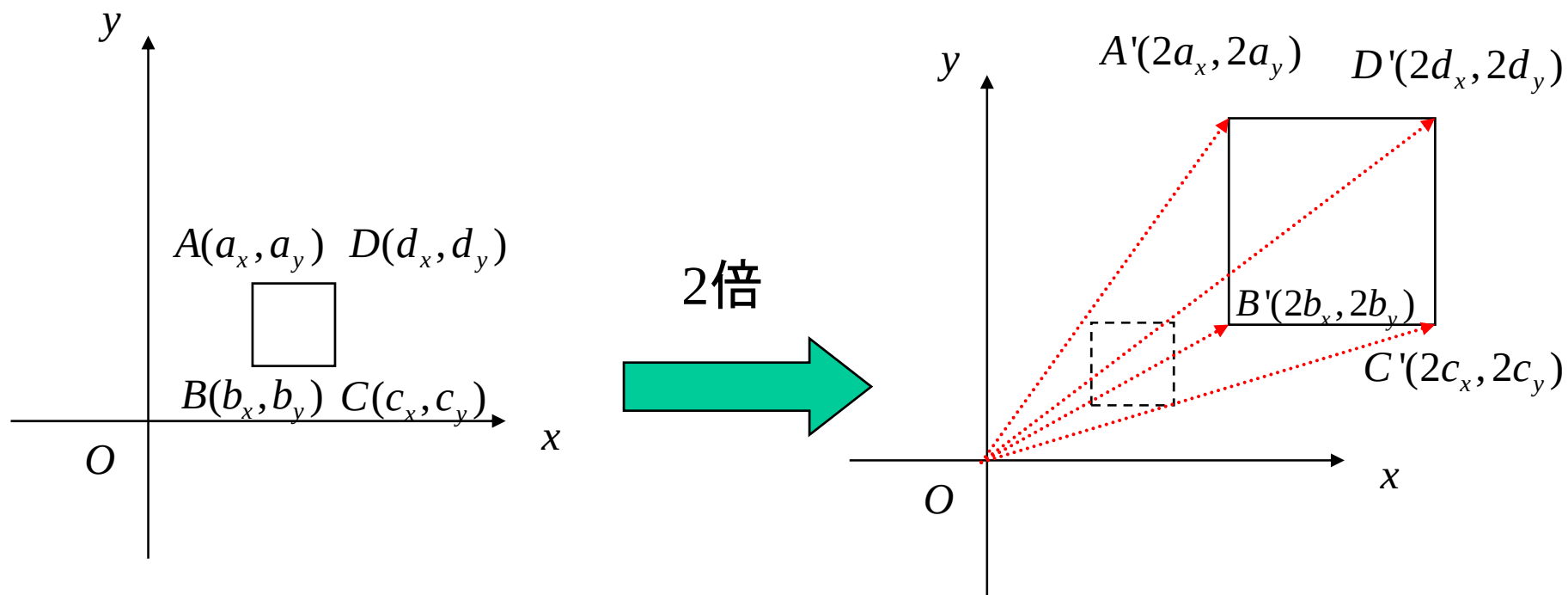
変形後

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

変形前

変形

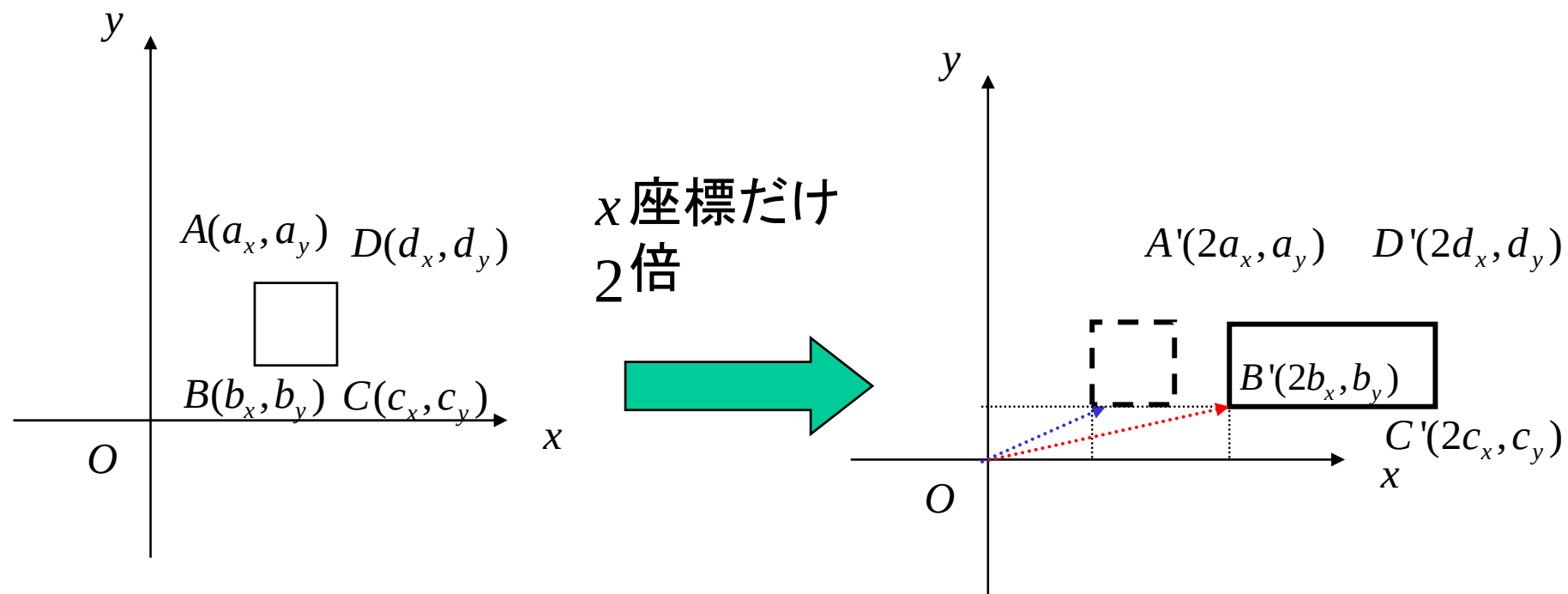
行列による図形の変形1



図形の拡大は行列を用いて表現できる。

$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

行列による図形の変形2

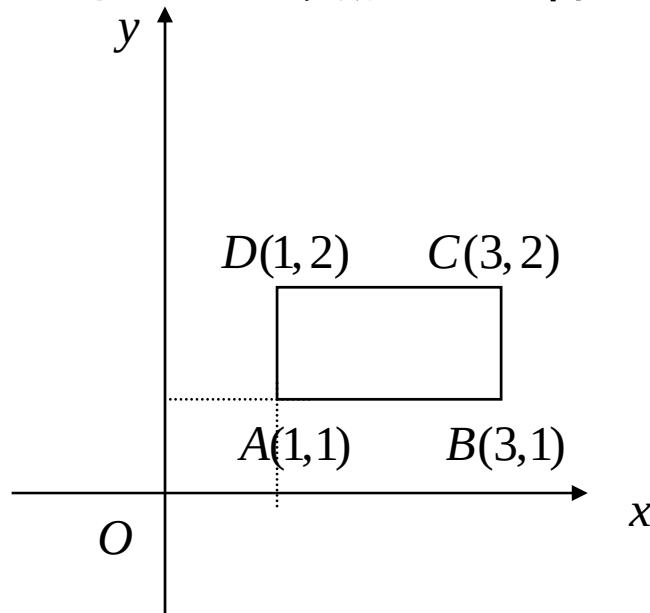


図形の変形は行列を用いて表現できる。

$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

練習

次の図形に各変換をほどこしたとき、
うつされる図形の頂点の座標と外形を描け。



(1)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

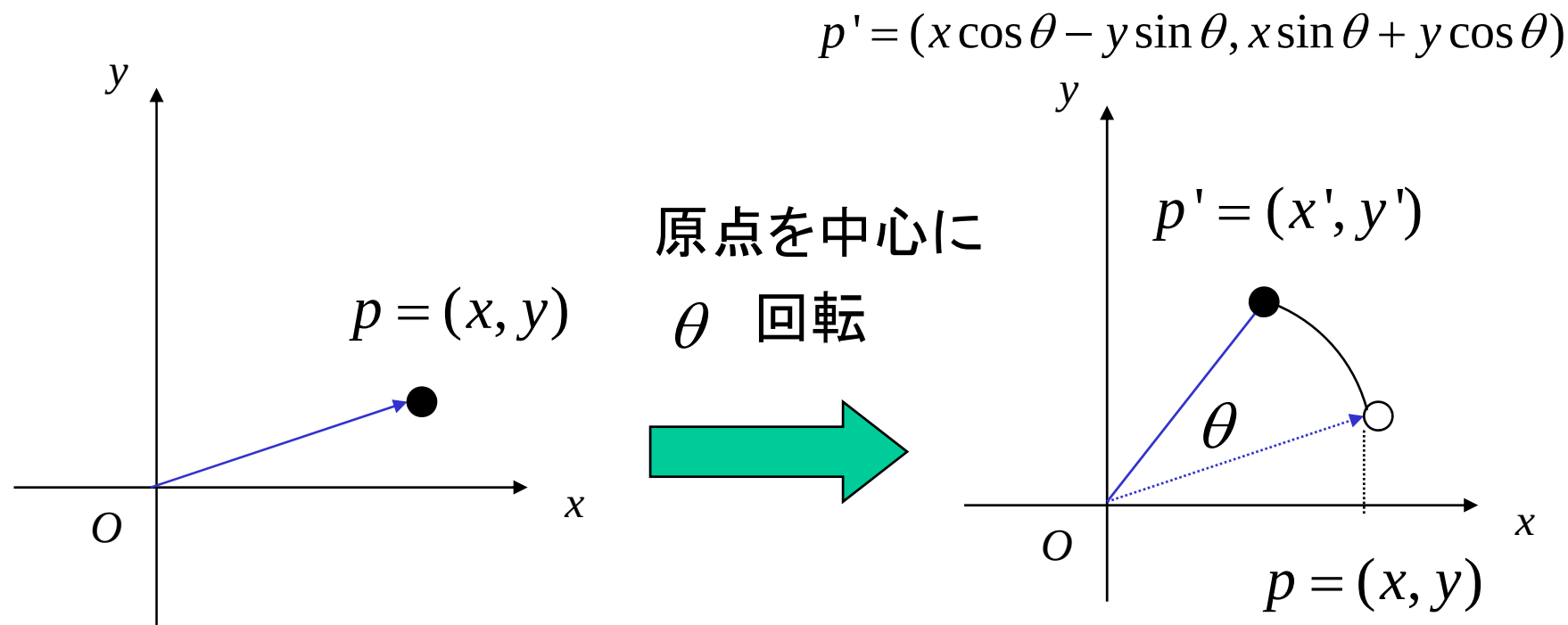
(3)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(4)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

回転を表す行列



回転も行列を用いて表すことができる。
回転を表す行列は少し複雑である。
(興味のある人は自分で導くとよい。)

