6．低次の行列式とその応用

行列式とは

行列式とは、正方行列の特徴を与える一つのスカラーである。すなわち、行列式は正方行列からスカラーに写す写像の一種とみなすこともできる。

$$\det : \boldsymbol{R}^{n\times n} \to \boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{A}(\in \boldsymbol{R}^{n\times n}) \mapsto \det(\boldsymbol{A})(\in \boldsymbol{R})$$

$n\times n$ の行列に対する行列式を、n 次の行列式という。
行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を

$$|\boldsymbol{A}|$$

とも表す。

行列式と行列の記号の違いに注意すること。
$|\boldsymbol{A}|$ は行列式、
$[a_{ij}]$ は行列。

n 正方行列 n $\xrightarrow{\det}$ スカラー（実数）

1次の行列式

定義（一次の行列式）

1×1 行列 $\boldsymbol{A}=[a]$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ は次式で定義される。

$$|\boldsymbol{A}| = a$$
$$\det(\boldsymbol{A}) = a$$

2次の行列式

定義（2次の行列式）

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする。

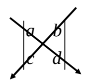
このとき、$\boldsymbol{A}$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ は次式で定義される。

$$|\boldsymbol{A}| = ad - bc$$

行列式は、次ぎのように書かれることもある。

$$\det(\boldsymbol{A}) = ad - bc$$

$|\boldsymbol{A}|$ の求め方



↘ 乗算して符号が正
↙ 乗算して符号が負

$|\boldsymbol{A}| = ad - bc$

2元1次連立方程式から2次の行列式へ

$$\begin{cases} ax+by &= k \cdots (1) \\ cx+dy &= l \cdots (2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$$

消去法によって、 x, y を求める。

$(1)\times d - (2)\times b$	$(2)\times a - (1)\times c$
$(ad-bc)x + (bd-bd)y = kd - bl$	$(ac-ac)x + (ad-bc)y = la - kc$
$\therefore (ad-bc)x = kd - bl$	$\therefore (ad-bc)y = al - kc$

$(ab-bc)$ の部分が共通に現れた。
このスカラーが0以外であれば、
一意に解が存在する。

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 　とすると都合が良い。

2元連立一次方程式の解

$(ad-bc)x = kd - bl$

似ている。
実は、a を k に
c を l に
置き換えただけ。

x に対応する列ベクトルを定数項ベクトルに置き換える。

y に対応する列ベクトルを定数項ベクトルに置き換える。

y についても同様に考察できる。

よって、

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ のとき、 $\therefore x = \dfrac{\begin{vmatrix} k & b \\ l & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & k \\ c & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

（この方法をクラメールの解法といいます。）

例題

$$\begin{cases} 2x-3y &= 5 \\ 4x+y &= -2 \end{cases}$$

解）　まず、行列で記述する。

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

係数行列の行列式を求める。

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\times 1-(-3)\times 4 = 2+12 = 14 \neq 0$$

よって、解が一意に定まる。

$$x = \frac{1}{14}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{14}(5-6) = -\frac{1}{14}$$

$$y = \frac{1}{14}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{14}(-4-20) = -\frac{24}{14} = -\frac{12}{7}$$

7

練習

クラメールの方法を用いて次の連立方程式を解け。

（1）

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 6 \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} 5x - 3y &= 2 \\ 3x - 2y &= -1 \end{cases}$$

8

3元１次連立方程式から3次の行列式へ？

$$\begin{cases} ax+by+cz &= p \\ dx+ey+fz &= q \\ gx+hy+iz &= r \end{cases}$$

これを文字だけで解くことは大変です。
しかし、クラメールらによって一般的な解が
見つけられています。
行列式は、その解が表現できるように
定義されています。
高次元の行列式は、定義自体も複雑です。
まず、3次元の行列式の定義からみていきます。

9

3次の行列式の定義

定義（3次の行列式）

3次の正方行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

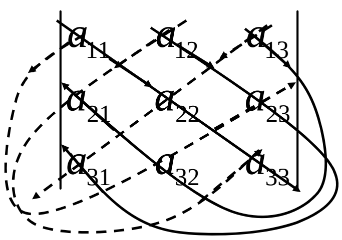
に対して、その行列式は、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

と定義される。

10

3次の行列式の覚え方（サラスの方法）



乗算して符号が正

乗算して符号が負

11

例

（1）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 45+56+144-24-80-189 = -48$$

（2）

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc+abc+abc-a^3-b^3-c^3 = 3abc-a^3-b^3-c^3$$

