５. 連立一次方程式

連立方程式とその解

ここでは、連立方程式を解くということを再考する。
そもそも方程式を“解く”とは、
与えられた式を満たす全ての実数の集合を求めることである。すなわち、方程式 $f(x)=0$ の解とは、

$$\{x \in \boldsymbol{R} \mid f(x)=0\}$$

である。

$f(x)=0$ を満たす実数 x の集合(要素が一つの場合もある。)

同様に、連立方程式

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x})=0 \\ \quad\vdots \\ f_m(\boldsymbol{x})=0 \end{cases}$$

ここで、 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = {}^t\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

なるベクトル。

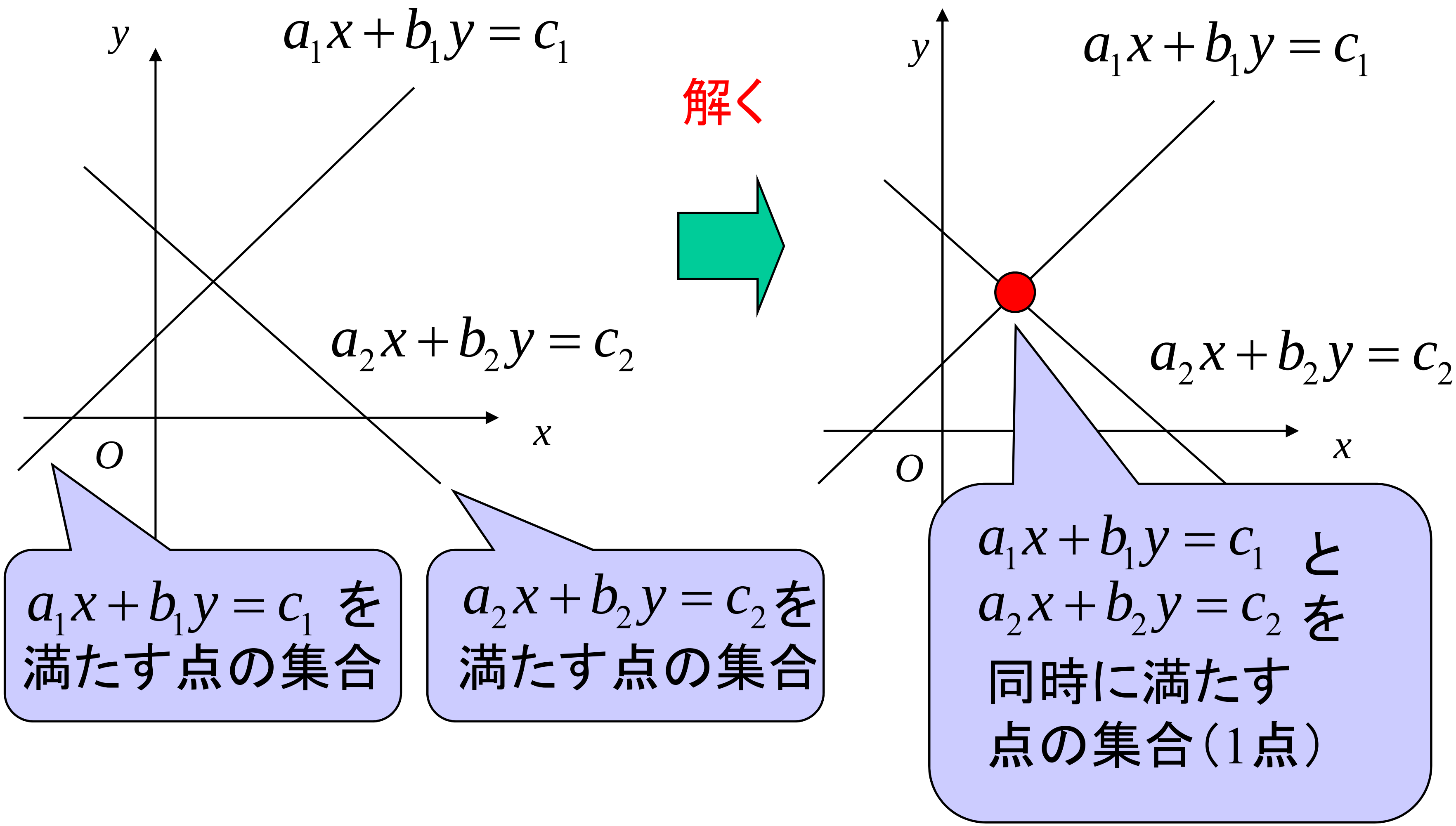
を“解く”とは、与えられた複数の式の全てを満たすベクトルの集合を求めることである。すなわち、以下が解である。

$$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid f_1(\boldsymbol{x})=0 \text{ AND } f_2(\boldsymbol{x})=0 \text{ AND } \cdots \text{AND } f_m(\boldsymbol{x})=0\}$$