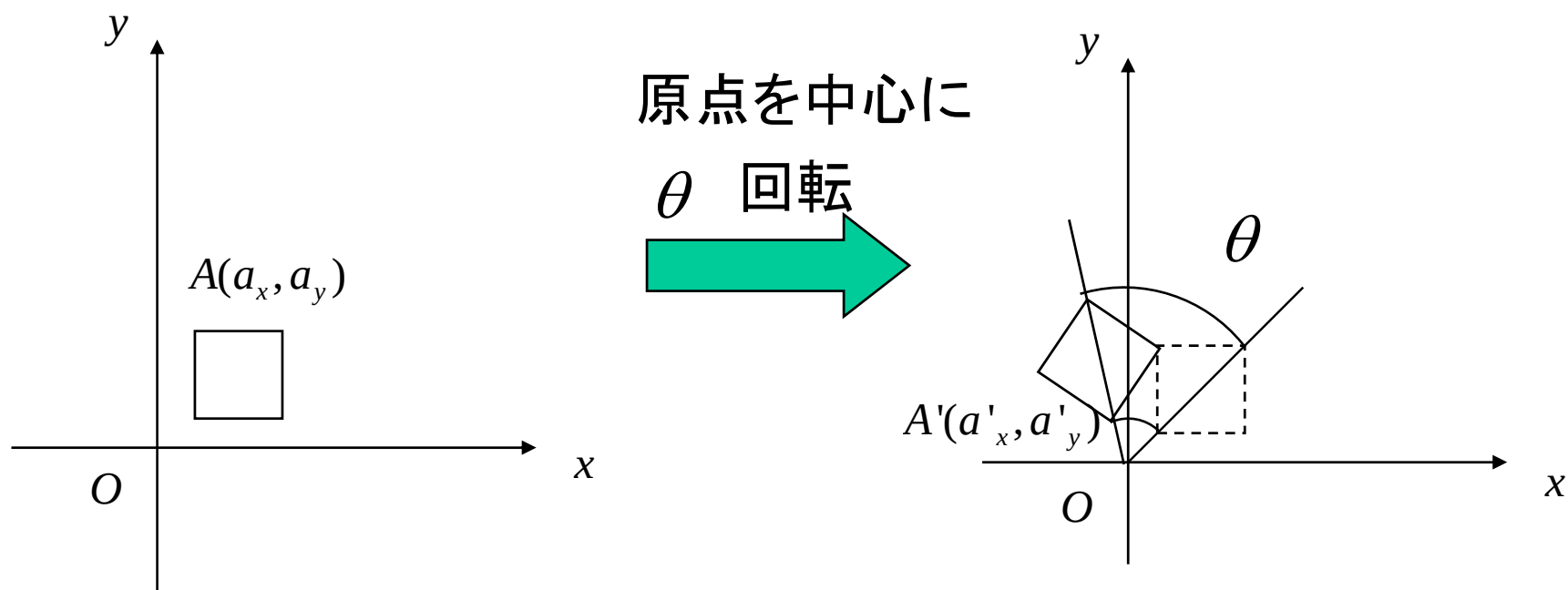
回転後

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

回転前

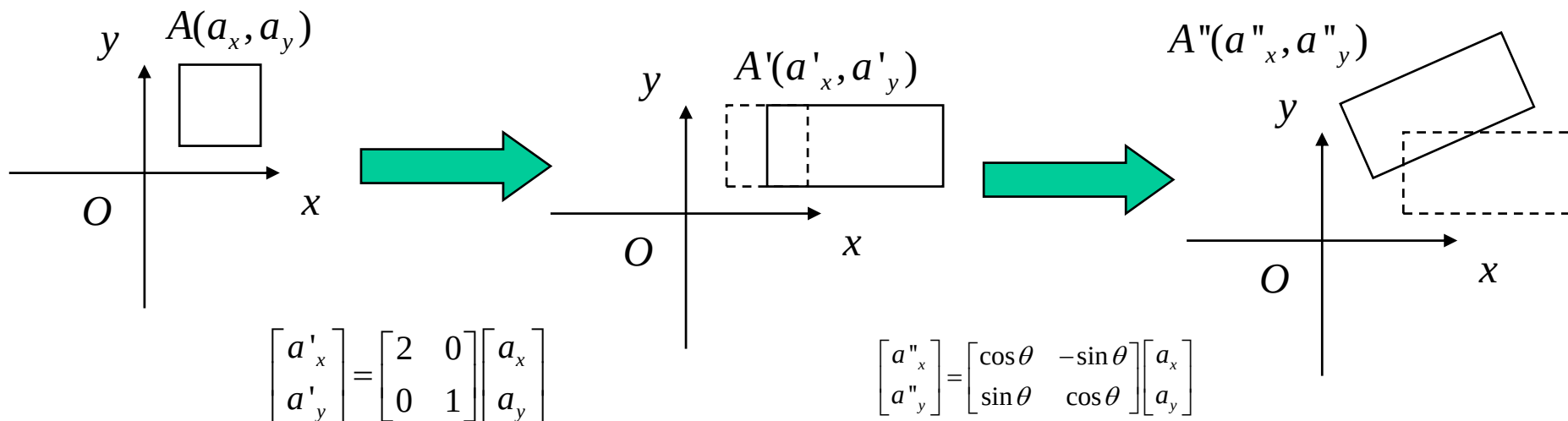
回転

行列による図形の回転



$$\begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

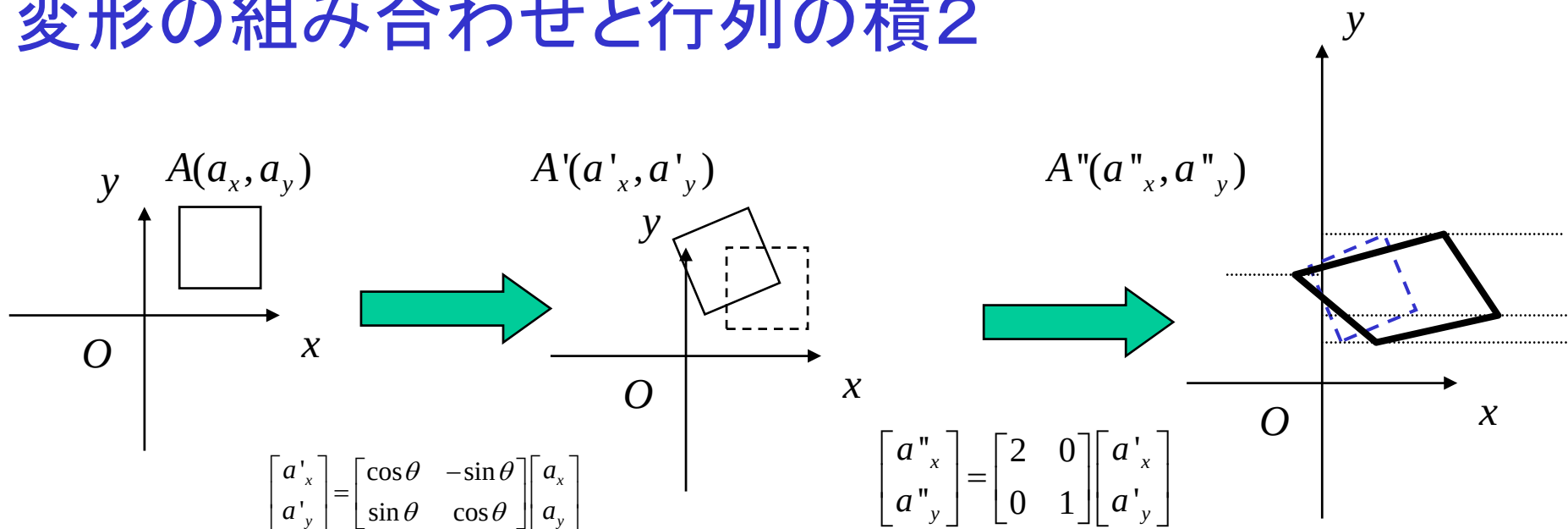
変形の組み合わせと行列の積1



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a''_x \\ a''_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & -\sin \theta \\ 2 \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

変形の組み合わせ
は行列の積で表現
される。

変形の組み合わせと行列の積2

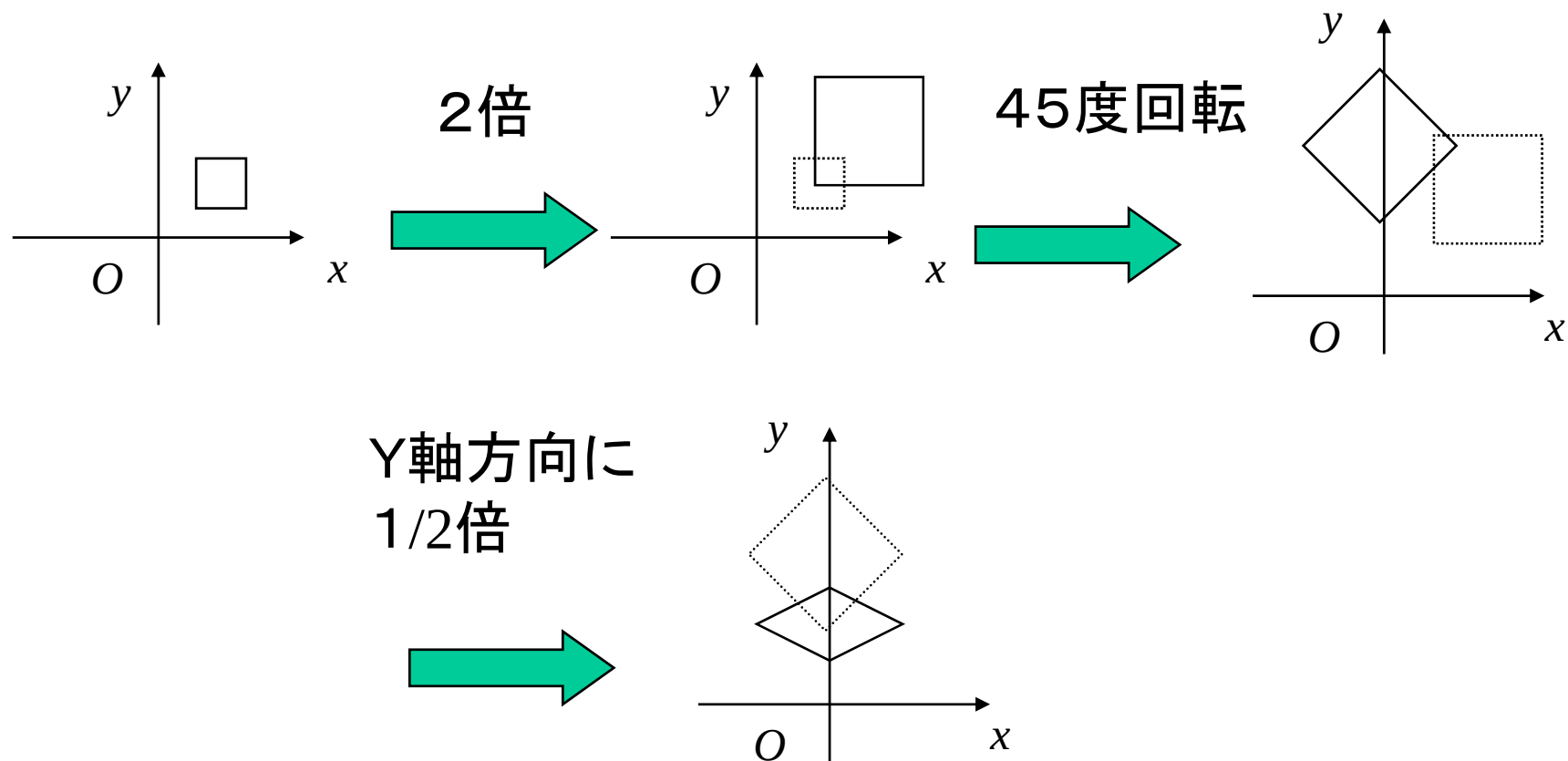


$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a''_x \\ a''_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & -2 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

