

7. n 次の行列式

一般的な(n 次の)行列式の定義には、数学的な概念がいろいろ必要である。まずそれらを順に見ていく。

余因子

定義(余因子)

$n \geq 2$ とする。

n 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ とその要素 a_{ij} に対して、第 i 行と第 j 列を取り除いた $n-1$ 次の正方行列 $\overline{a_{ij}}$ を考え、符号を次のように設定したスカラーを、

$$\widetilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j} \left| \overline{a_{ij}} \right|$$

行列 A の (i, j) 余因子という。

$n - 1$ 次の行列式。
行列式の定義は
帰納的に定義される

余因子の形

$$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

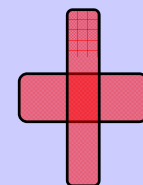
$$\widetilde{a}_{ij} \in R$$

すなわち、余因子は(単一の)スカ
ラーであることに注意すること。

余因子の求め方その1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A は $n \times n$
行列



削除

$$\overline{a_{ij}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\overline{a_{ij}}$ は
 $(n-1) \times (n-1)$
行列

余因子の求め方その2 (余因子の符号)

(1, 1)成分
 a_{11}

+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+

(n, n)成分
 a_{nn}

左上がプラスのチェスボードを考えればよい。

例題1

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

このとき、次の余因子を $n - 1$ 次の行列式を用いて表せ。

(1) (1,1)-余因子

$$\widetilde{a_{11}} = (-1)^{1+1} |\overline{a_{11}}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(3) (1,2)-余因子

$$\widetilde{a_{12}} = (-1)^{1+2} |\overline{a_{12}}| = - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) (3,3)-余因子

$$\widetilde{a_{33}} = (-1)^{3+3} |\overline{a_{33}}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(4) (2,3)-余因子

$$\widetilde{a_{23}} = (-1)^{2+3} |\overline{a_{23}}| = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

例題2

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

このとき、次の成分の余因子を求めよ。

$$(1) \ a_{11} \quad \widetilde{a_{11}} = (-1)^{1+1} |\overline{a_{11}}| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$$

$$(2) \ a_{22} \quad \widetilde{a_{22}} = (-1)^{2+2} |\overline{a_{22}}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12$$

$$(3) \ a_{12} \quad \widetilde{a_{12}} = (-1)^{1+2} |\overline{a_{12}}| = - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(36 - 42) = 6$$

$$(4) \ a_{23} \quad \widetilde{a_{23}} = (-1)^{2+3} |\overline{a_{23}}| = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (-1)(8 - 14) = 6$$

練習

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 7 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

このとき、次の余因子を求めよ。

$$(1) \widetilde{a_{11}}$$

$$(2) \widetilde{a_{33}}$$

$$(3) \widetilde{a_{12}}$$

$$(4) \widetilde{a_{23}}$$

行列式の定義(重要)

定義(行列式)

n 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対し、
行列式 $|A|$ を次のように再帰的に定義する。

(i) $n = 1$ のとき

1次正方行列 $A = [a]$ に対し、 $|A| = a$ とする。

(ii) $n \geq 2$ のとき(i行による余因子展開)

$$|A| = a_{i1} \widetilde{a}_{i1} + a_{i2} \widetilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in} \widetilde{a}_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \widetilde{a}_{ij}$$

余因子展開では、右辺に $n - 1$ 次の
行列式しか出現しないことに注意する。

行列式の余因子展開公式

性質：（余因子展開公式）

$A = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列とする。
このとき、次式が成り立つ。

(1) (i 行に関する余因子展開)

$$|A| = a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + a_{i2}\widetilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\widetilde{a}_{ij}$$

(2) (j 列に関する余因子展開)

$$|A| = a_{1j}\widetilde{a}_{1j} + a_{2j}\widetilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a}_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}\widetilde{a}_{ij}$$

これらは、すべての同じ値（スカラー）になる。
（証明略）

例題1 次の行列式を指定された余因子展開により求めよ。

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1$$

解) (1) 第1行で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times |7| + 3 \times (-1)|5| = 2 \times 7 - 3 \times 5 = -1$$