連立方程式とその解1

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

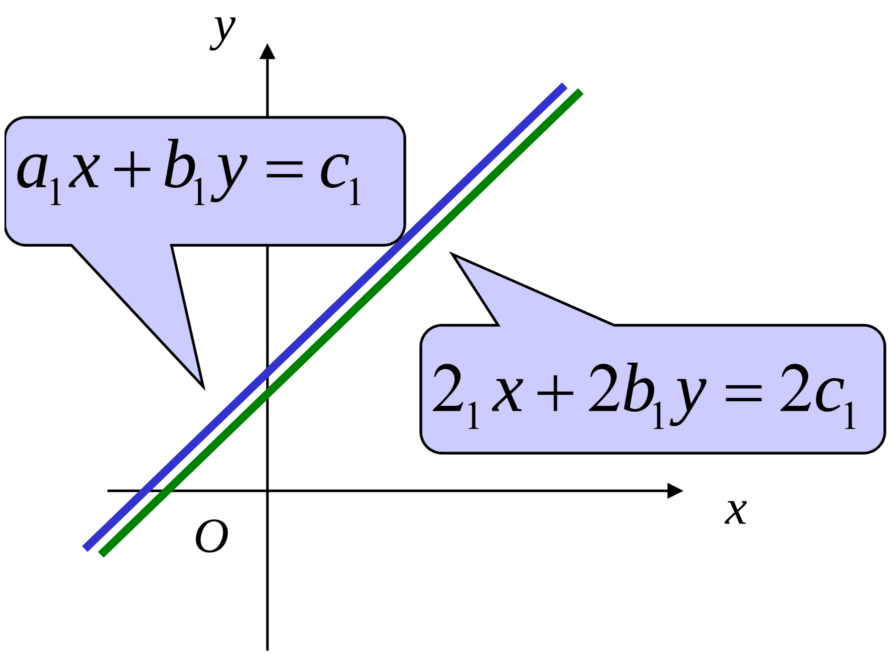
この連立方程式を“解く”とは、
2つの方程式を同時に満たす
(x, y) の組を見つけることである。

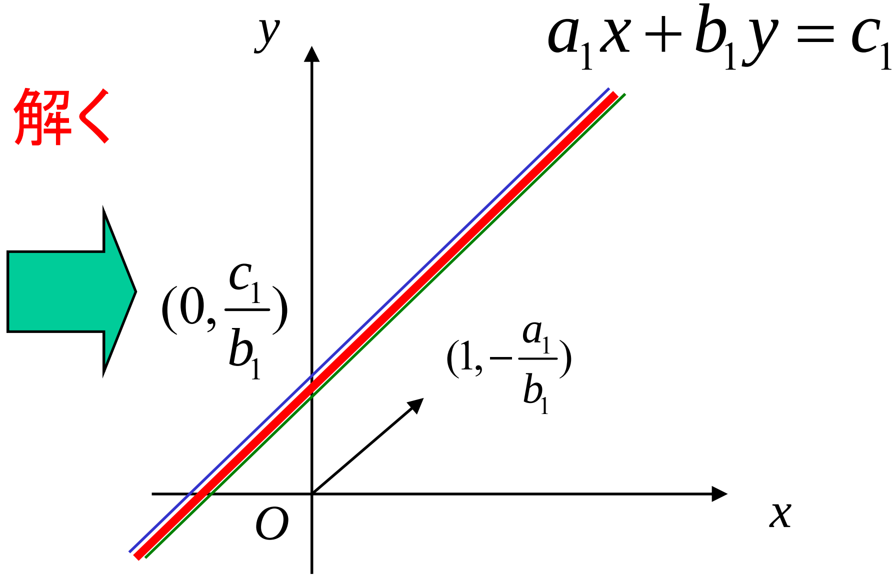


連立方程式とその解2

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ 2a_1 x + 2b_1 y = 2c_1 \end{cases}$$