変換の順序と
積の順序を注意する事。
交換はできない。

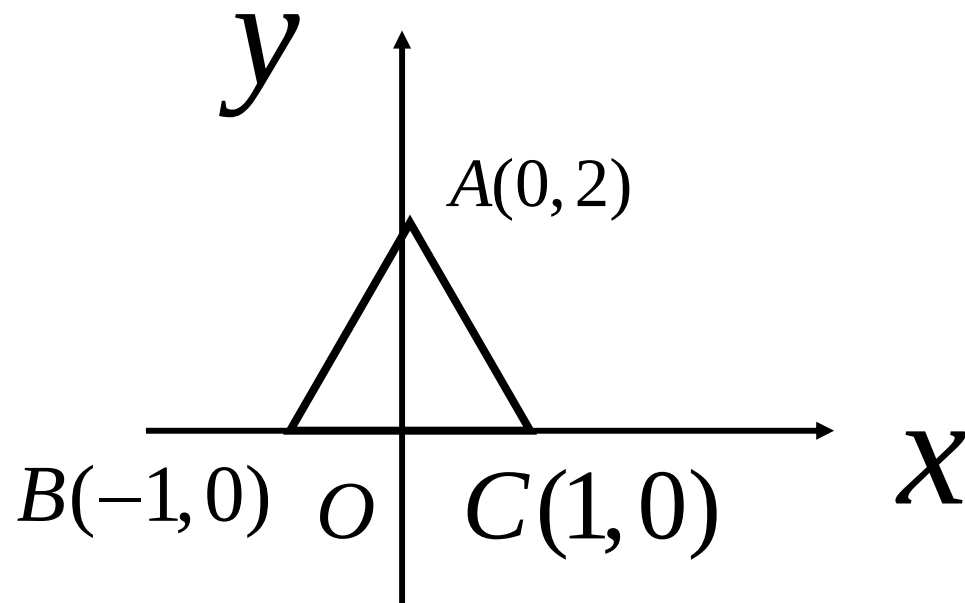
練習

次の1連の変形を一括して表す1つの行列を求めよ。

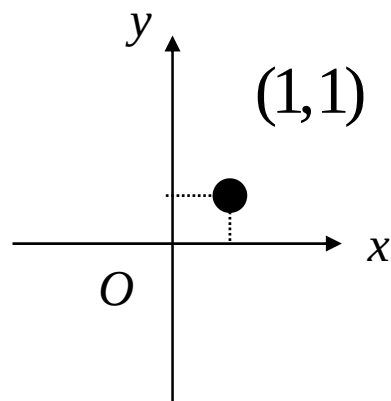


練習

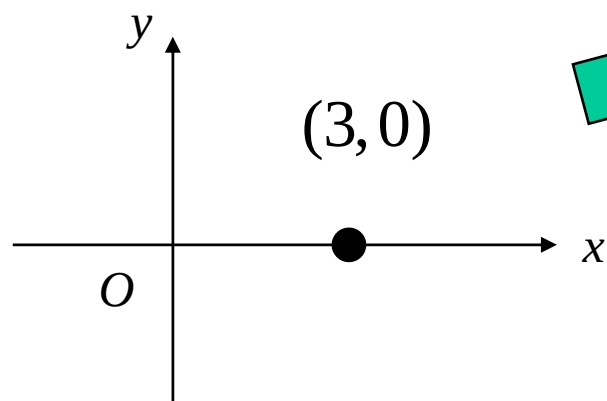
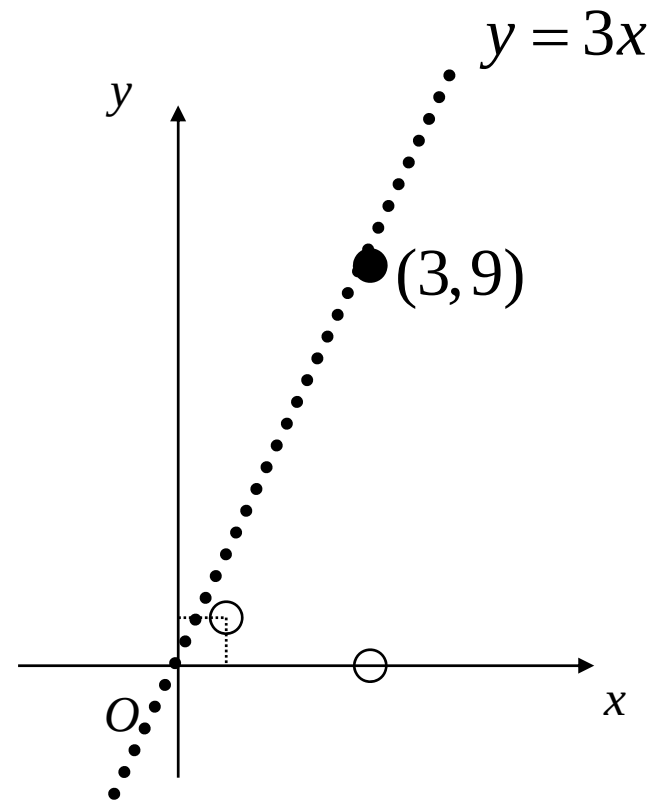
一つ前の練習問題で求めた行列により、
次の図形がどのような図形に変換されるかをもとめよ。



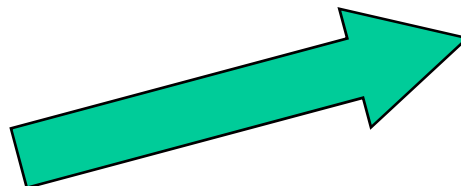
正則でない行列による写像



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

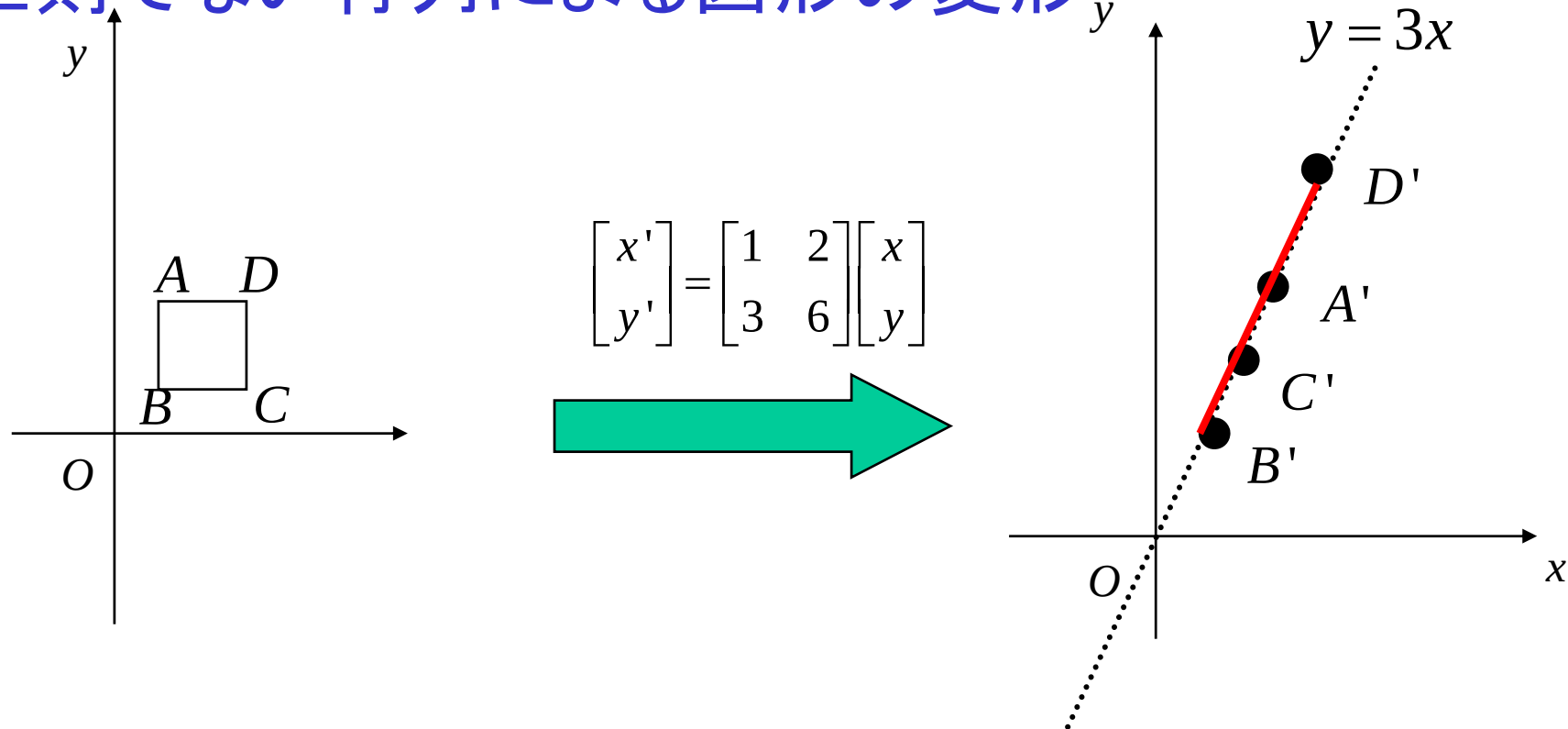


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



正則でない行列では、複数の点から一つの
点に写像される。

正則でない行列による図形の変形



正則でない行列による写像を用いると、
図形は“つぶれる”。

練習

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ によって写像を表す。}$$

以下の座標を持つ四角形ABCDに対して、
各頂点が上写像によって移される点の座標を
それぞれ求めよ。

また、それらの点が一直線上にあることを確かめよ。

$A(1, 2)$

$B(1, 1)$

$C(2, 1)$

$D(2, 2)$

線形写像

ここでは、行列によって表される写像の性質を調べる。

線形写像

定義(線形写像)

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が、
次の(1)、(2)を満たすとき、
 f は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への**線形写像**であるという。

(1) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

(2) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ と任意のスカラー $k \in \mathbb{R}$ に対して、

$$f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$$

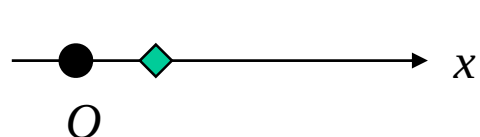
正比例の拡張概念。

正比例は、 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の線形写像である。

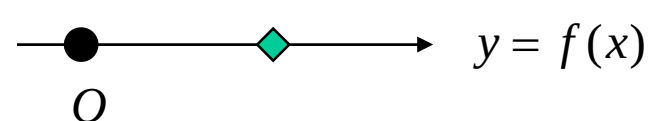
線形写像例1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x$$

写像元



写像先



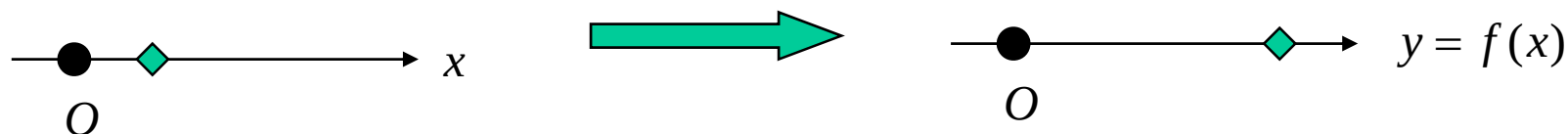
$$\begin{aligned} (1) \quad f(x_1 + x_2) &= 2(x_1 + x_2) \\ &= 2x_1 + 2x_2 \\ &= f(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(kx_1) &= 2(kx_1) \\ &= k2x_1 \\ &= kf(x_1) \end{aligned}$$

この2つをまとめて一つのグラフとして表すことも多い。実は、写像はきちんと図示できるものだけではない。

線形でない写像例1

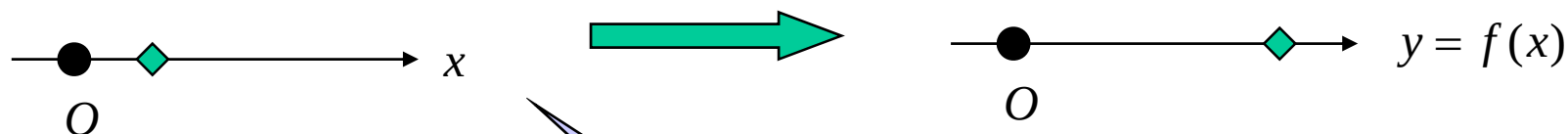
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$$



$$\begin{aligned} (1) \quad f(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2)^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ &\neq x_1^2 + x_2^2 \\ &= f(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

線形でない写像例2

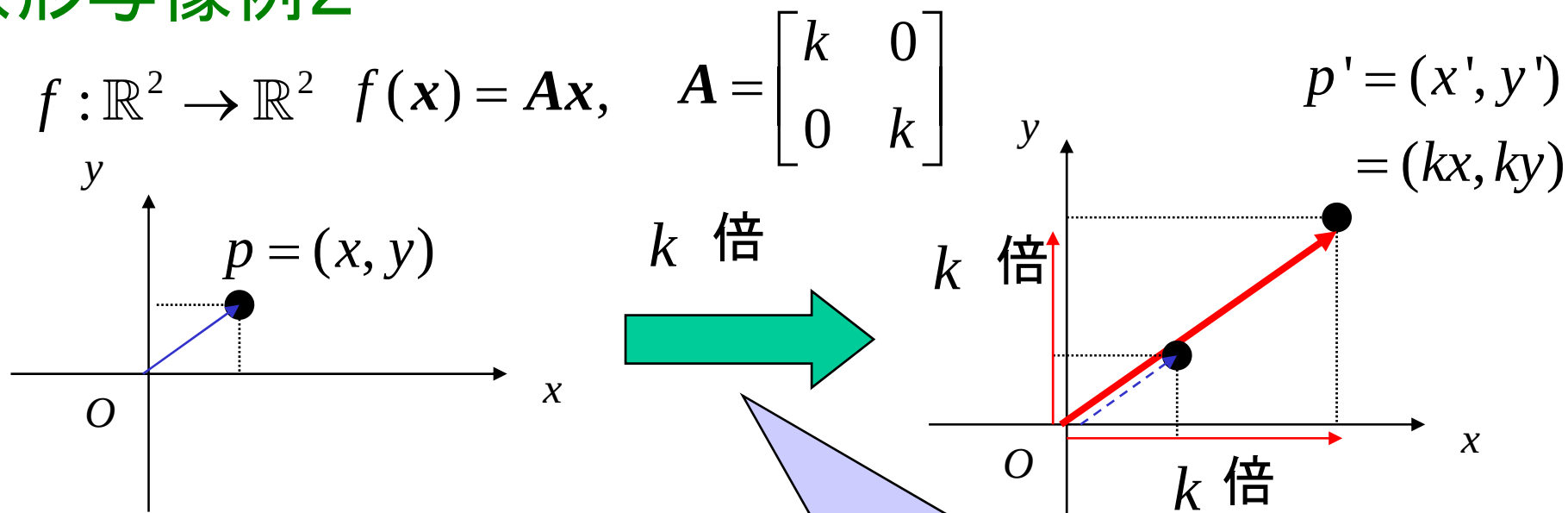
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x + 1$$



$$\begin{aligned} (2) \quad f(kx_1) &= (kx_1) + 1 \\ &= kx_1 + 1 \\ &\neq kx_1 + k \\ &= k(x_1 + 1) \\ &= kf(x_1) \end{aligned}$$

