# ６．低次の行列式とその応用

# 行列式とは

　行列式とは、正方行列の特徴を与える一つのスカラーである。すなわち、行列式は正方行列からスカラーに写す写像の一種とみなすこともできる。

$$\det : \boldsymbol{R}^{n\times n} \to \boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{A}(\in \boldsymbol{R}^{n\times n}) \mapsto \det(\boldsymbol{A})(\in \boldsymbol{R})$$

$n\times n$ の行列に対する行列式を、
$n$ 次の行列式という。

行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を

$$|\boldsymbol{A}|$$

とも表す。

行列式と行列の記号の違いに注意すること。
$|\boldsymbol{A}|$ は行列式、
$[a_{ij}]$ は行列。

$n \times n$ 正方行列 $\xrightarrow{\det}$ スカラー（実数）

# 1次の行列式

**定義（一次の行列式）**

$1\times 1$ 行列 $\boldsymbol{A}=[a]$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ は次式で定義される。

$$|\boldsymbol{A}|=a$$

$$\det(\boldsymbol{A})=a$$

# 2次の行列式

**定義（2次の行列式）**

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする。

このとき、$\boldsymbol{A}$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ は次式で定義される。

$$|\boldsymbol{A}| = ad - bc$$

行列式は、次ぎのように書かれることもある。

$$\det(\boldsymbol{A}) = ad - bc$$

## $|\boldsymbol{A}|$ の求め方

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$\searrow$ 乗算して符号が正

$\swarrow$ 乗算して符号が負

$$|\boldsymbol{A}| = ad - bc$$

# 2元1次連立方程式から2次の行列式へ

$$\begin{cases} ax+by &= k \cdots (1) \\ cx+dy &= l \cdots (2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$$

消去法によって、 $x, y$ を求める。

$$(1)\times d-(2)\times b$$
$$(ad-bc)x+(bd-bd)y = kd-bl$$
$$\therefore (ad-bc)x = kd-bl$$

$$(2)\times a-(1)\times c$$
$$(ac-ac)x+(ad-bc)y = la-kc$$
$$\therefore (ad-bc)y = al-kc$$

$(ab-bc)$ の部分が共通に現れた。
このスカラーが0以外であれば、
一意に解が存在する。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$ とすると都合が良い。

# 2元連立一次方程式の解

$$(ad-bc)x = kd - bl$$

似ている。
実は、$a$ を $k$ に
$c$ を $l$ に
置き換えただけ。

$x$ に対応する列ベクトルを定数項ベクトルに置き換える。

$y$ についても同様に考察できる。

$y$ に対応する列ベクトルを定数項ベクトルに置き換える。

よって、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{のとき、} \quad \therefore x = \frac{\begin{vmatrix} k & b \\ l & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & k \\ c & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

（この方法をクラメールの解法といいます。）

# 例題

$$\begin{cases} 2x - 3y & = 5 \\ 4x + y & = -2 \end{cases}$$

解） まず、行列で記述する。

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

係数行列の行列式を求める。

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - (-3) \times 4 = 2 + 12 = 14 \neq 0$$

よって、解が一意に定まる。

$$x = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{14}(5 - 6) = -\frac{1}{14}$$

$$y = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{14}(-4 - 20) = -\frac{24}{14} = -\frac{12}{7}$$

# 練習

クラメールの方法を用いて次の連立方程式を解け。

（1）

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

# 3元1次連立方程式から3次の行列式へ？

$$\begin{cases} ax+by+cz & = p \\ dx+ey+fz & = q \\ gx+hy+iz & = r \end{cases}$$

これを文字だけで解くことは大変です。
しかし、クラメールらによって一般的な解が
見つけられています。
行列式は、その解が表現できるように
定義されています。
高次元の行列式は、定義自体も複雑です。
まず、3次元の行列式の定義からみていきます。

# 3次の行列式の定義

**定義（3次の行列式）**

3次の正方行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

に対して、その行列式は、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ \quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

と定義される。

# 3次の行列式の覚え方(サラスの方法)

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
$$

乗算して符号が正

乗算して符号が負

# 例

（1）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 45 + 56 + 144 - 24 - 80 - 189 = -48$$