この連立方程式の答えは、
$a_1 x + b_1 y = c_1$ 上の点全てである。





解 $\{(x, y) \mid a_1 x + b_1 y = c_1\}$

$b_1 \neq 0$ とし、k を任意のスカラーとして、

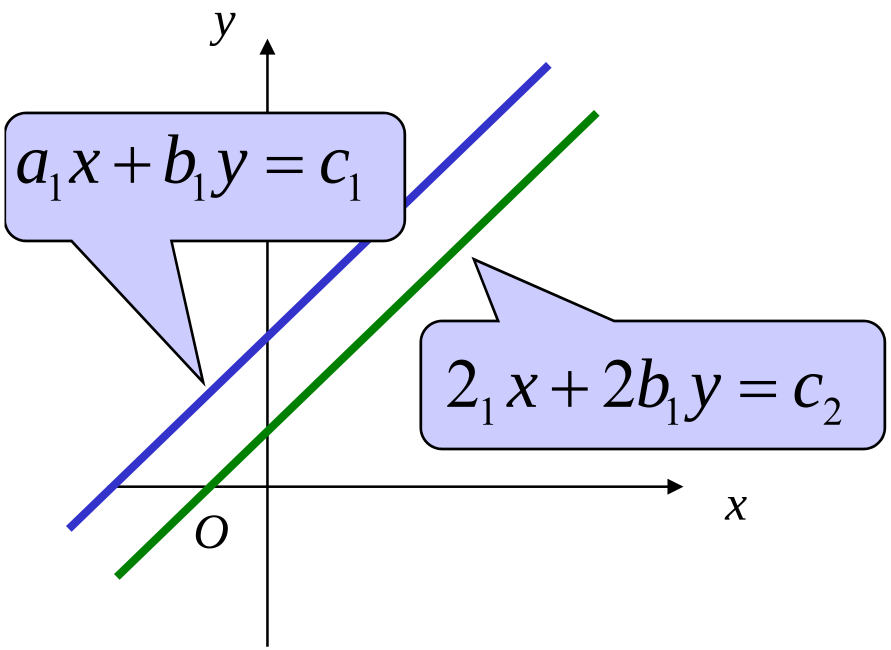
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{a_1}{b_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_1}{b_1} \end{bmatrix}$$ とも表せる。