一つの図で、線形写像を表したときには、**原点**を通らなければならない。

線形写像例2



$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \\
 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \\
 &= f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad f(k\mathbf{x}_1) &= \mathbf{A}(k\mathbf{x}_1) \\
 &= k\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \\
 &= kf(\mathbf{x}_1)
 \end{aligned}$$

なお、写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、
 ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のように)
 一枚の図で表すことはできない。
 よって、定義域中の要素と
 値域中の要素の対応(関係)
 だけに注目する。

線形写像例3

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \quad \text{が線形写像かどうか調べよ。}$$

解)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{R}$$

に対して、線形写像の条件を調べる。

$$(1) \quad f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(a_1 + b_1) \\ (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) &= f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b_1 \\ b_1 + 2b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(a_1 + b_1) \\ (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$$

(2)

$$f(k\mathbf{a}) = f\left(k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2ka_1 \\ ka_1 + 2ka_2 \end{bmatrix}$$

$$kf(\mathbf{a}) = kf\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = k\begin{bmatrix} 2a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ka_1 \\ ka_1 + 2ka_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore f(k\mathbf{a}) = kf(\mathbf{a})$$

よって、線形写像である。

線形写像例4

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

行列の形(大きさ)から、
定義域の次元と、値域の次元
(の最大値)が直ちにわかる。

(1)

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \\ &= f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(k\mathbf{x}_1) &= \mathbf{A}(k\mathbf{x}_1) \\ &= k\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \\ &= kf(\mathbf{x}_1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

線形写像でない例3

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \quad f(\alpha) = \sin \alpha,$$

(1)

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha + \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &\neq \sin \alpha + \sin \beta \\ &= f(\alpha) + f(\beta) \end{aligned}$$

角度(ラジアン)から正弦(サイン)をもとめる関数(写像)。

$$\begin{aligned} (2) \quad f(k\alpha) &= \sin(k\alpha) \\ &\neq k \sin \alpha \\ &= kf(\alpha) \end{aligned}$$

練習

次の写像が、線形写像かどうかを答えよ。

(1)

$$f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{matrix} f_1 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 + 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(2)

$$f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{matrix} f_2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(3)

$$f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{matrix} f_3 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(4)

$$f_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad \begin{matrix} f_3 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} e^{x_1 + x_2} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

正比例と線形写像

スカラー

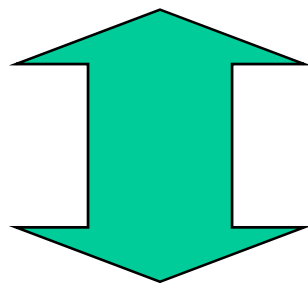
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

正比例

スカラー

$$y = f(x) = ax$$

スカラー



$m \times n$ 行列

$$y = f(x) = Ax$$

n 項ベクトル

m 項ベクトル

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

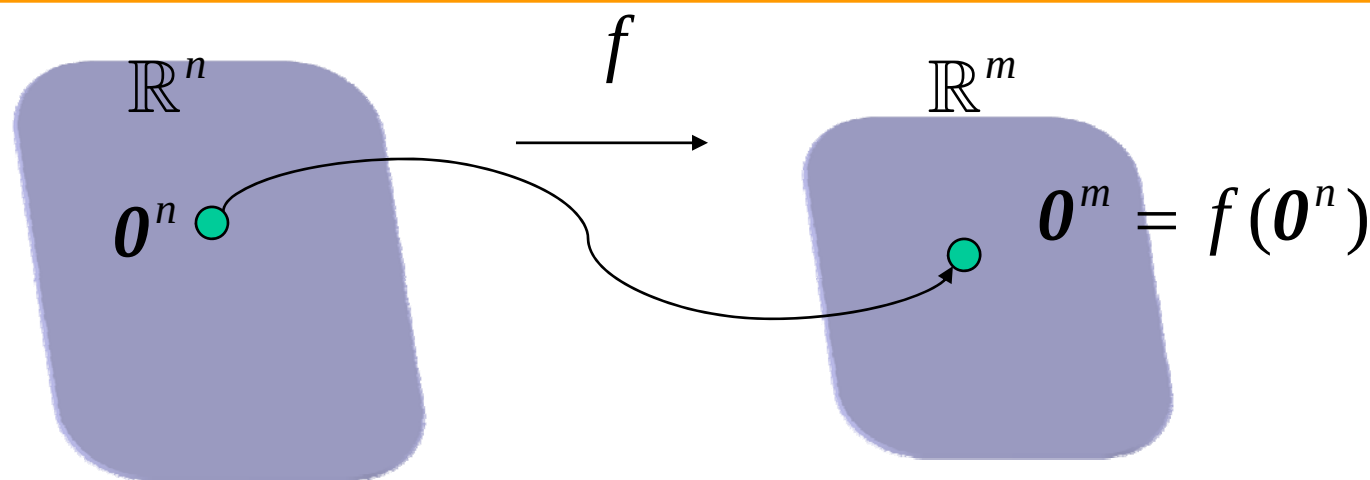
線形写像

線形写像の性質1

(線形写像と零元)

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、零元は、零元に移される。すなわち、

$$\mathbf{0}^m = f(\mathbf{0}^n)$$



証明略

線形写像の性質2

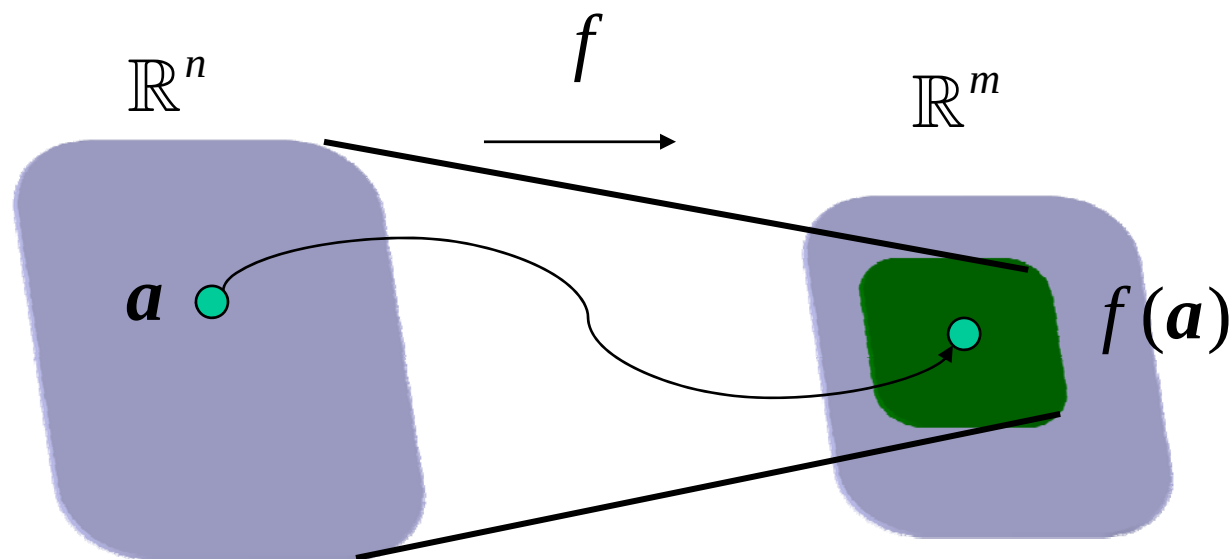
(線形写像と定義域の写像先)

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 f に対して、次の集合

$$f(\mathbb{R}^n) = \{ f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である。

定義域全体の
移動先

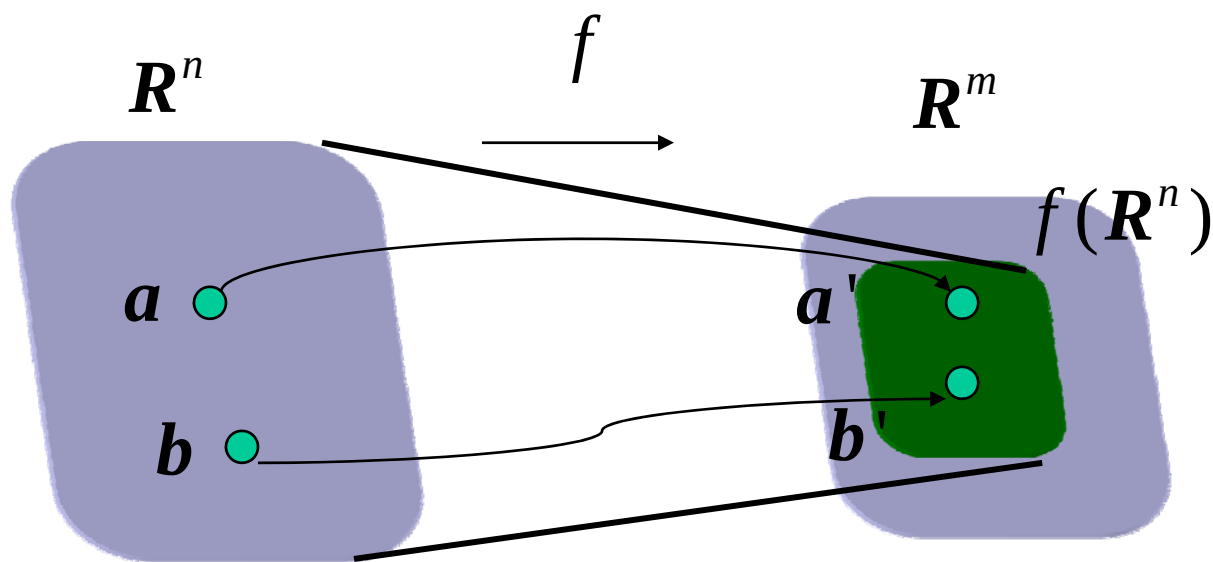


証明

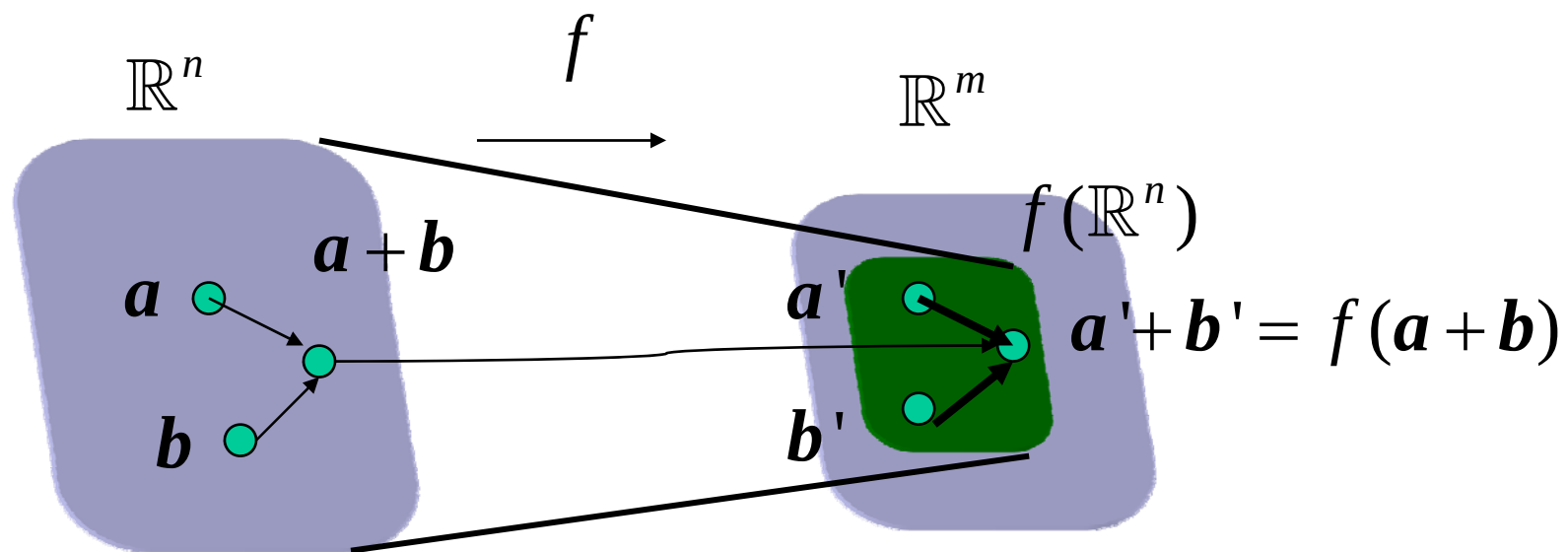
$a, b \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$ に対して、線形写像の条件を調べる。