（2）

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc + abc + abc - a^3 - b^3 - c^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

# 練習

次の行列式の値を求めよ。

（1） $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

（2） $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

（3） $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

（4） $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

# 3元1次連立方程式に対するクラメールの解法

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

の連立方程式は、行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

のときに次のような解を持つ。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

## 例

次の連立方程式をクラメールの方法で解く。

$$
\begin{cases}
x + 2y + 3z & = 22 \\
2x + 3y - 4z & = -8 \\
3x + 5y + z & = 24
\end{cases}
$$

解）

まず係数行列の行列式を求める。

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + (-24) + 30 - (-20) - 4 - 27 = 9 - 11 = -2
$$

$$
\neq 0
$$

よって、解が一意に定まる。

各列ベクトルを定数項ベクトルと置き換えて、行列式を求める。

$$\begin{vmatrix} 22 & 2 & 3 \\ -8 & 3 & -4 \\ 24 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 66 + (-196) + (-120) - (-440) - (-16) - (216) = -6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 22 & 3 \\ 2 & -8 & -4 \\ 3 & 24 & 1 \end{vmatrix} = (-8) + (-264) + 144 - (-96) - 44 - (-72) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 22 \\ 2 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & 24 \end{vmatrix} = 72 + (-48) + 220 - (-40) - 96 - 198 = -10$$

よって、

$$x = \frac{-6}{-2} = 3, \quad y = \frac{-4}{-2} = 2, \quad z = \frac{-10}{-2} = 5$$

# 練習

クラメールの方法により、次の方程式を解け。

（1）

$$\begin{cases} 3x & +2y & +4z & = 0 \\ 2x & -y & +z & = 1 \\ 2x & +y & +4z & = 2 \end{cases}$$

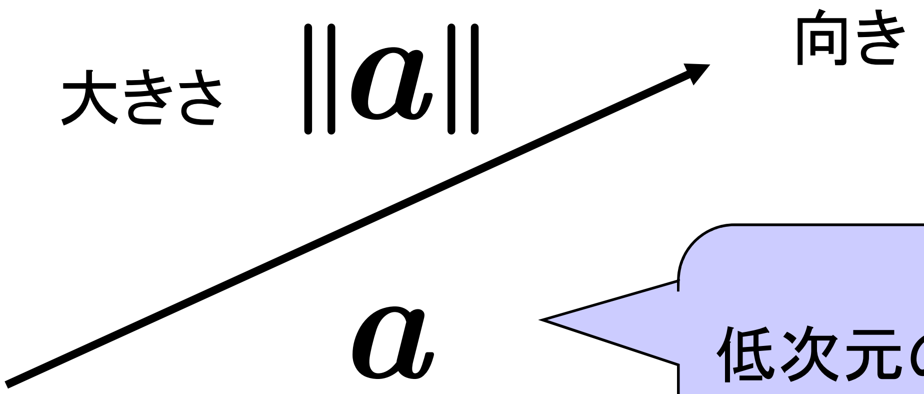
（2）

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 & = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 & = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 & = 2 \end{cases}$$