このように、無限個のベクトルが式を満たすことを不定という。

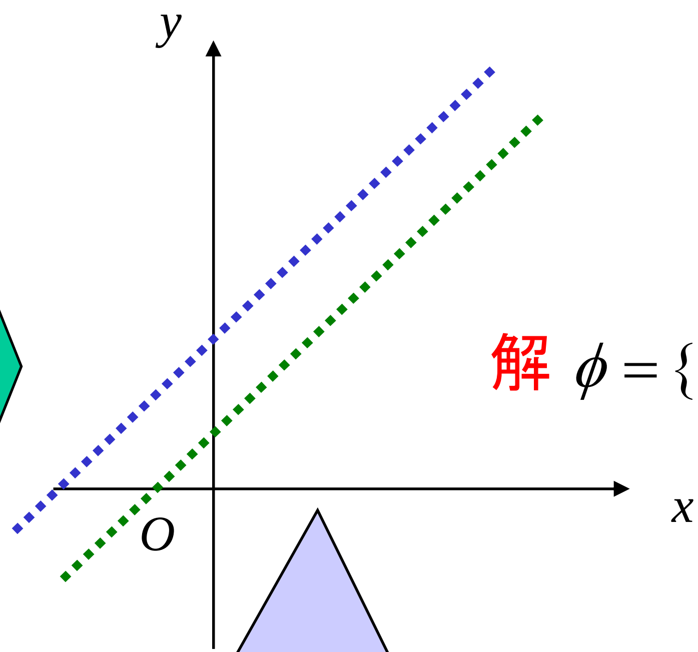
連立方程式とその解3

$$\begin{cases} a_1x+b_1y & =c_1 \\ 2a_1x+2b_1y & =c_2(\neq 2c_1) \end{cases}$$

この連立方程式を満たすものはない。



解く

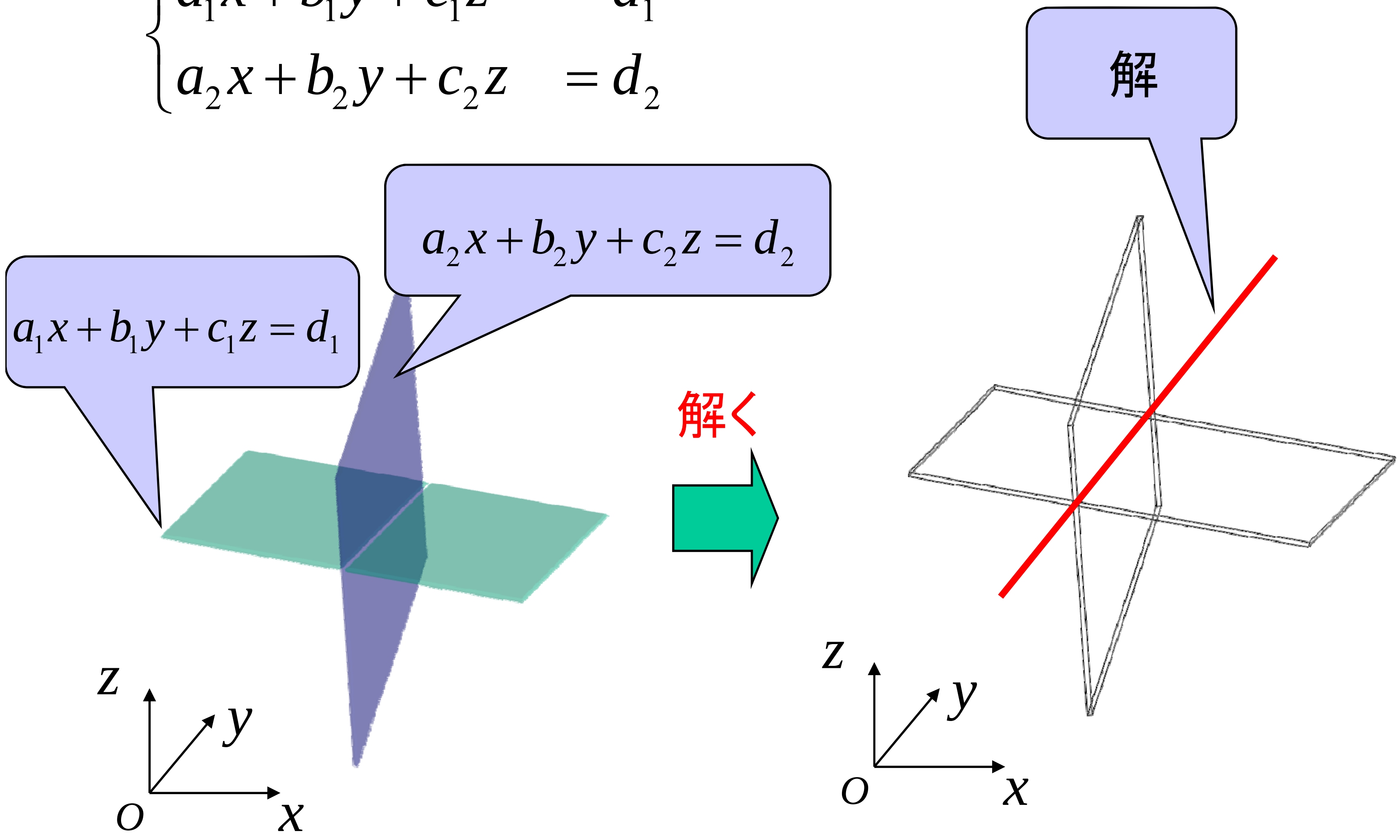


解 $\phi=\{\}$

このように、式を満たすベクトルがひとつもないことを不能という。

連立方程式とその解4

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{cases}$$



連立一次方程式

これまでも、何度も扱ってきたが、
連立方程式を行列とベクトルを用いて表現できる。

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\qquad\qquad\vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{cases}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \\
a_{m1} & \cdots & & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ \vdots \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m
\end{bmatrix}
$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ここで、

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_m], \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

このとき、各行列およびベクトルは、以下のような名称で呼ばれる。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

係数行列

未知数ベクトル

定数項ベクトル

通常の一次方程式と対応させてみるとよい。

$$3x = 2$$

係数

未知数

定数

さらに、拡大係数行列１つで連立方程式を表す。

$$\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b} \right]$$

拡大係数行列

正則な係数行列を持つ連立方程式

（正則行列と連立一次方程式）

連立1次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が一意の解を持つための必要十分条件は、係数行列 $\boldsymbol{A}$ が正則行列であることである。（したがって、$\boldsymbol{A}$ は正方行列）

証明:　十分性:（正則→一意）

$\boldsymbol{A}$ は正則なので、
逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

の両辺の左から $\boldsymbol{A}^{-1}$ を乗じる。

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\therefore \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\therefore \boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

積は一意なので、
解 $\boldsymbol{x}$ は一意である。

必要性:(一意→正則)

背理法による。
係数行列 $\boldsymbol{A}$ が正則でなくても、解が一意と仮定する。
(背理法の仮定)

このとき、 $\boldsymbol{A}$ を階段行列に変形したとき、段数が減少する。

そのときの変形行列(基本変形行列の積)を $\boldsymbol{T}$ とし、
$\boldsymbol{T}$ を左から乗じて得られる拡大係数行列を $\left[\boldsymbol{C} \;\vdots\; \boldsymbol{d}\right]$ とする。

$$\left[\boldsymbol{A} \;\vdots\; \boldsymbol{b}\right] \xrightarrow{\quad T \quad} \left[\boldsymbol{C} \;\vdots\; \boldsymbol{d}\right]$$

すなわち、

$$\boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{TA}$$

$$\boldsymbol{d} \equiv \boldsymbol{Tb}$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + & a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
a_{31}x_1 + & \ddots & & & = b_3 \\
\vdots & & & & \vdots \\
a_{n1}x_1 + & \cdots & & +a_{nn}x_n & = b_n
\end{cases}
$$

$$
\Big\downarrow \boldsymbol{T}
$$

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + & c_{12}x_2 + & \cdots & & & +c_{1n}x_n & = d_1 \\
& c_{2p}x_2 + & \cdots & & & +c_{2n}x_n & = d_2 \\
& & \vdots & & & & \\
& & c_{rq}x_r + & \cdots & & c_{rn}x_r & = d_r \\
& & & \vdots & & & \\
& & & 0 \bullet x_{r+1} + & & 0 \bullet x_n & = d_{n-1} \\
& & & & & 0 \bullet x_n & = d_n
\end{cases}
$$

階段行列の段数が減少しているので、第 n 式（最後の方程式）の係数は全て、0である。よって、$d_n = 0$ である。しかし、第n式の形よりx_nの値を任意な実数 k に
選んだとしても、

$$\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$$

を満たす。すなわち、形が

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix}$$

となる複数（無数）の解が存在する。
同値変形であるので、$\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