(1) $a', b' \in f(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^m$ とすると、

$a' = f(a), b' = f(b)$ なる $a, b \in \mathbb{R}^n$ が存在する。



$$a' + b' = f(a) + f(b) = f(a + b)$$



$a+b \in \mathbb{R}^n$ なのので、 $a'+b' = f(a+b) \in f(\mathbb{R}^n)$

(2) $\mathbf{a}' = f(\mathbf{a}) \in f(\mathbb{R}^n), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ とすると、

$k\mathbf{a}' = kf(\mathbf{a}) = f(k\mathbf{a})$ と書ける。

$k\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ なので、 $k\mathbf{a}' = kf(\mathbf{a}) = f(k\mathbf{a}) \in f(\mathbb{R}^n)$

以上より、和の公理とスカラー倍の公理を満たすので、
 $\mathbb{R}^m$ の部分空間である。

QED

像 (Image)

定義 (像)

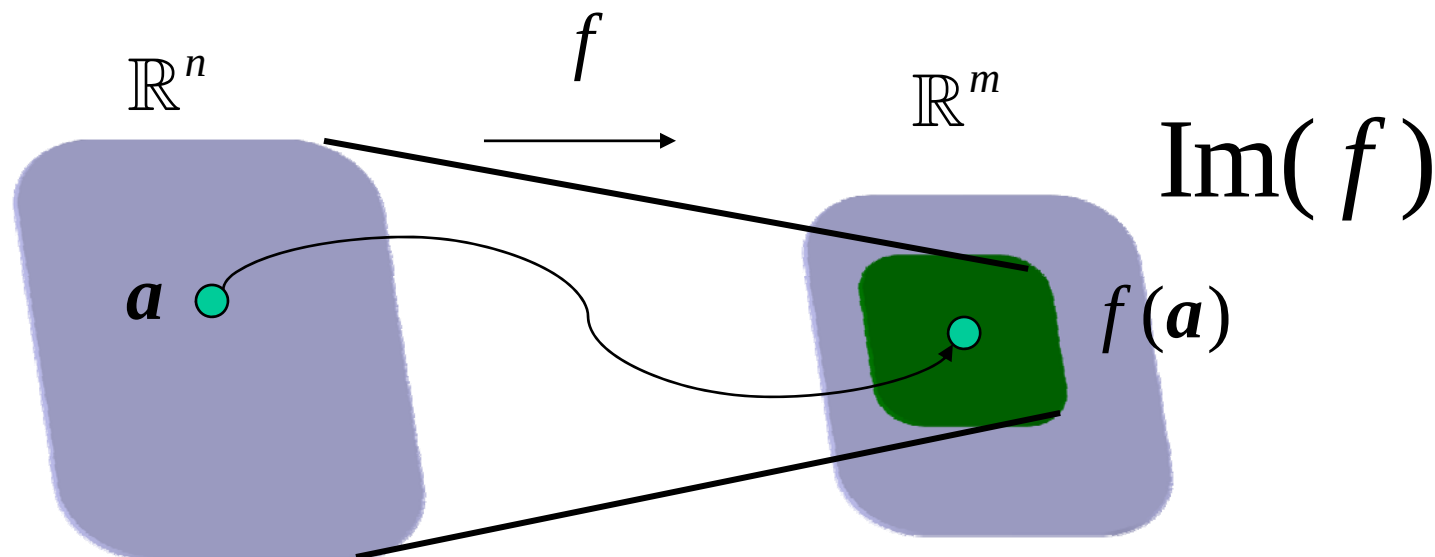
線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、部分空間 $f(\mathbb{R}^n)$ を f の **像** といい、

$\text{Im}(f)$

と書く。すなわち、

定義域全体の移動先
値域の部分集合 (部分空間)

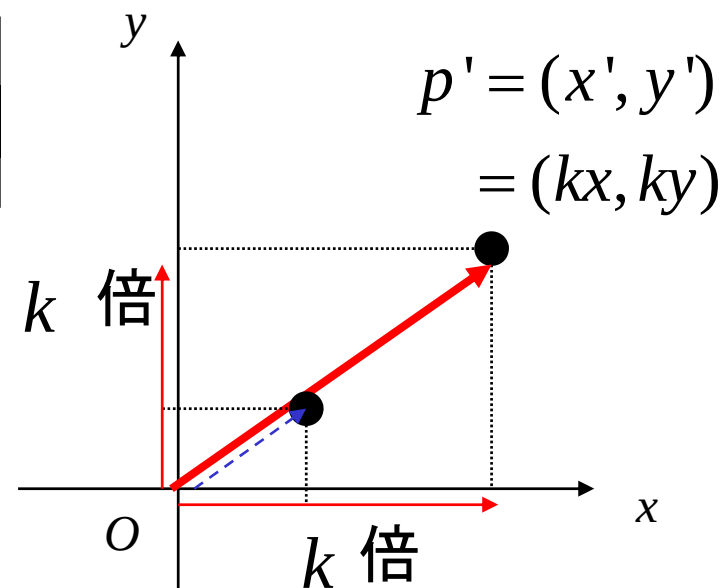
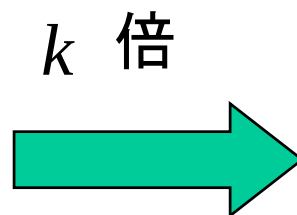
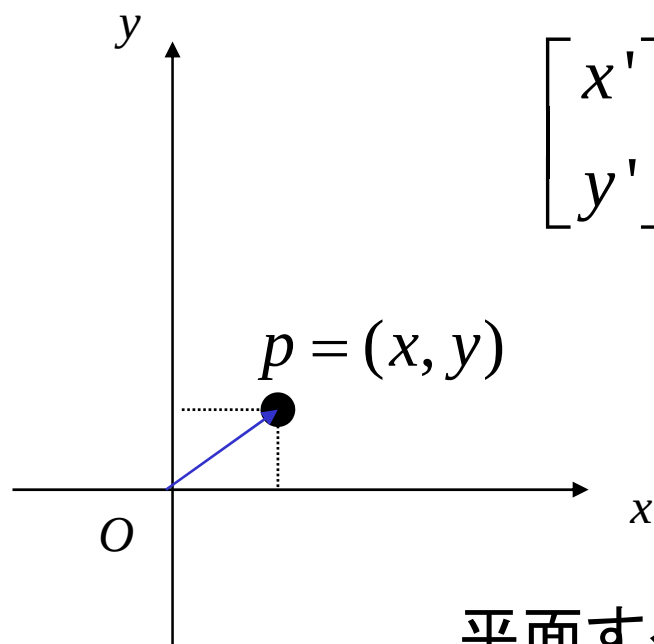
$$\text{Im}(f) = \{ f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$$



像の例1

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

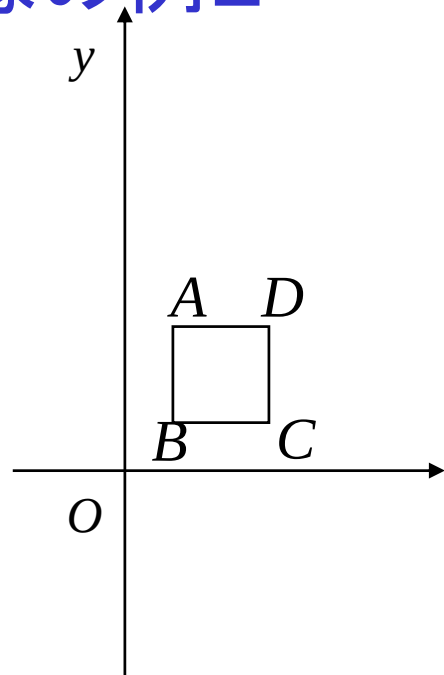


平面すべてに移される。

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$$

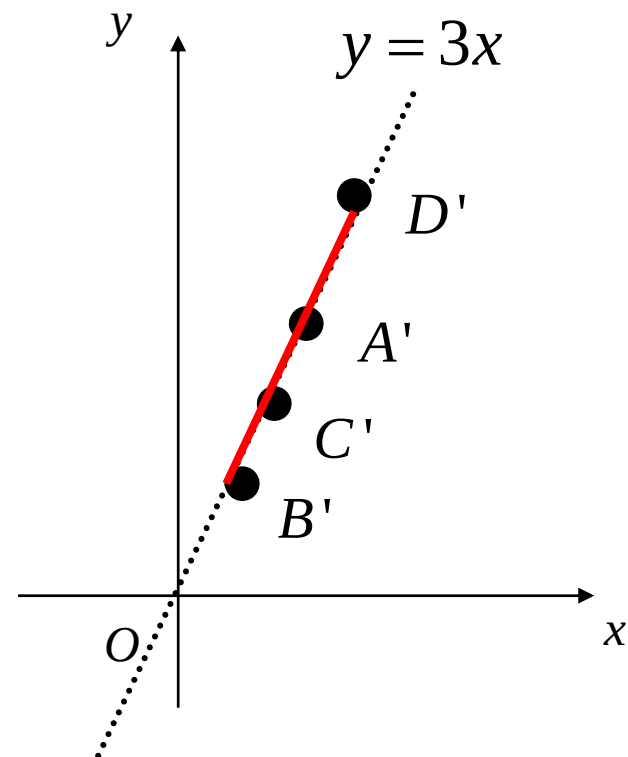


像の例2



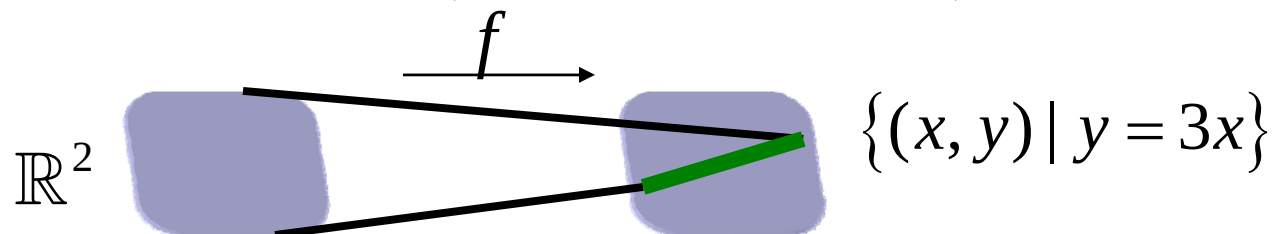
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



平面のすべての点は、直線上に移される。

$$\text{Im}(f) = \{(x, y) \mid y = 3x\}$$



練習 次の写像 f の像 $\text{Im } f$ を求めよ。

(1)

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -9x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

線形写像の性質3

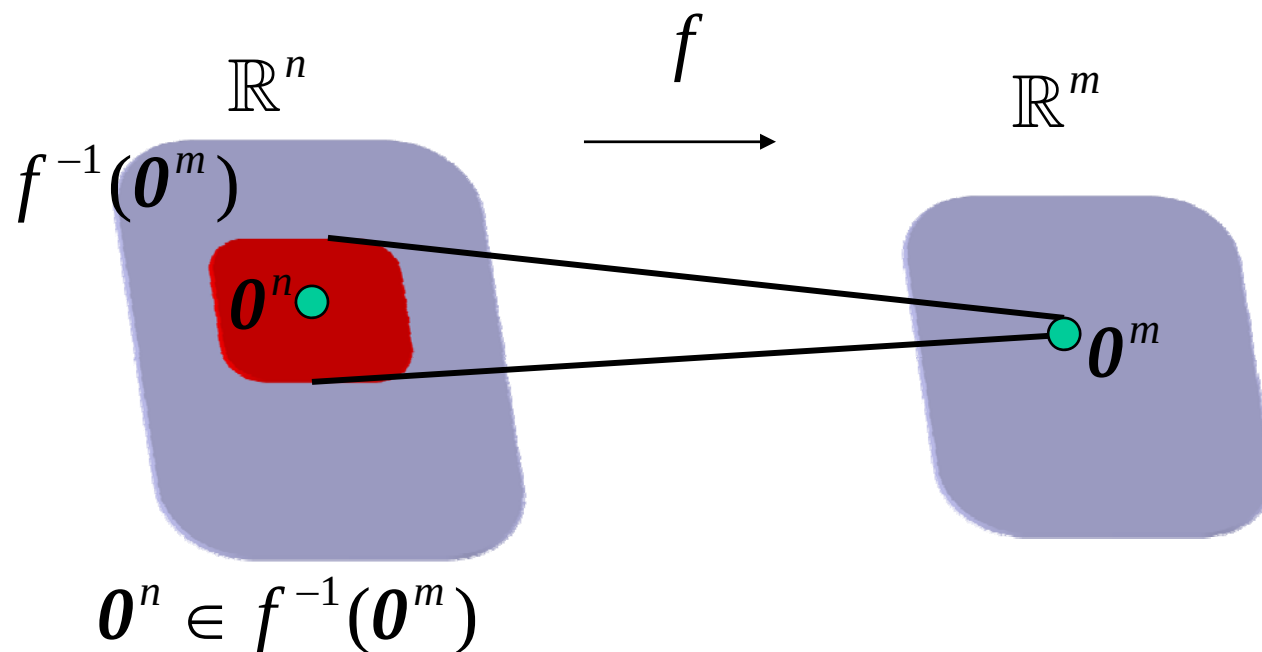
(0元への写像元)