12

練習

次の行列式の値を求めよ。

（1）
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

（2）
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

（3）
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

（4）
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

13

3元1次連立方程式に対するクラメールの解法

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

の連立方程式は、行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

のときに次のような解を持つ。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

14

例

次の連立方程式をクラメールの方法で解く。

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 22 \\ 2x+3y-4z &= -8 \\ 3x+5y+z &= 24 \end{cases}$$

解）　まず係数行列の行列式を求める。

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}}_{\neq 0} = 3+(-24)+30-(-20)-4-27 = 9-11 = -2$$

よって、解が一意に定まる。

15

各列ベクトルを定数項ベクトルと置き換えて、行列式を求める。

$$\begin{vmatrix} 22 & 2 & 3 \\ -8 & 3 & -4 \\ 24 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 66+(-196)+(-120)-(-440)-(-16)-(216) = -6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 22 & 3 \\ 2 & -8 & -4 \\ 3 & 24 & 1 \end{vmatrix} = (-8)+(-264)+144-(-96)-44-(-72) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 22 \\ 2 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & 24 \end{vmatrix} = 72+(-48)+220-(-40)-96-198 = -10$$

よって、

$$x = \frac{-6}{-2} = 3, \quad y = \frac{-4}{-2} = 2, \quad z = \frac{-10}{-2} = 5$$

16

練習

クラメールの方法により、次の方程式を解け。

（1）
$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

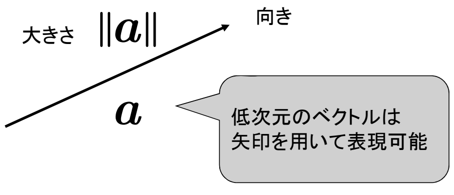
（2）
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

17

ベクトル

定義（ベクトル）

“向き”と“大きさ”を持つ量をベクトルという。



18

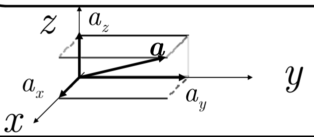
空間ベクトル

定義(空間ベクトル)

空間中のベクトルを空間ベクトルという。
空間ベクトルは、3つのスカラーを用いて、
表現できる。

$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^3$ あるいは $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_x, b_y, b_z \end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^3$ と表現できる。

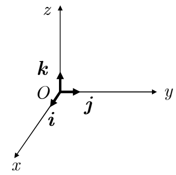
3×1 行列(3次元ベクトル)あるいは
1×3 行列(3次元ベクトル)を空間ベクトルという。



空間の単位ベクトル

応用の分野では、x, y, z の軸方向の単位ベクトルを
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ であらわす。
すなわち、

$$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{k}=\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



単位ベクトルは、座標の
基準となるベクトル

内積

ここでは、低次元空間における内積の定義を示す。

定義(3次元ベクトルの内積)

$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^3$ に対して、スカラー

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

内積は、
同じ成分同士の
積和であり、
n 次元ベクトル
に拡張できる。

をベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の内積といい、

$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}$ あるいは $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
と表す。

内積は交換可
$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a}$

このように内積の演算結果はスカラーになるので、
内積をスカラー積と呼ぶこともある。

転置による内積の表現

性質:(転置によるベクトルの内積表現)

$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^3$ に対して、次が成り立つ。

$$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b} = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$$

証明

$${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{bmatrix}=\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}$$

QED

ベクトルのノルム

定義:(3次元ベクトルのノルム)

ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、スカラー

$$\sqrt{\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{a}}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}$ のノルム(大きさ、長さ)といい、

$$\|\boldsymbol{a}\|$$

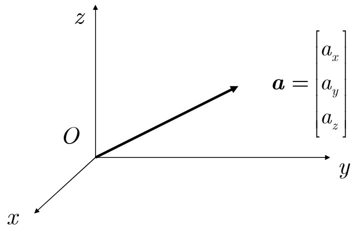
という記号で表す。すなわち、

$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}\in R^3$ に対して、

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}$$

である。

ベクトルのノルムの幾何学的関係

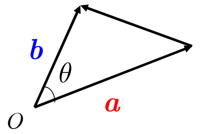


$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}\in R^3$$

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}$$

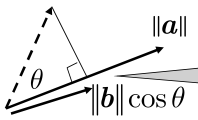
3平方の定理より、空間ベクトルのノルムは、
ベクトルの大きさを意味している。

内積の幾何学的関係



ベクトルの内積に関して次の関係が成り立つ。

$$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$$



方向が同じベクトルはスカラー同士の掛け算になる。

25

直交ベクトル

定義(直交ベクトル)

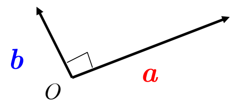
2つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ の内積が0、すなわち、