# ベクトル

**定義（ベクトル）**

“向き”と“大きさ”を持つ量をベクトルという。




低次元のベクトルは
矢印を用いて表現可能

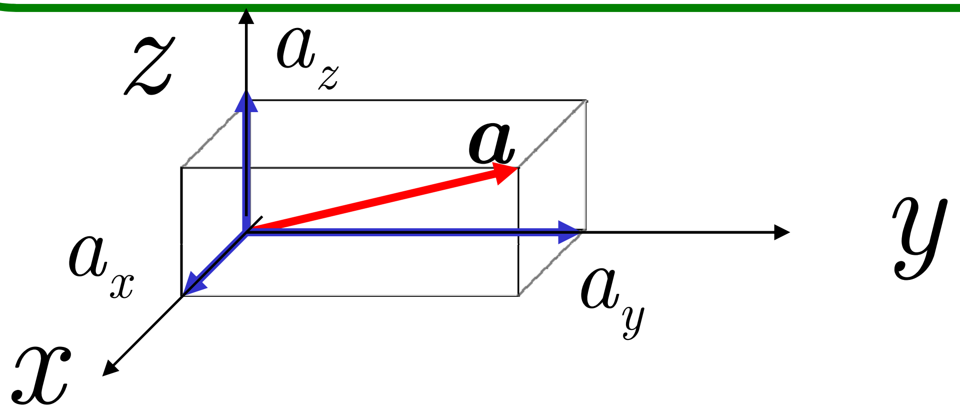
# 空間ベクトル

## 定義（空間ベクトル）

空間中のベクトルを**空間ベクトル**という。
空間ベクトルは、3つのスカラーを用いて、
表現できる。

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$ あるいは $\boldsymbol{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right) \in \boldsymbol{R}^3$ と表現できる。

$3 \times 1$ 行列（3次元ベクトル）あるいは
$1 \times 3$ 行列（3次元ベクトル）を空間ベクトルという。

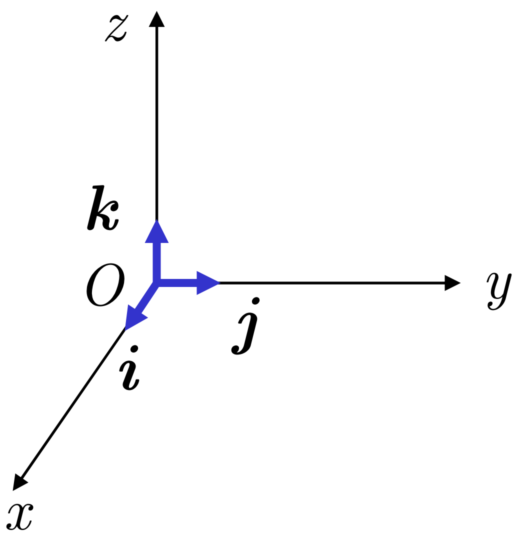


# 空間の単位ベクトル

応用の分野では、$x, y, z$ の軸方向の単位ベクトルを
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ であらわす。

すなわち、

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$




単位ベクトルは、座標の
基準となるベクトル

# 内積

ここでは、低次元空間における内積の定義を示す。

定義（3次元ベクトルの内積）

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$ に対して、スカラー

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

をベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の内積といい、

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$$ あるいは $$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

と表す。

内積は、同じ成分同士の積和であり、$n$ 次元ベクトルに拡張できる。

内積は交換可

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{a}$$

このように内積の演算結果はスカラーになるので、
内積をスカラー積と呼ぶこともある。

# 転置による内積の表現

**性質：（転置によるベクトルの内積表現）**

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$ に対して、次が成り立つ。

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$$

証明

$${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$$

$QED$

# ベクトルのノルム

**定義:(3次元ベクトルのノルム)**

ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、スカラー

$$\sqrt{\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a}}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}$ のノルム(大きさ、長さ)といい、