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 f に対して、次の集合

$$f^{-1}(\mathbf{0}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

原点に移される
移動元



証明

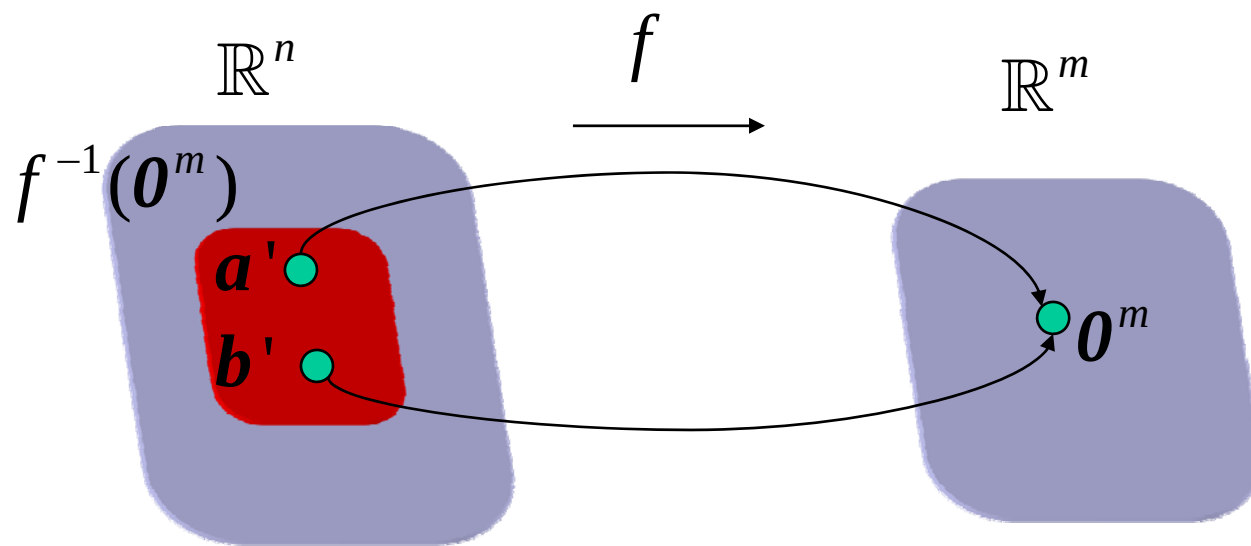
(1) $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in f^{-1}(\mathbf{0}^m) \Rightarrow \mathbf{a}' + \mathbf{b}' \in f^{-1}(\mathbf{0}^m)$ を示す。

$\mathbf{0}^m = f(\mathbf{a}') = f(\mathbf{b}') \in \mathbb{R}^m$ とする。

このとき、線形写像の定義より、

$$f(\mathbf{a}' + \mathbf{b}') = f(\mathbf{a}') + f(\mathbf{b}') = \mathbf{0}^m + \mathbf{0}^m = \mathbf{0}^m$$

$$\therefore \mathbf{a}' + \mathbf{b}' \in f^{-1}(\mathbf{0}^m)$$



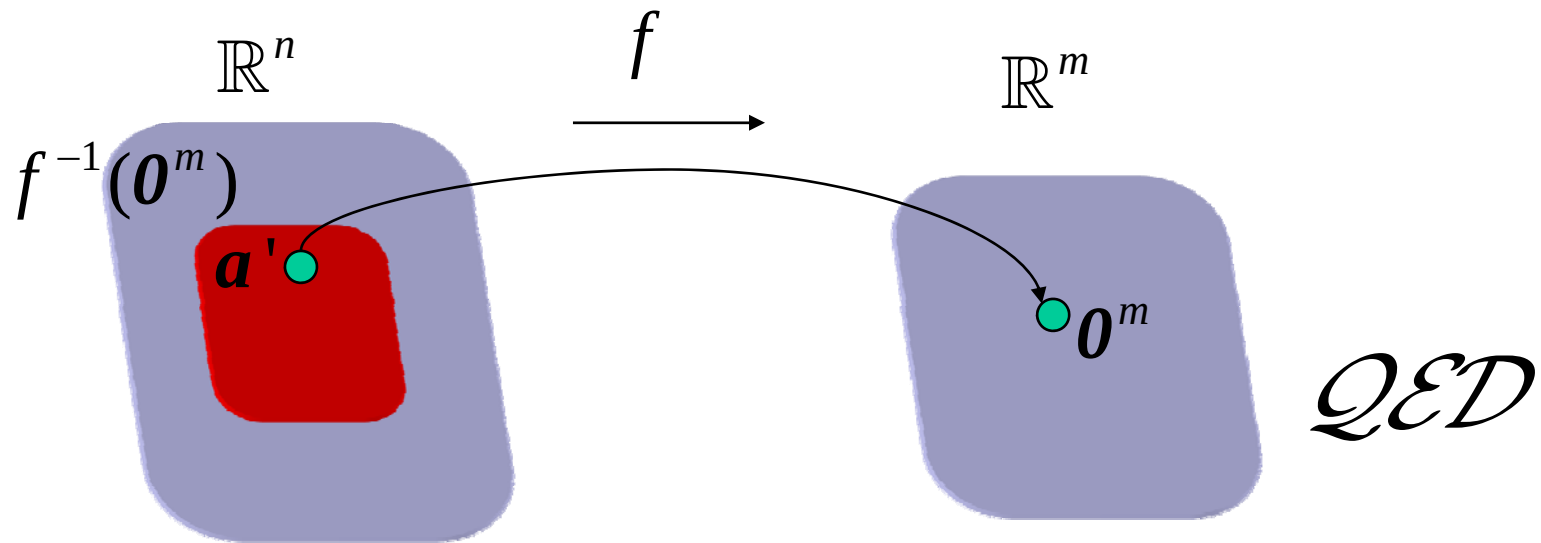
(2) $\mathbf{a}' \in f^{-1}(\mathbf{0}^m), k \in \mathbf{R} \Rightarrow k\mathbf{a}' \in f^{-1}(\mathbf{0}^m)$ を示す。

$\mathbf{0}^m = f(\mathbf{a}') \in \mathbb{R}^m$ とする。

このとき、線形写像の定義より、

$$f(k\mathbf{a}') = kf(\mathbf{a}') = k\mathbf{0}^m = \mathbf{0}^m$$

$$\therefore k\mathbf{a}' \in f^{-1}(\mathbf{0}^m)$$



核 (Kernel)

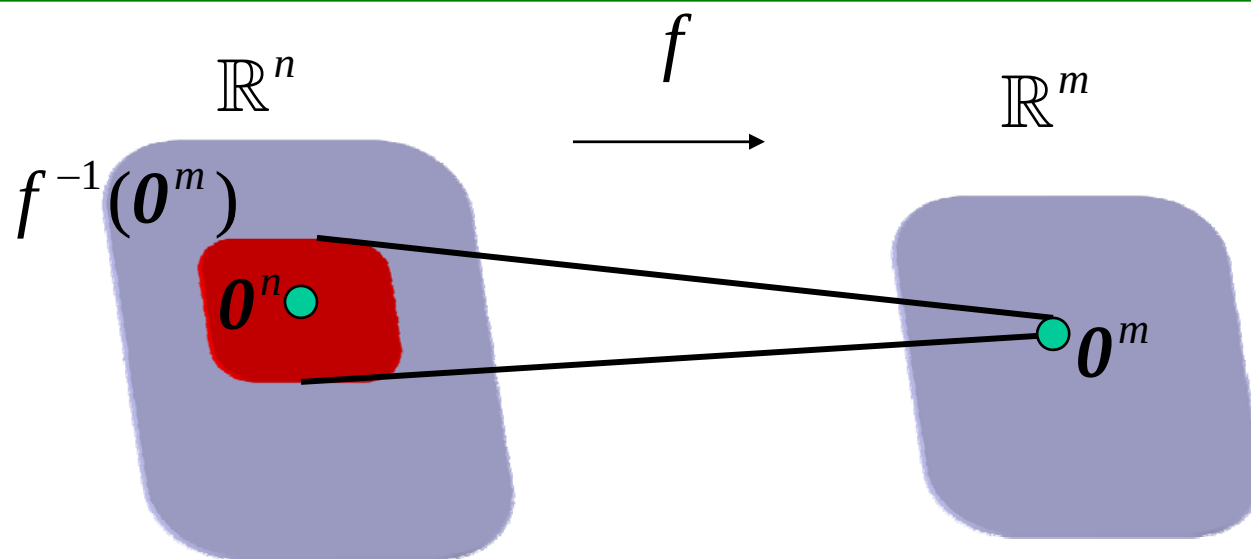
定義 (核)

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、部分空間 $f^{-1}(\mathbf{0}^m)$ を f の核といい、

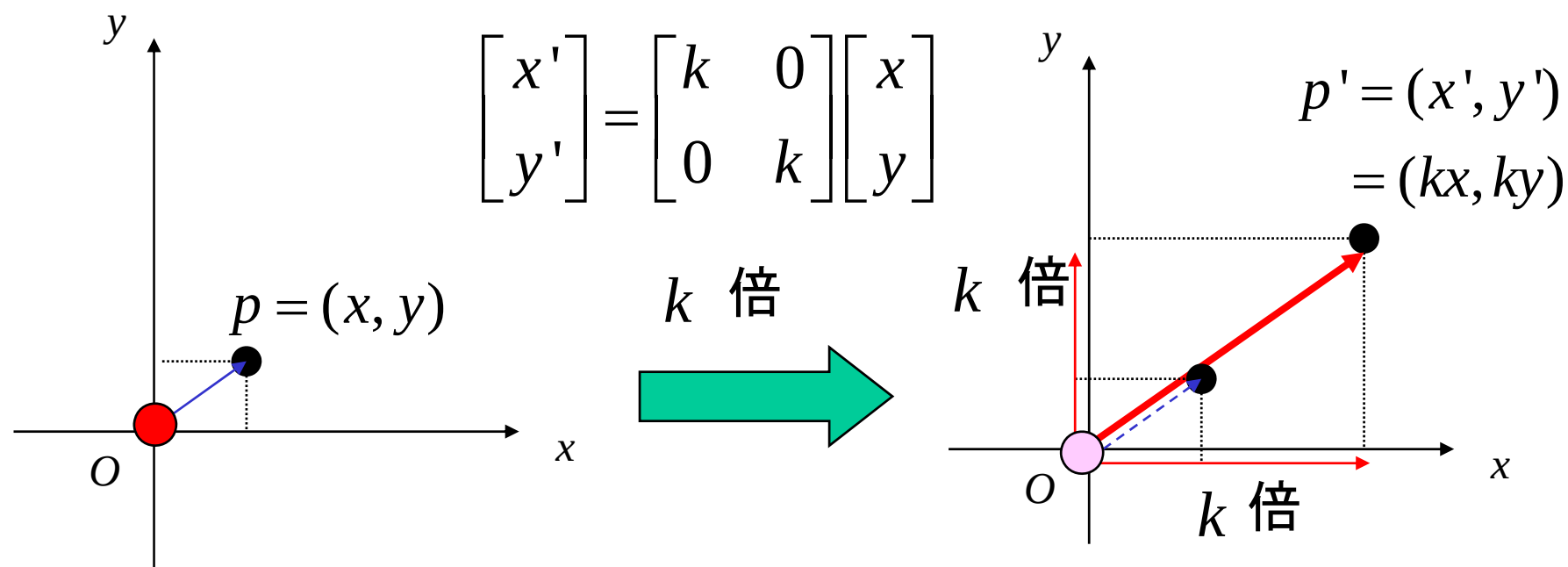
$\text{Ker}(f)$ と書く。

値域側の原点に移される移動元
定義域の部分集合 (部分空間)