も満たす。これは、解の一意性に矛盾する。　$\mathcal{QED}$

連立方程式と階数

（連立方程式と階数）

連立1次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つための
必要十分条件は、

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right]$$

が成り立つことである。
ここで、左辺は係数行列の階数、
右辺は拡大係数行列の階数である。

この命題は、解が一意に求まるときと、
不定のときの両方を表している。
（逆の言い方をすると、不能でない条件
を示している。）

証明略

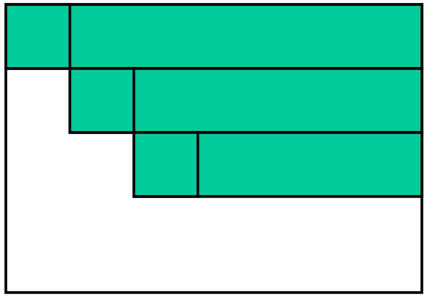
連立方程式の解法

拡大係数行列を階段行列化したものを $\left[\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{d}\right]$ とする。
すなわち、

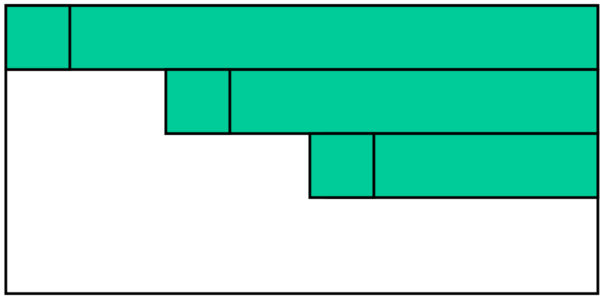
$$\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right] \xrightarrow{\text{階段行列化}} \left[\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{d}\right]$$

行列 $\boldsymbol{C}$ の形により、2つの場合に分けて考える。

場合1:(簡単な場合)

$\boldsymbol{C} =$ 

場合2:(複雑な場合)

$\boldsymbol{C} =$ 

場合1:(簡単な場合)

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + & c_{12}x_2 + & \cdots & & +c_{1n}x_n & = d_1 \\
& c_{22}x_2 + & \cdots & & +c_{2n}x_n & = d_2 \\
& & \vdots & & & \\
& & c_{rr}x_r + & \cdots & c_{rn}x_r & = d_r \\
& & & \vdots & & \\
& & & & 0\bullet x_n & = 0 \\
& & & & 0\bullet x_n & = 0
\end{cases}
$$

解を持つときには、必ず0になる。

この場合には、行基本変形を用いてさらに変形できる。

$$
\boldsymbol{C} \xrightarrow{\boldsymbol{T}'} \boldsymbol{C}'
$$

$$
\boldsymbol{C}' = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{C}'_{r,n-r} \\ \hline \boldsymbol{O}_{n-r,r} & \boldsymbol{O}_{n-r,n-r} \end{array}\right]
$$

$$
\boldsymbol{C}' = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & c'_{1,r+1} & \cdots & & c'_{1,n} \\
0 & 1 & & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
0 & \cdots & & 1 & c'_{r,r+1} & & & c'_{r,n} \\
\hline
0 & \cdots & & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & & 0 & 0 & & \cdots & 0
\end{array}\right]
$$

この変形行列を用いて、次のように連立方程式が変形されたとする。

$$
\left[\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{d}\right] \xrightarrow{T'} \left[\boldsymbol{C}' \mid \boldsymbol{d}'\right]
$$

$$
\left\{
\begin{array}{cccc|ccccccc}
x_1 & & & & +c'_{1,r+1}\,x_{r+1} & +c'_{1,r+2}\,x_{r+2} & + & \cdots & +c'_{1,n}\,x_n & = & d'_1 \\
& x_2 & & & +c'_{2,r+1}\,x_{r+1} & +c'_{2,r+2}\,x_{r+2} & + & \cdots & +c'_{2,n}\,x_n & = & d'_2 \\
& & \ddots & & & \vdots & & & & & \\
& & & x_r & +c'_{r,r+1}\,x_{r+1} & +c'_{r,r+2}\,x_{r+2} & + & \cdots & +c'_{r,n}\,x_n & = & d'_r \\
\hline
& & & & 0\bullet x_{r+1} & +0\bullet x_{r+2} & + & \cdots & +0\bullet x_n & = & 0 \\
& & & & & & & & \vdots & = & \vdots \\
& & & & & & & & 0\bullet x_n & = & 0
\end{array}
\right.
$$