$$\|\boldsymbol{a}\|$$

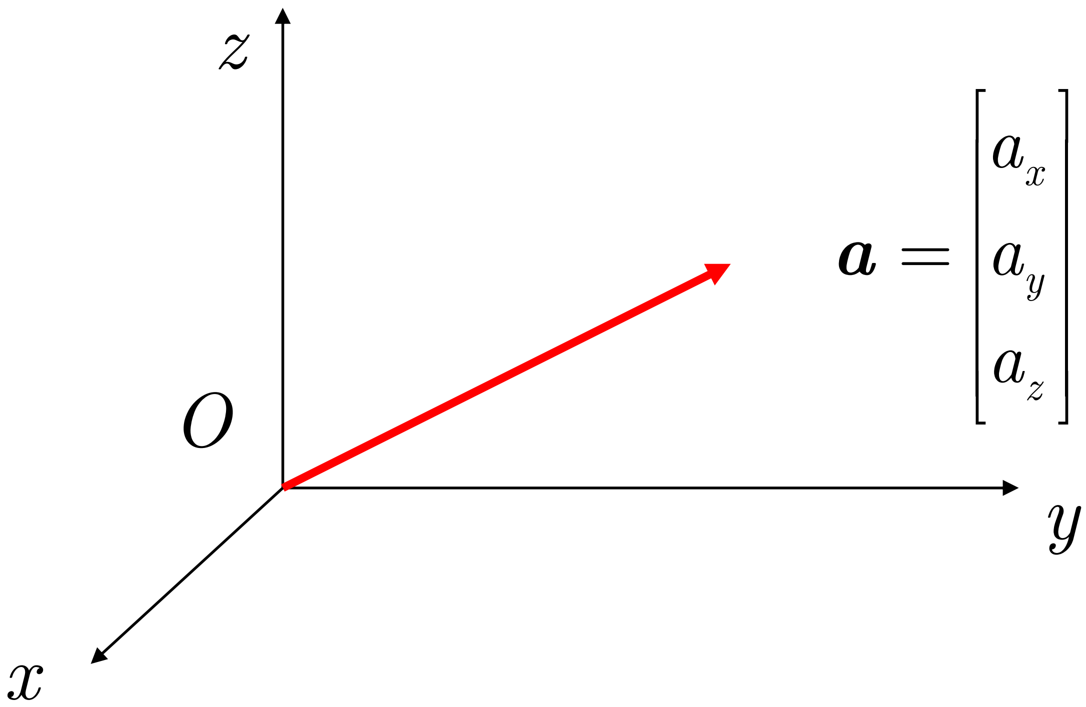
という記号で表す。すなわち、

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \in R^3$$ に対して、

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

である。

# ベクトルのノルムの幾何学的関係

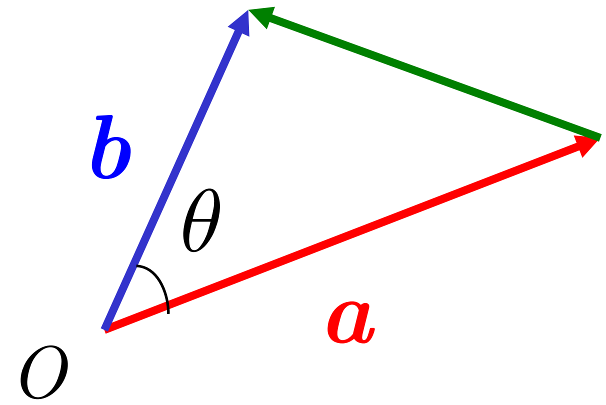



$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \in R^3$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

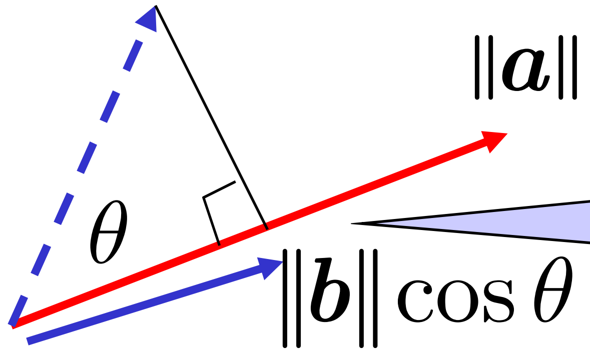
３平方の定理より、空間ベクトルのノルムは、
ベクトルの大きさを意味している。

# 内積の幾何学的関係




ベクトルの内積に関して次の関係が成り立つ。

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \left\|\boldsymbol{b}\right\| \cos\theta$$




方向が同じベクトルは
スカラー同士の掛け算
になる。

# 直交ベクトル

定義（直交ベクトル）

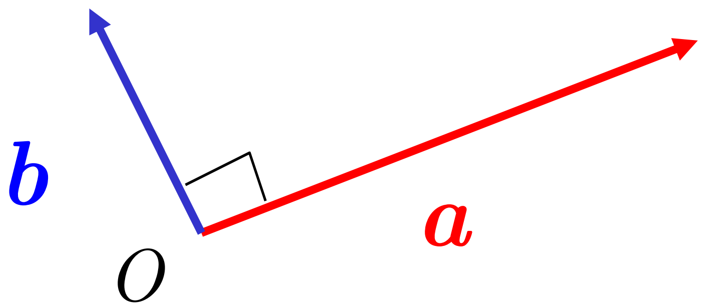
2つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ の内積が0、すなわち、