$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b} = 0$

であるとき、
2つのベクトルは直交しているという。
このとき、2つのベクトルのなす角度 θ は

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

である。



26

外積

3次元ベクトル同士では、
外積という演算が定義できる。

3次元空間は現実の空間であり、
応用上重要な演算である。

外積の演算結果はベクトルであり、
ベクトル積とも呼ばれる。

なお、外積が定義できるのは、
3次元ベクトル同士だけであるので注意すること。

27

定義(3次元ベクトルの外積)

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して、ベクトル

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

外積は、演算結果が3次元ベクトル

をベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の外積といい

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

外積は交換不可

と表す。

28

3次の行列式を用いた外積の計算法

$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \boldsymbol{R}^3$に対して、外積は、

3次の行列式の記号を採用して

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}$$

行列式はスカラーのであるので、これは行列式ではない。しかし、記号的には覚えるのに便利である。外積がベクトルであることに注意して、この表現を利用するとよい。

29

$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \boldsymbol{R}^3$に対して、外積は、

3次の行列式の記号を採用して

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

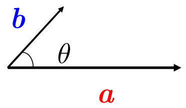
$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}$$

行列式はスカラーのであるので、これは行列式ではない。しかし、記号的には覚えるのに便利である。外積がベクトルであることに注意して、この表現を利用するとよい。

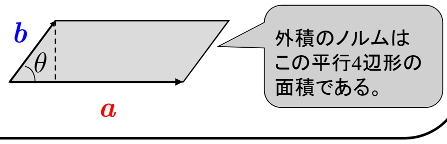
30

外積のノルム



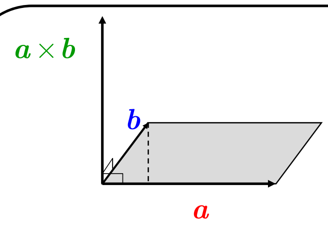
ベクトルの外積に関して、次の式が成り立つ。

$$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$$



31

外積の幾何学的性質



外積のベクトルは、右ねじの方向に、
ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ で生成される
平面に直交する。

32

例題

外積を利用して、次の2つのベクトルと
直交するベクトルを求めよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

解）

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix} = (12-15)\boldsymbol{i} + (12-6)\boldsymbol{j} + (5-8)\boldsymbol{k} = -3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$

よって、 $\begin{bmatrix}-3\\6\\-3\end{bmatrix}$

33

練習

2つのベクトルと直交するベクトルを求めよ。

（1） $\boldsymbol{a} = (2,1,3)$ $\quad \boldsymbol{b} = (-1,2,-1)$

（2）$\boldsymbol{a} = (1,-1,-1)$ $\quad \boldsymbol{b} = (4,1,3)$

（3） $\boldsymbol{a} = (-2,0,1)$ $\quad \boldsymbol{b} = (4,2,0)$

34

例2

外積を利用して、次の3点を頂点とする3角形の
面積を求めよ。

$$A(2,1,1), B(3,-1,1), C(4,1,-1)$$

解）

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}3-2\\-1-1\\1-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix}4-2\\1-1\\-1-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

面積は、

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$$

と求められる。

35

練習

外積を利用して、次の3点を頂点とする3角形の
面積を求めよ。

（1） $A(1,2,1), B(2,1,-1), C(3,4,2)$

（2） $A(3,-1,2), B(2,-2,1), C(3,5,-1)$

36

外積の性質

外積は、次のような性質を満足する。

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ を3次元実数ベクトルとし、
$k \in \boldsymbol{R}$ をスカラー（実数）とする。このとき、以下が成り立つ。

（1） $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

交換したら符号反転。特に、外積は交換不可

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

（2） $(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

スカラーの抜き出し

（3） $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

分配法則

37

平行6面体の体積とスカラー3重積

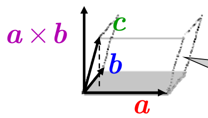
3次元の3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して、
スカラー

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{c}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のスカラー3重積という。

3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を辺とするような平行6面体の体積は、$|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{c}|$ に等しい。

ベクトルの向きで、負の値になることがある。ただし、大きさは等しい。



$\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ のなす角度を θ とすると、平行6面体の高さは $\cos\theta$ と表せる。

38

行列式によるスカラー3重積の表現

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$ に対して、

スカラー3重積は、

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

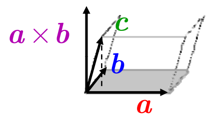
と計算できる。

39

練習

次のベクトルで構成される平行6面体の体積を求めよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



40