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right]$$

$$= \operatorname{rank}[\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{d}]$$

$$= \operatorname{rank}[\boldsymbol{C}' \mid \boldsymbol{d}']$$

であることに注意する。

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{C} \xrightarrow{\boldsymbol{T}'} \boldsymbol{C}' = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & c'_{1,r+1} & \cdots & & c'_{1,n} \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & & 1 & c'_{r,r+1} & & & c'_{r,n} \\ \hline 0 & \cdots & & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right] \xrightarrow{\boldsymbol{T}} \left[\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{d}\right] \xrightarrow{\boldsymbol{T}'} \left[\boldsymbol{C}' \mid \boldsymbol{d}'\right] = \left[\begin{array}{cccc:ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c'_{1,r+1} & & c'_{1,n} & d'_1 \\ 0 & 1 & & & c'_{2,r+1} & & c'_{2,n} & d'_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ 0 & & & 1 & c'_{1,r+1} & \cdots & c'_{1,r+1} & \\ \hdashline 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$
\left\{
\begin{array}{cccc:cccccc}
x_1 & & & & +c'_{1,r+1}\,x_{r+1} & +c'_{1,r+2}\,x_{r+2} + & \cdots & +c'_{1,n}\,x_n & = & d'_1 \\
& x_2 & & & +c'_{2,r+1}\,x_{r+1} & +c'_{2,r+2}\,x_{r+2} + & \cdots & +c'_{2,n}\,x_n & = & d'_2 \\
& & \ddots & & & \vdots & & & & \\
& & & x_r & +c'_{r,r+1}\,x_{r+1} & +c'_{r,r+2}\,x_{r+2} + & \cdots & +c'_{r,n}\,x_n & = & d'_r \\
\hdashline
& & & & 0\bullet x_{r+1} & +0\bullet x_{r+2} + & \cdots & +0\bullet x_n & = & 0 \\
& & & & & \vdots & & & = & \vdots \\
& & & & 0\bullet x_{r+1} & +0\bullet x_{r+2} + & \cdots & +0\bullet x_n & = & 0
\end{array}
\right.
$$

このときは、連立方程式を考えると、

の　$x_{r+1,} \cdots, x_n$ の　$n-r$ 個の変数は任意の実数でよいことがわかる。

$$
\begin{cases}
x_{r+1} = k_1 \\
\quad\vdots \\
x_n = k_{n-r}
\end{cases}
$$

というように、$n-r$個任意定数を用いて、
連立方程式の解を表現できる。

$$\begin{cases} x_1 & & & & = d'_1 & -c'_{1,r+1}k_1 & \cdots & -c'_{1,n}k_{n-r} \\ & x_2 & & & = d'_2 & -c'_{2,r+1}k_1 & & -c'_{2,n}k_{n-r} \\ & & \ddots & & & \vdots & & \\ & & & x_r & = d'_r & -c'_{r,r+1}k_1 & & -c'_{r,n}k_{n-r} \end{cases}$$

このように、$x_{1,} \cdots, x_r$ は $n-r$ 個の任意定数 $k_1, \cdots, k_{n-r}$ を用いて自動的に決定される。

自由度

定義（自由度）

未知数が n 個の連立一次方程式
（n 元一次連立方程式）

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

において、

$$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right] = r$$

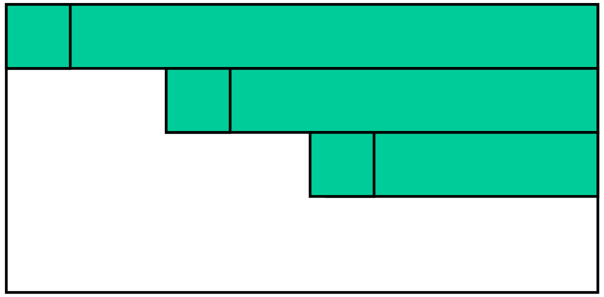
とする。このとき、自由に定めることのできる未知数の数

$$n - r$$

を方程式の自由度という。

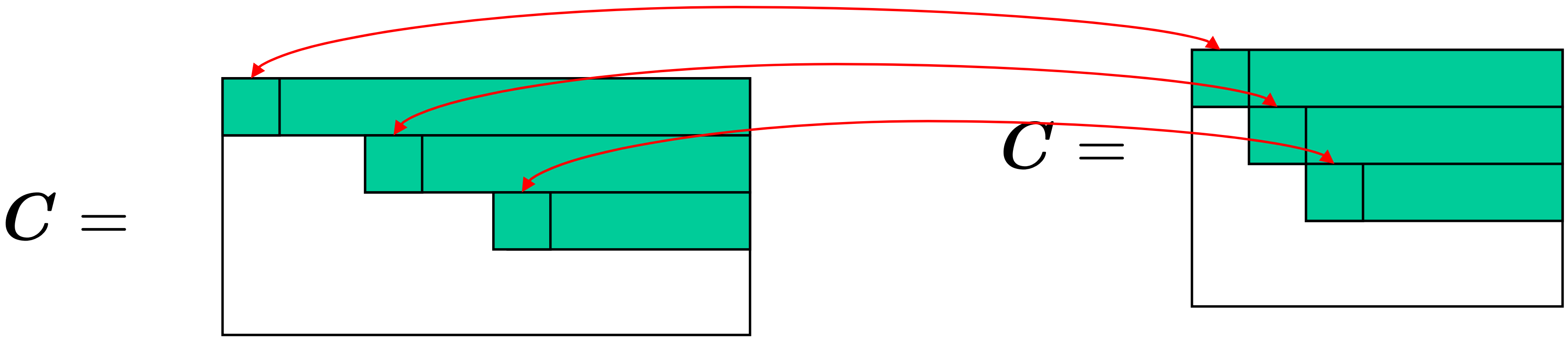
連立方程式の解は、自由度の数だけの
任意定数を用いて表現される。

場合2:(複雑な場合)