(2) 第2行で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 5 \times (-1)|3| + 7 \times |2| = -5 \times 3 + 7 \times 2 = -1$$

(3) 第1列で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times |7| + 5 \times (-1)|3| = 2 \times 7 - 5 \times 3 = -1$$

(4) 第2列で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \times (-1)|5| + 7 \times |2| = -3 \times 5 + 7 \times 2 = -1$$

例題2 次の行列式を指定された方法により求めよ。

解)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(1) サラスの方法

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \cdot 2 \\ &\quad - \{2 \cdot (-3) \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-1)\} \\ &= -3 + 16 - (-12 - 4) \\ &= 13 + 16 \\ &= 29 \end{aligned}$$

(2) 第2行で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ = -4(-1 - 4) + 3(4 - 1) = 29$$

(3) 第2列で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \\ = (4 - 3) - 2(-6 - 8) = 29$$

練習 次の行列式を指定された余因子展開により求めよ。

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

- (1) 第1行で展開
- (2) 第2行で展開
- (3) 第1列で展開
- (4) 第2列で展開

例題3 次の行列式を求めよ。

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 2 & 8 & -7 \\ 6 & -4 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解) 第3列で展開する。

$$\begin{aligned} |A| &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 8 & -7 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 7 & -3 & 8 & -7 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 8 & -7 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 8 & -7 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

さらに、第1列で展開する。

$$|A| = 2 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

さらに、第2列で展開する。

$$|A| = 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot (-1) (3 - 5) = 48$$

練習 次の行列式を求めよ。

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

行列式の性質1

性質1: (i 行のスカラー倍)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_{k \times (i)}| = k |\mathbf{A}|$$

証明 i 行で展開する。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} ka_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} ka_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i+n} ka_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= k \left\{ (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} a_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} \right\}$$

$$= k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

QED

例題

次の2つの行列式を比べよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 3 - \{1 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 4\}$$

$$= -4 - 9 - \{-3 - 8\}$$

$$= -13 + 11$$

$$= -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4\}$$

$$= 12 + 27 - \{9 + 24\}$$

$$= 39 - 33$$

$$= 6$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

行列式の性質2

性質2: (i 行における加算分解)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_{(i)+(i')}| = |\mathbf{A}_{(i)}| + |\mathbf{A}_{(i')}|$$

証明

i 行で展開する。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 = (-1)^{i+1}(a_{i1} + b_{i1}) \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+1}(a_{i2} + b_{i2}) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\
 + (-1)^{i+n}(a_{in} + b_{in}) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} \\
 = \cdots$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} a_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} \right\} \\
& + \left\{ (-1)^{i+1} b_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} b_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i+n} b_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} \right\} \\
& = \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

QED

例題

次の3つの行列式を比べよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 3 - \{1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 4\}$$

$$= 4 + 9 - \{3 + 8\}$$

$$= 13 - 11$$

$$= 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - \{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4\}$$

$$= 8 + 18 - \{6 + 16\}$$

$$= 26 - 22$$

$$= 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
= 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4\} \\
= 12 + 27 - \{9 + 24\} \\
= 39 - 33 \\
= 6$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

行列式の性質3

性質3: (行交換の交代性)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
 \hline
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
 \hline
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
 \hline
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\
 \hline
 \end{array}
 & = - &
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
 \hline
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
 \hline
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
 \hline
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

$$|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}_{(i) \leftrightarrow (j)}|$$

証明

2段階に分けて証明する。

場合1:隣接する行の交換時

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \hline a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \hline \end{array}$$

この式が成り立つことを示せばよい。

左辺を i 行で展開

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} a_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{i+n} a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

右辺中の行列式を $i + 1$ 行で展開

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{(i+1)+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{(i+1)+2} a_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{(i+1)+n} a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

よって、左辺と右辺では、
符号が反転する。

チェスボードにしたがって符
号を考えれば、隣接する行
では符号は反転する。

場合2:一般の行の交換時

$$\begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
 \hline
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
 \hline
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\
 \hline
 \end{array}
 = -
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
 \hline
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
 \hline
 \vdots & & \vdots \\
 \hline
 a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\
 \hline
 \end{array}$$