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = 0$$

であるとき、
2つのベクトルは直交しているという。
このとき、2つのベクトルのなす角度 $\theta$ は

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

である。



# 外積

３次元ベクトル同士では、
外積という演算が定義できる。

３次元空間は現実の空間であり、
応用上重要な演算である。

外積の演算結果はベクトルであり、
ベクトル積とも呼ばれる。

なお、外積が定義できるのは、
３次元ベクトル同士だけであるので注意すること。

## 定義（3次元ベクトルの外積）

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して、ベクトル

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

外積は、
演算結果が
3次元ベクトル

をベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の外積といい

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

外積は交換
不可

と表す。

# 3次の行列式を用いた外積の計算法

$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \boldsymbol{R}^3$に対して、外積は、

３次の行列式の記号を援用して

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}$$

行列式はスカラーのであるので、これは行列式ではない。しかし、記号的には覚えるのに便利である。外積がベクトルであることに注意して、この表現を利用するとよい。

$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \boldsymbol{R}^3$ に対して、外積は、

３次の行列式の記号を援用して

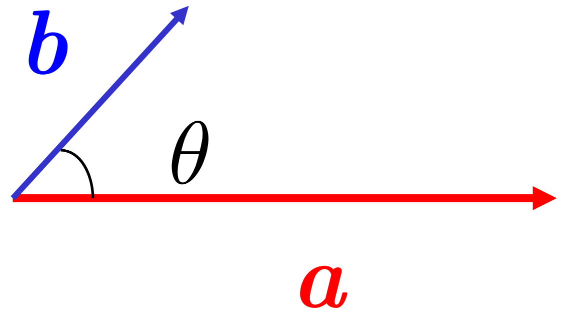
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

行列式はスカラーのであるので、これは行列式ではない。しかし、記号的には覚えるのに便利である。外積がベクトルであることに注意して、この表現を利用するとよい。

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

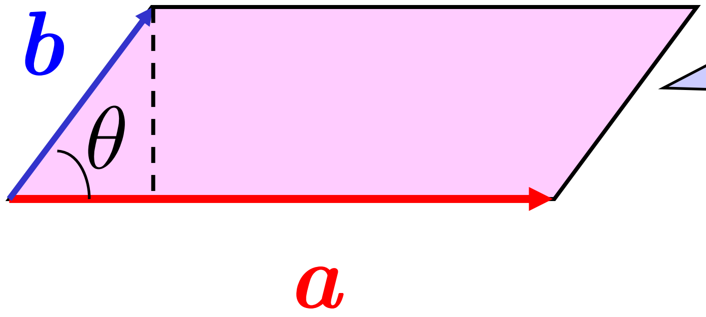
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}$$