$\boldsymbol{C} =$ 

$$
\begin{cases}
c_{1l_1}x_{l_1} + \cdots + c_{1l_2}x_{l_2} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\
c_{2l_2}x_{l_2} + \cdots + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\
\vdots \\
c_{rl_r}x_{l_r} + \cdots \; c_{rn}x_r = d_r \\
0 \bullet x_{r+1} = 0 \\
\vdots \\
0 \bullet x_n = 0
\end{cases}
$$

この場合は、各階段の先頭に注目して、
場合１と同様に考えることができる。



$$
\begin{cases}
x_{l_1} \leftrightarrow x_1 \\
x_{l_2} \leftrightarrow x_2 \\
\qquad \vdots \\
x_{l_r} \leftrightarrow x_r
\end{cases}
$$

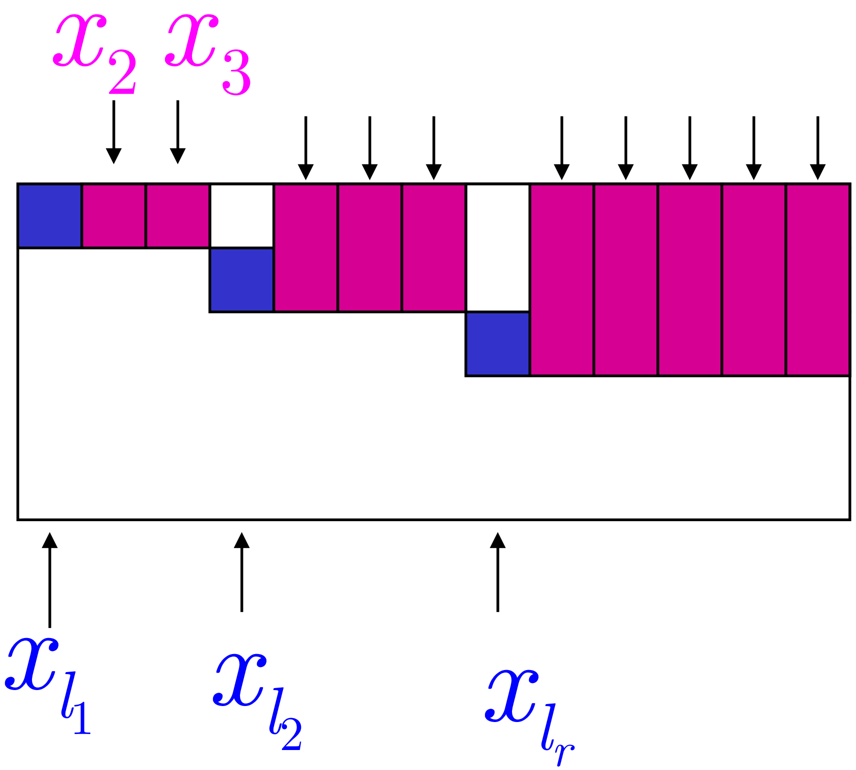
とすれば、ほぼ同様に議論される。

結局、次のように解くことができる。

$$
\begin{cases}
x_1 & & & & & & & & = d'_1 - \sum_{i=1}^{n-r} c_{pq} k_i \\
& x_2 & & & & & & & = k_1 \\
& & \ddots & & & & & & \vdots \\
& & & x_{l_2 - 1} & & & & & = k_{l_2 - 1} \\
& & & & x_{l_2} & & & & = d'_{l_2} - \sum_{i=1}^{n-r} c'_{rs} k_i \\
& & & & & \ddots & & & \vdots \\
& & & & & & x_{l_r} & \cdots \quad x_n & = d'_{l_r} - \sum_{i=1}^{n-r} c'_{uv} k_i \\
& & & & & & & x_{l_r + 1} & = k_{n - l_r} \\
& & & & & & & \vdots & \vdots \\
& & & & & & & x_n & = k_{n-r}
\end{cases}
$$

任意定数 n - r 個

$C =$



一定値 r 個

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_{l_1} \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{l_2-1} \\ x_{l_2} \\ x_{l_2+1} \\ \vdots \\ x_{l_r} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

として、やはり

n - r 個の任意定数を用いて解くことができる。

例題1

次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x - y - 4z & = 0 \\ 2x - 2y - 8z & = 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{A} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{x} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{b} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすると、