隣接する行の交換を繰り返し適用して、
望みの交換を実現する。

$$\begin{aligned}
 i &\leftrightarrow (i+1) \\
 (i+1) &\leftrightarrow (i+2) \\
 &\vdots \\
 (j-1) &\leftrightarrow j
 \end{aligned}$$

この一連の交換により、
右の行列式が得られる。
($j-i+1$ 回の交換が
行われることに注意する。)

$$(-1)^{j-i+1}$$

a_{11}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$		$\vdots$
$a_{(i+1)1}$	$\cdots$	$a_{(i+1)n}$
$\vdots$		$\vdots$
a_{j1}	$\cdots$	a_{jn}
a_{i1}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$		$\vdots$
a_{n1}	$\cdots$	a_{nn}

次に、逆方法に交換を繰り返す。

$$(j-1) \leftrightarrow (j-2)$$

⋮

$$(i+1) \leftrightarrow i$$

$$(-1)^{2(j-i)+1}$$

この一連の交換により、
右の行列式が得られる。
($j-i$ 回の交換が
行われることに注意する。)

以上より、命題が成り立つ。

a_{11}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$		$\vdots$
a_{j1}	$\cdots$	a_{jn}
$\vdots$		$\vdots$
$a_{(j-1)1}$	$\cdots$	$a_{(j-1)n}$
a_{i1}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$		$\vdots$
a_{n1}	$\cdots$	a_{nn}

QED

例題

次の2つの行列式を比べよ。

解)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4\}$$

$$= 12 + 27 - \{9 + 24\}$$

$$= 39 - 33$$

$$= 6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 - \{2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3\}$$

$$= 9 + 24 - \{12 + 27\}$$

$$= 33 - 39$$

$$= -6$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

行列式の性質4

性質4: (同一行を持つ行列式)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|ccc|}
 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
 & \vdots & & \vdots \\
 (i) & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
 & \vdots & & \vdots \\
 (j) & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}
 \end{array}
 & = 0
 \end{array}$$

$$|\mathbf{A}_{(i)=(j)}| = 0$$

証明

i 行と j 行が等しい行列を $\mathbf{A}$ とし、
その行列 $\mathbf{A}$ に対して、
 i 行と j 行を交換して得られる行列を

$\mathbf{A}_{(i) \leftrightarrow (j)}$
とする。

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (j) \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_{(i) \leftrightarrow (j)}|$$

このとき、明らかに次が成り立つ。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{(i) \leftrightarrow (j)}$$

$$\therefore |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{(i) \leftrightarrow (j)}|$$

一方、行の交換の性質(交代性)より、

$$|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}_{(i) \leftrightarrow (j)}|$$

が成り立つ。

したがって、

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{(i) \leftrightarrow (j)}| = -|\mathbf{A}_{(i) \leftrightarrow (j)}|$$

$$\therefore 2|\mathbf{A}_{(i) \leftrightarrow (j)}| = 0$$

$$\therefore |\mathbf{A}_{(i) \leftrightarrow (j)}| = |\mathbf{A}| = 0$$

QED

例題

次の2つの行列式を求めよ。

解)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - \{1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3\}$$

$$= 6 + 18 - \{6 + 18\}$$

$$= 24 - 24$$

$$= 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 - \{2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4\}$$

$$= 18 + 36 - \{18 + 36\}$$

$$= 54 - 54$$

$$= 0$$

行列式の性質5

性質5: (他の行への加法)

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} + ka_{j1} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \hline \end{array}$$

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{(i)+k \times (j)}|$$

証明

行を分解し、スカラー倍、同一行の性質を用いる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \bullet 0
\end{aligned}$$

以上より、左辺＝右辺、が示せた。

QED

例題

次の3つの行列式を求めよ。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad |A_{(1)+1 \times (2)}| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad |A_{(3)+(-1) \times (2)}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