# 外積のノルム



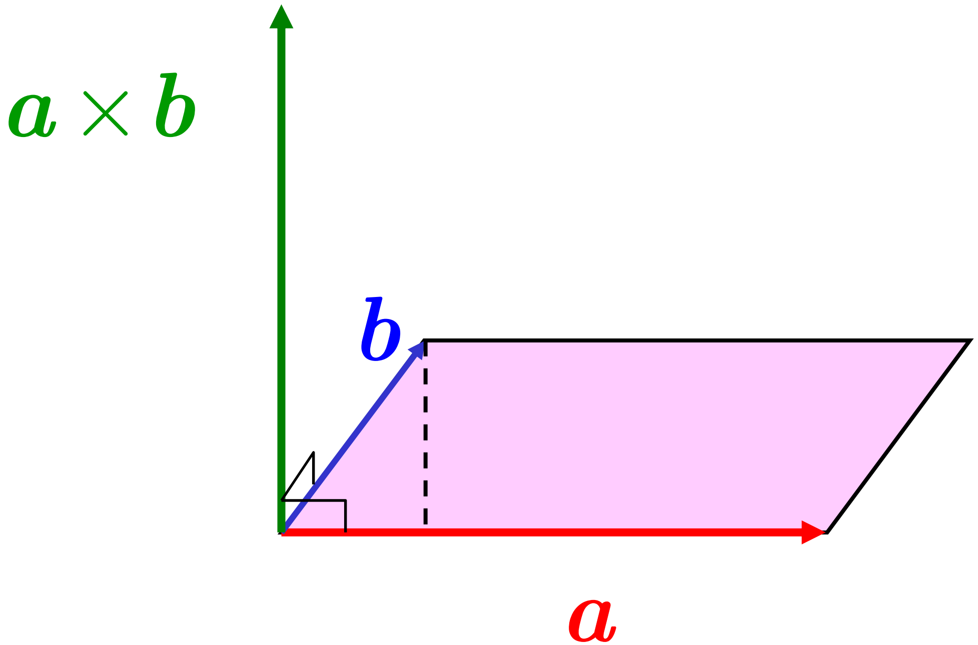

ベクトルの外積に関して、次の式が成り立つ。

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$$




外積のノルムはこの平行4辺形の面積である。

# 外積の幾何学的性質




外積のベクトルは、右ねじの方向に、
ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ で生成される
平面に直交する。

# 例題

外積を利用して、次の2つのベクトルと
直交するベクトルを求めよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

解）

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (12-15)\boldsymbol{i} + (12-6)\boldsymbol{j} + (5-8)\boldsymbol{k} = -3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$

よって、

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

# 練習

２つのベクトルと直交するベクトルを求めよ。

（１）　$\boldsymbol{a} = (2, 1, 3)$　　$\boldsymbol{b} = (-1, 2, -1)$

（２）$\boldsymbol{a} = (1, -1, -1)$　　$\boldsymbol{b} = (4, 1, 3)$

（３）$\boldsymbol{a} = (-2, 0, 1)$　　$\boldsymbol{b} = (4, 2, 0)$

# 例2

外積を利用して、次の3点を頂点とする3角形の面積を求めよ。

$$A(2,1,1), B(3,-1,1), C(4,1,-1)$$

解）

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ -1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 4-2 \\ 1-1 \\ -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

面積は、

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$$

と求められる。

# 練習

外積を利用して、次の３点を頂点とする3角形の
面積を求めよ。

（１）　$A(1,2,1), B(2,1,-1), C(3,4,2)$

（２）$A(3,-1,2), B(2,-2,1), C(3,5,-1)$

# 外積の性質

外積は、次のような性質を満足する。

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ を3次元実数ベクトルとし、
$k \in \boldsymbol{R}$ をスカラー(実数)とする。このとき、以下が成り立つ。

（1） $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

交換したら符号反転。特に、外積は交換不可

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

（2） $(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

スカラーの抜き出し

（3） $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$

分配法則

# 平行6面体の体積とスカラー3重積

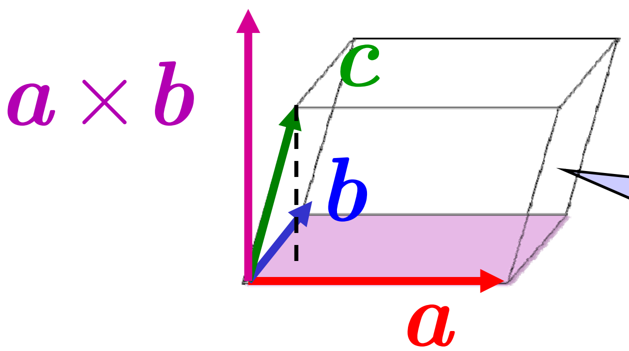
3次元の3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して、
スカラー

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{c}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のスカラー3重積という。

3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を辺とするような平行6面体の体積は、$\left|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{c}\right|$ に等しい。

ベクトルの向きで、負の値になることがある。ただし、大きさは等しい。




$\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ のなす角度を $\theta$ とすると、平行6面体の高さは $\cos\theta$ と表せる。

# 行列式によるスカラー3重積の表現

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{bmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$$ に対して、

スカラー3重積は、

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & b_x & c_x\\ a_y & b_y & c_y\\ a_z & b_z & c_z\end{vmatrix}$$

と計算できる。

# 練習

次のベクトルで構成される平行6面体の体積を求めよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$