$$\text{Ker}(f) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \}$$



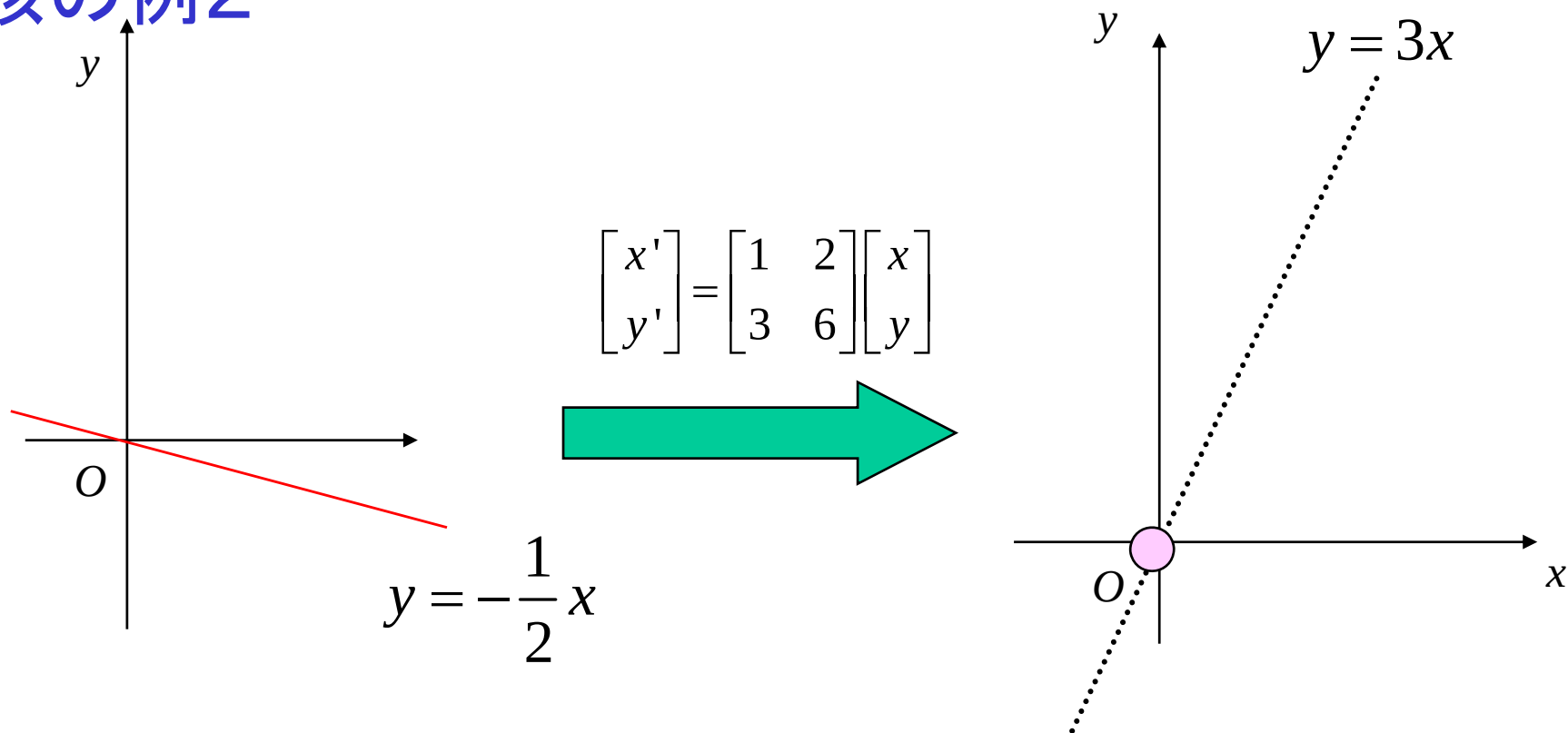
核の例1



原点は原点からしか移されない。

$$\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

核の例2



直線上の点が、原点に移される。

$$\text{Ker}(f) = \left\{ (x, y) \mid y = -\frac{1}{2}x \right\}$$

練習

次の写像 f の核 $\ker f$ を求めよ。

(1)

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f_1 \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{c} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{array} \right]$$

(2)

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f_2 \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{c} 3x_1 + x_2 \\ -9x_1 - 3x_2 \end{array} \right]$$

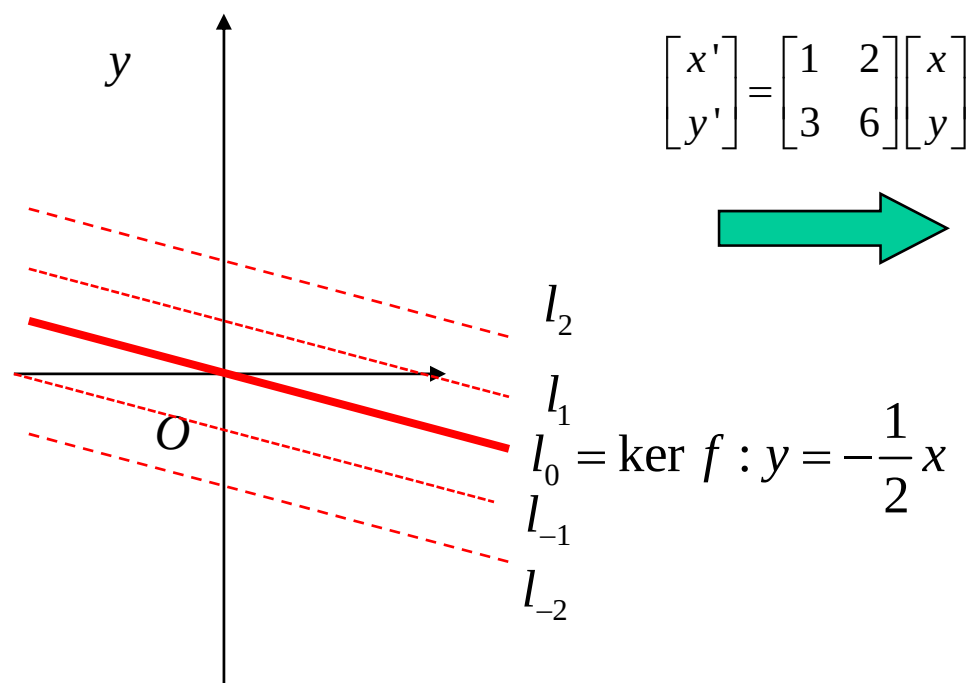
像と核の次元

定理: (次元定理)

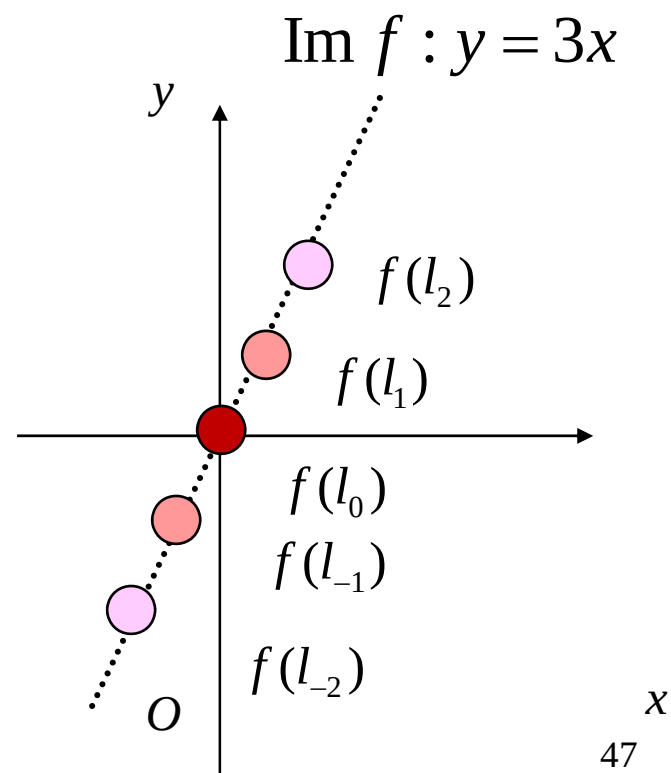
線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して次式が成り立つ。

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = n$$

証明略



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



例題

次の写像に関して、 $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = n$ を確かめよ。

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{matrix} f_1 \\ \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{c} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{array} \right] \end{matrix}$$

解

$$\text{Im } f_1 = \mathbb{R}^2 \quad \text{より、} \dim \text{Im } f_1 = 2$$

$$\ker f_1 = \left\{ k \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right] \mid k \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{より、} \dim \ker f_1 = 1$$

$$\therefore \dim \text{Im } f_1 + \dim \ker f_1 = 3 = n$$

練習

次の写像に関して、 $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = n$ を確かめよ。

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \overset{f_2}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} \mapsto \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -9x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

線形写像と行列

定理（線形写像と行列）

- (1) 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、次式を満たす $m \times n$ 行列 $A = A_f$ が一意に決定できる。

$$f(x) = Ax$$

- (2) $m \times n$ 行列 A に対して、写像 $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を

$$f_A(x) = Ax$$

で定めると、 f_A は線形写像である。

証明略

(線形写像の)表現行列

定義(表現行列)

線形写像 $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ に対して、
 $m \times n$ 行列 $A = A_f$ を
 f の表現行列という。

線形写像は、その表現行列がわかれば、
すべてがわかる。

線形写像と基底

性質：（線形写像と基底）

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は、 $\mathbb{R}^n$ の
標準基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ の像

$$\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$$

が決まれば、

任意の元 $a \in \mathbb{R}^n$ に対して、像

$$f(a) \in \mathbb{R}^m$$

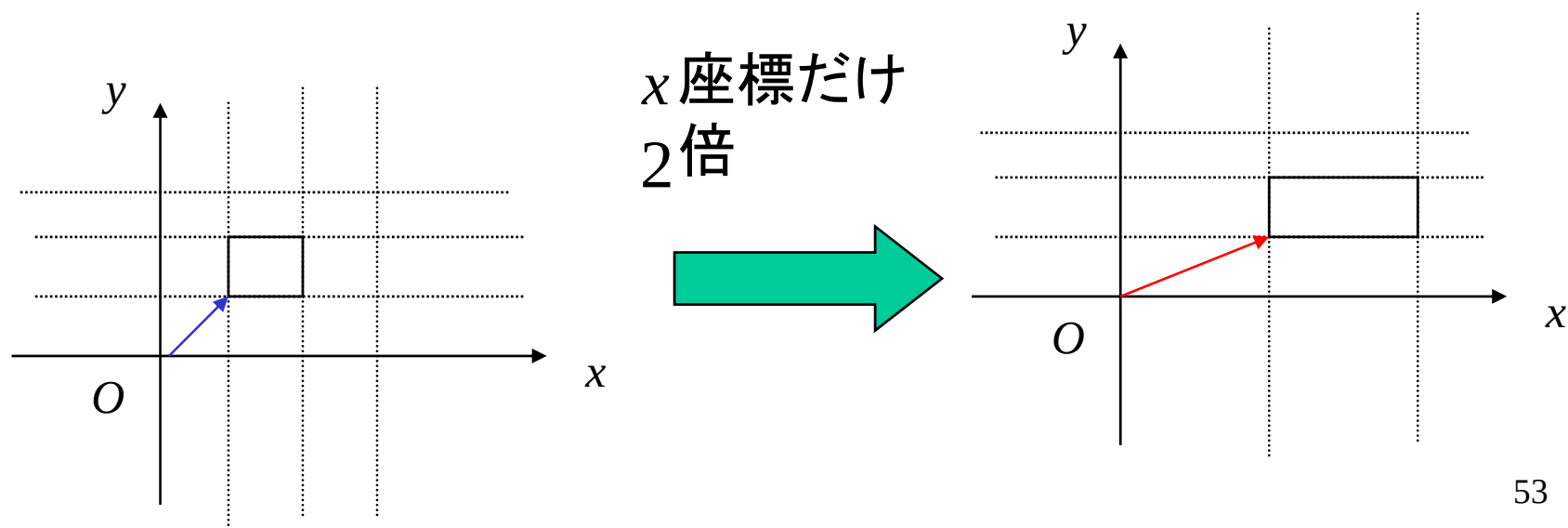
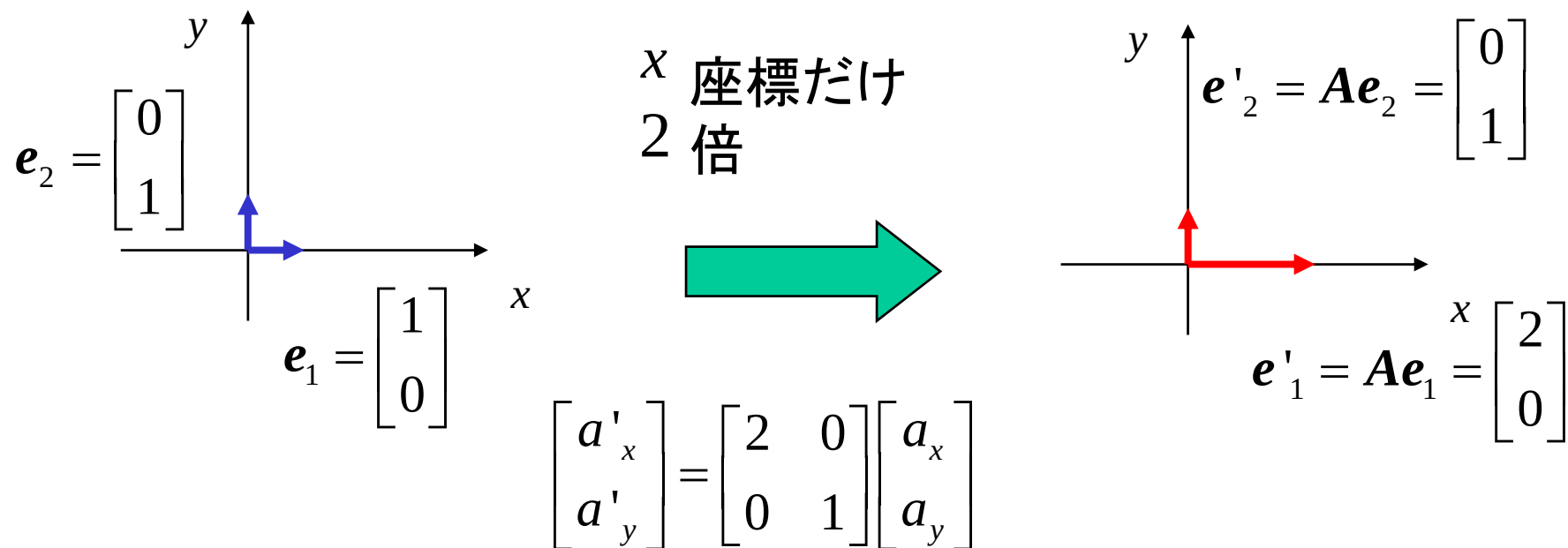
は、一意に特定される。