解)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4\} \\ = 12 + 27 - \{9 + 24\} \\ = 39 - 33 \\ = 6$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 3 - \{4 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4\} \\ = 12 + 54 - \{36 + 24\} \\ = 66 - 60 \\ = 6$$

$$\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 \\
3 & 0 & 3 \\
-1 & 3 & 1
\end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1\}$$

$$= -6 + 27 - \{9 + 6\}$$

$$= 21 - 15$$

$$= 6$$

行列式の性質のまとめ(重要)

行列式の性質: (多重線形性)

$$(1) \quad |A_{k \times (i)}| = k |A|$$

行列の基本変形I
に対応(行のスカラー倍)

$$(2) \quad |A_{(i)+(i')}| = |A_{(i)}| + |A_{(i')}|$$

$$(3) \quad |A| = -|A_{(i) \leftrightarrow (j)}|$$

行列の基本変形III
に対応(行の交換)

$$(4) \quad |A_{(i)=(j)}| = 0$$

$$(5) \quad |A| = |A_{(i)+k \times (j)}|$$

行列の基本変形II
に対応(行の他の行
へのスカラー倍加算)

行列式の性質のまとめ(列)

行列式の定義において、行と列の対称性から列に関する性質も同様に成り立つ。

$$(1) \quad |A^{k \times (j)}| = k |A|$$

列のスカラー倍

$$(2) \quad |A^{(j)+(j')}| = |A^{(j)}| + |A^{(j')}|$$

列の分解

$$(3) \quad |A| = -|A^{(i) \leftrightarrow (j)}|$$

列の交換

$$(4) \quad |A^{(i)=(j)}| = 0$$

同じ列の出現

$$(5) \quad |A| = |A^{(i)+k \times (j)}|$$

他列へのスカラー倍加算

(各記号は、行に関するスライドからの類推で用いている。)

例

次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+y & a \\ a & a & a & a+z \end{vmatrix}$$

解)

1列を他の列から引く。

$$\text{与式} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & 0 & 0 \\ a & 0 & y & 0 \\ a & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$$

第1行で展開する。

$$\text{与式} = a \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = axyz$$

練習

次の行列式を求めよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式の応用

単位行列の行列式

性質: (単位行列の行列式)

単位行列 $\mathbf{I}$ の行列式は、

1

である。すなわち、任意の次数 n に対して、
次が成り立つ。

$$|\mathbf{I}| = |\mathbf{I}_n| = 1$$

証明略

例

$$|\mathbf{I}_1| = |1| = 1$$

$$|\mathbf{I}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|\mathbf{I}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|\mathbf{I}_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

転置行列の行列式

性質: (転置行列の行列式)

行列式は転置しても変わらない。すなわち、

$$|{}^t A| = |A|$$

証明略

例題

次の2つの行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4\}$$

$$= 12 + 27 - \{9 + 24\}$$

$$= 39 - 33$$

$$= 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - \{1 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 4\}$$

$$= 27 + 12 - \{9 + 24\}$$

$$= 39 - 33$$

$$= 6$$

行列の演算と行列式

性質: (行列の演算と行列式)

A, B を n 次の正方行列とする。
このとき次が成り立つ。

(1)

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

(2) $\mathbf{A}$ が正則行列ならば、

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0$$

であり

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det(\mathbf{A}))^{-1}$$

が成り立つ。

証明略

例題

次の行列式を比べよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{vmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{vmatrix}$$

解)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \quad \quad \quad \begin{vmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{vmatrix} = 290 - 286 = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \quad \quad \quad \begin{vmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{vmatrix} = 308 - 304 = 4$$

$$\therefore \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(-2) = 4$$

$$\therefore \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(-2) = 4$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \right| = \left| \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \right| = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

練習

行列式の性質を利用して次の行列式を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(1)

$$\left| {}^t A \right|$$

(3)

$$\left| AB \right|$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\left| B^{-1} \right|$$

(4)

$$\left| \left({}^t (AB) \right)^{-1} \right|$$

展開定理

性質: (展開定理)

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列とする。
このとき、次式が成り立つ。

(1) (行に関する展開定理)

$$a_{i1}\widetilde{a}_{j1} + a_{i2}\widetilde{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\widetilde{a}_{jn} = \begin{cases} |\mathbf{A}| & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

(2) (列に関する展開定理)

$$a_{1i}\widetilde{a}_{1j} + a_{2i}\widetilde{a}_{2j} + \cdots + a_{ni}\widetilde{a}_{nj} = \begin{cases} |\mathbf{A}| & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

証明

(1)だけを証明する。(2)は転置をすることによって同様に証明できる。

$i = j$ のときは、余因子展開より成り立つ。

$i \neq j$ のときには、

i 行 a_i と j 行 a_j が同じ成分の行列の行列式と等しい。

よって、0である。

クロネッカーの δ

定義(クロネッカーの δ)

次の関数をクロネッカーの δ という。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

この関数は数学の様々な場面ででてくる。

クロネッカーの δ を用いると、
展開定理が次のように簡潔に表現できる。

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} \widetilde{a}_{jk} = \delta_{ij} |\mathbf{A}|$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n a_{ki} \widetilde{a}_{kj} = \delta_{ij} |\mathbf{A}|$$

クロネッカーの δ と単位行列

単位行列 I_n もクロネッカーの δ を用いると簡潔に表現できる。

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}]$$

行列式と逆行列の関係

定義:(余因子行列)

n 次の正方行列 A に対して、
その (i, j) 余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ を基に
次のように構成される行列

$$\widetilde{A} = {}^t [\widetilde{a}_{ij}] = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ \widetilde{a}_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \widetilde{a}_{1n} & & & \widetilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

を A の余因子行列という。

余因子行列の性質

余因子行列に関して次の命題が成り立つ。

性質：（余因子行列の性質）

$$\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_n$$

証明

$$\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ \widetilde{a}_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \widetilde{a}_{1n} & & & \widetilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} = [b_{ij}] = \mathbf{B}$$

とする。

このとき、行列の積より、

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n \widetilde{a}_{kj} a_{ki}$$

である。

一方、列に関する展開定理より、

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} \widetilde{a}_{kj} = |\mathbf{A}| \delta_{ij}$$

よって、

$$\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = [b_{ij}] = [|\mathbf{A}| \delta_{ij}] = |\mathbf{A}| [\delta_{ij}] = |\mathbf{A}| \mathbf{I}_n$$

また、

$$\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & a_{nn} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ \widetilde{a}_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \widetilde{a}_{1n} & & & \widetilde{a}_{nn} \end{bmatrix} = [c_{ij}] = \mathbf{C}$$

とおく。行列の積より、

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \widetilde{a}_{jk}$$

である。

一方、行に関する展開定理より、

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \widetilde{a}_{jk} = |\mathbf{A}| \delta_{ij}$$

$$\therefore \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{A}} = [c_{ij}] = |\mathbf{A}|[\delta_{ij}] = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_n = \widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{A}$$

練習

次の行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

正則行列と行列式(重要)

(正則行列と行列式)

正方行列 A が正則であるための必要十分条件は、

$$\det(A) \neq 0$$

である。

証明

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \text{正則}$$

$$|A| \neq 0 \text{ とする。}$$

このとき、余因子行列を用いて、

$$B = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

とおく。

$$AB = BA = I_n$$

である。よって、 B は逆行列 $B = A^{-1}$ である。
よって、 A は正則行列。

$$\text{正則} \Rightarrow |A| \neq 0$$

A は正則行列とする。
このとき、逆行列 $B = A^{-1}$ が存在する。

$$AB = I_n$$

である。両辺の行列式を考える。

$$|\text{左辺}| = |AB| = |A||B|$$

$$|\text{右辺}| = |I_n| = 1$$

$$\text{よって、 } |A||B| = 1$$

$$\therefore |A| \neq 0$$

余因子行列と逆行列

性質: (余因子行列と逆行列)

正方行列 A に対して、 $|A| \neq 0$ であるとき
逆行列 A^{-1} が存在して、余因子行列 $\tilde{A}$ を
用いて、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

と表せる。

練習

次の行列 A に対して、
余因子行列 $\tilde{A}$ を利用して、逆行列 A^{-1} を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$