言い換えると、2つの線形写像 f, g が、
 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ で同じ像をとれば、全く同じ写像になる。

線形空間の全体の像は、
その線形空間の基底の像
の一次結合により一意に
特定される。
線形空間の要素は無数だ
が、基底は有限。

証明略。

標準基底の像と、空間全体の像



基底の像と表現行列

性質(基底の像と表現行列)

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して、 $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ の像を、

$$\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$$

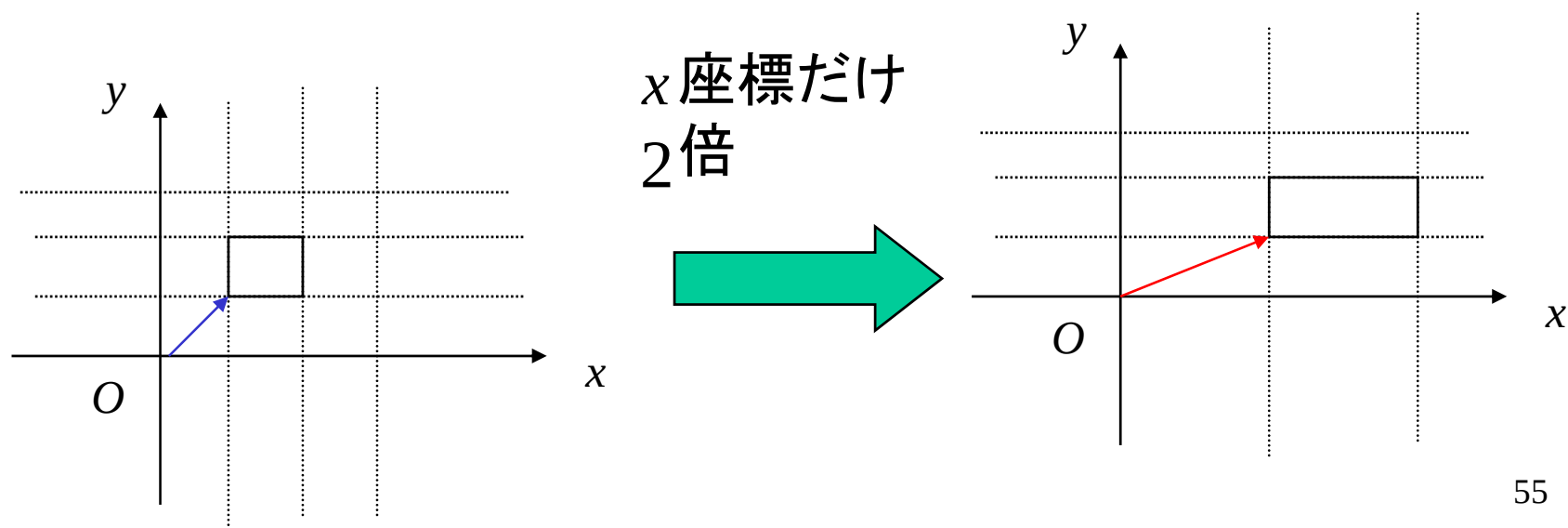
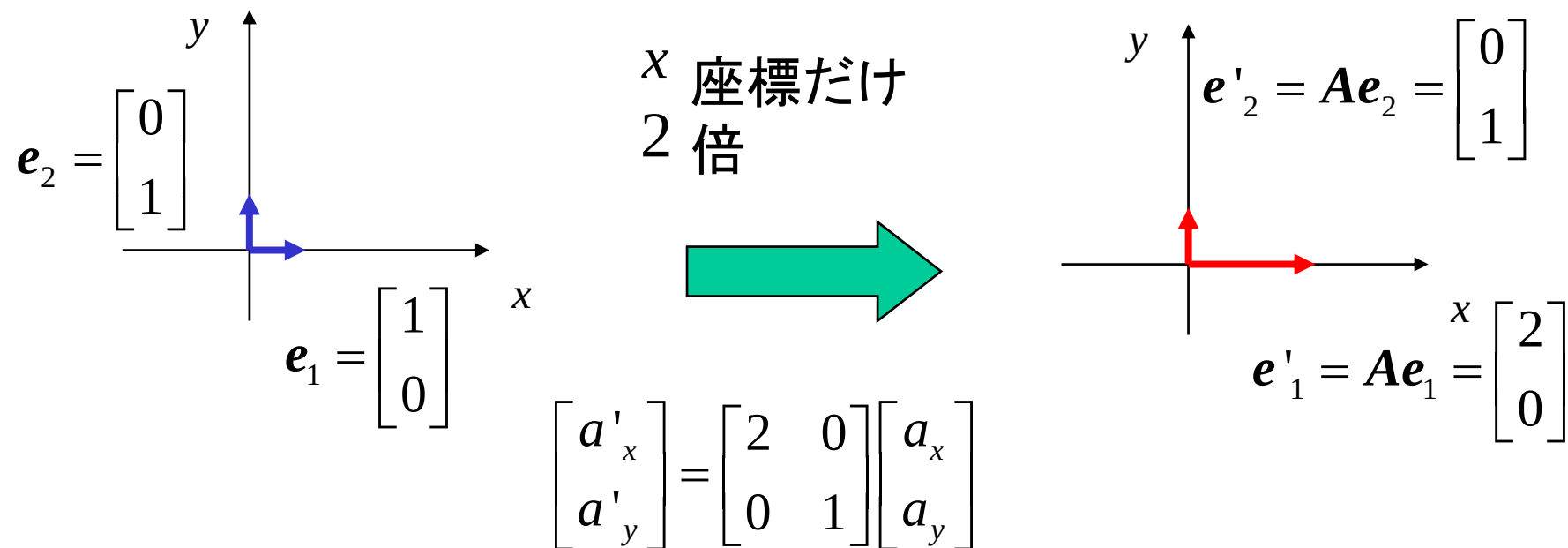
とする。このとき、 f の表現行列 A は、

$$A = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{bmatrix}$$

と表せる。

証明略。

標準基底の像と、空間全体の像



例題

次の線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して、
表現行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

解) 写像より、

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(別解)

$$f \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{array} \right]$$

より、

$$f(\mathbf{e}_1) = f\left(\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]$$

$$f(\mathbf{e}_2) = f\left(\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A} = \left[f(\mathbf{e}_1) \quad f(\mathbf{e}_2) \right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right]$$

練習 次の写像 f 表現行列を求めよ。

$$(1) \quad f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f_1 \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{c} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{array} \right]$$

$$(2) \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f_2 \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{c} 3x_1 + x_2 \\ -9x_1 - 3x_2 \end{array} \right]$$

表現行列と線形写像

性質(表現行列と線形写像)

表現行列が $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ であるような $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 f について次がなりたつ。

$$(1) \quad \text{Im}(f) = f(\mathbb{R}^n) = L\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$(2) \quad \dim \text{Im } f = \text{rank}(A)$$

証明略

例題 1 次の写像 f に関して、表現行列を $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ とする。このとき、

$$(1) \quad \text{Im}(f) = L\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$(2) \quad \dim \text{Im } f = \text{rank}(A)$$

を確かめよ。

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \overset{f}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

解)

$$(1) \quad f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{より、}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{Im } f = \mathbb{R}^2 = L\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

(2)

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^2 = 2$$

$$\text{rank} \mathbf{A} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\therefore \dim \text{Im } f = \text{rank} \mathbf{A}$$

合成写像と表現行列の積

性質(合成写像と表現行列の積)

2つの線形写像

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$$

の表現行列をそれぞれ、

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_f, \mathbf{B} = \mathbf{B}_g$$

とすれば、 $\mathbf{A}$ は $m \times n$ 型で、 $\mathbf{B}$ は $l \times m$ 型である。

また、合成写像 $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ の表現行列を $\mathbf{C}$ とすれば、 $\mathbf{C}$ は $l \times n$ 型であり、

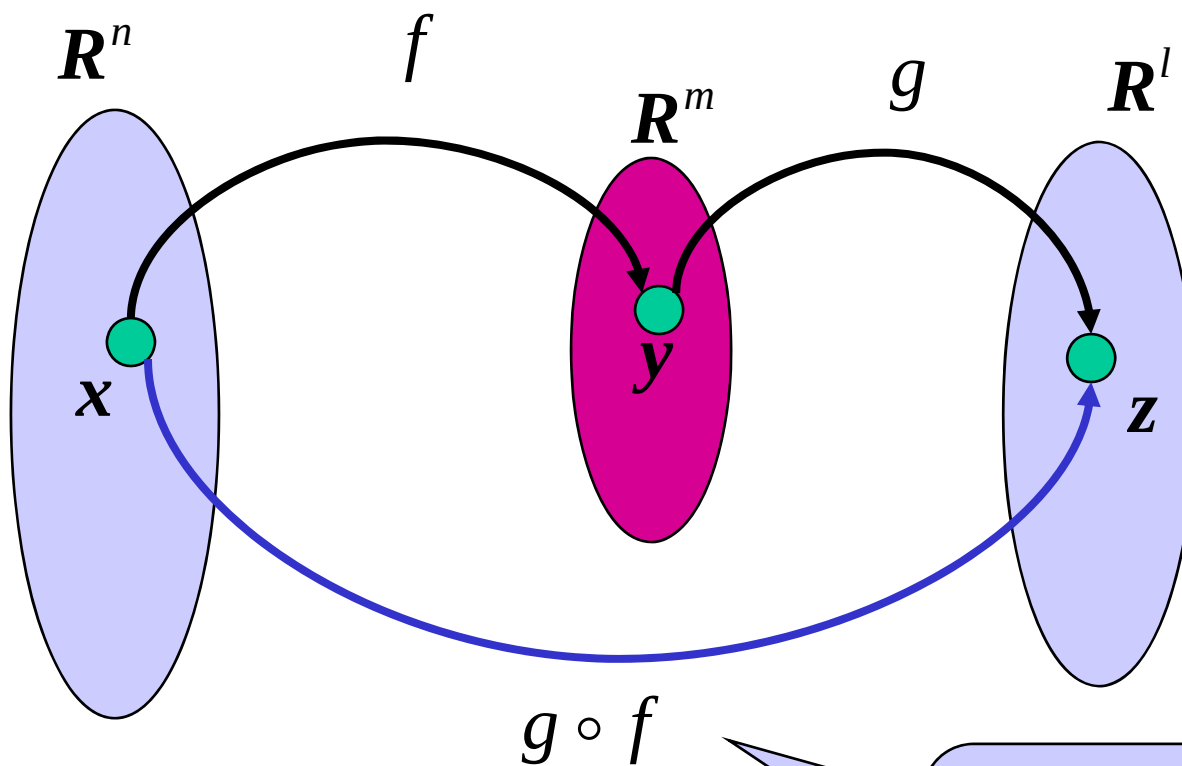
$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}$$

と表せる。

証明略

イメージ

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{bmatrix} = \mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{bmatrix} = \mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$g \circ f(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$
と覚えればよい。