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

拡大係数行列は、次のようになる。

$$\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

係数行列と、拡大係数行列の階数(rank)を求める。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-2\times(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なので、$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} = 1$ である。

また、

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)-2\times(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = 1$$

$$\therefore \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

よって、解が存在する。（不能ではない。）

係数行列の階段行列より、元の連立方程式は、次の連立方程式と同値。

$$\begin{cases} x - y - 4z &= 0 \\ 0x - 0y - 0z &= 0 \end{cases}$$

また、自由度は $3\text{-rank}\,\boldsymbol{A} = 2$ である。
階段の先頭以外を任意定数とする。

$$\begin{cases} y = k_1 \\ z = k_2 \end{cases}$$

これより、

$$x = k_1 + 4k_2$$

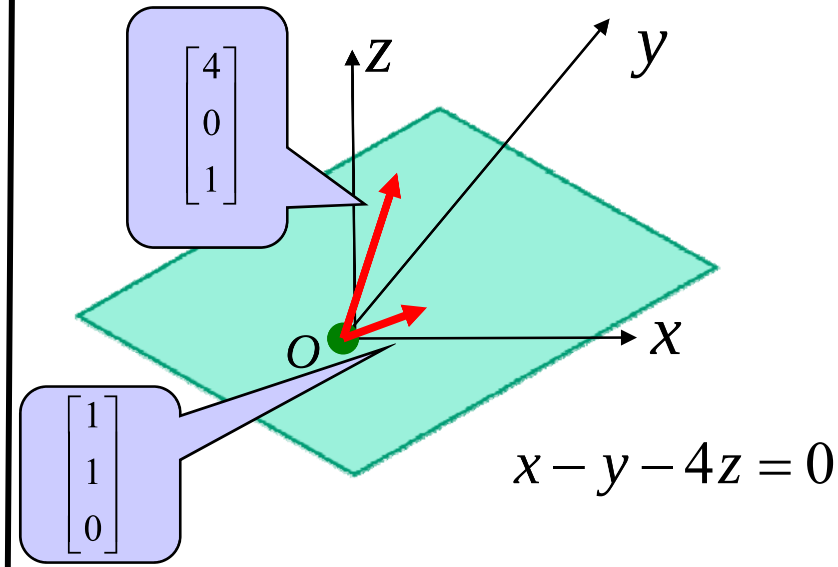
と表せる。
よって、任意定数 k_1, k_2 を用いて、
次のように解ける。

$$\begin{cases} x = k_1 + 4k_2 \\ y = k_1 \\ z = k_2 \end{cases}$$

また、解は次のようにも表せる。

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

この解は、平面の式である。



（例題１終）

例題2

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = 2 \\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & -2x_4 & = 3 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 2 \\ -2x_1 & -4x_2 & +4x_3 & -6x_4 & = -4 \end{cases}$$

解）

拡大係数行列を階段行列化する。

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -6 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)-2\times(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -6 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(3)+1\times(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & 4 & -6 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{(4)+2\times(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}\times(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)+8\times(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(1)-3\times(3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)+2\times(2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

この階段行列化より、係数行列と拡大係数行列の階数が等しいことがわかり解が存在することがわかる。
また、次のような同値な連立方程式が得られる。

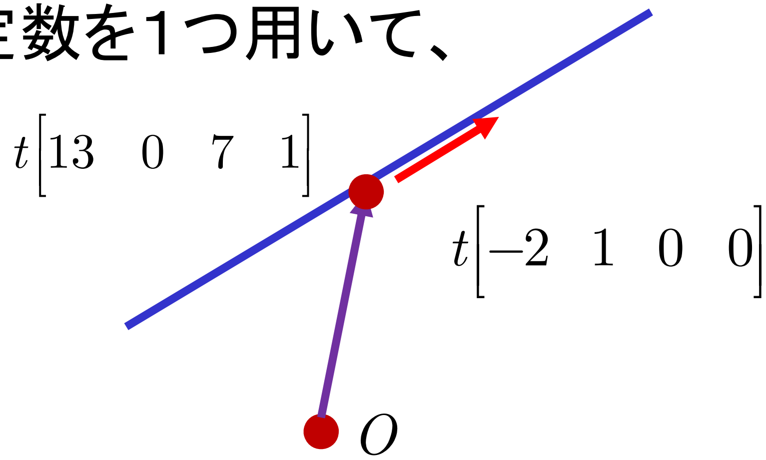
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 13 \\ x_3 = 7 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

よって、自由度が1であるので、任意定数を1つ用いて、

$$x_2 = k$$

と表すことができる。
よって、

$$\begin{cases} x_1 = 13 - 2k \\ x_2 = k \\ x_3 = 7 \\ x_4 = 1 \end{cases} \qquad \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



（例題2終）

練習　次の連立方程式を解け。

（1）

$$\begin{cases} 2x & -6y & = 1 \\ -x & +3y & = 2 \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 & +x_3 & +x_4 & +2x_5 & = 3 \\ 3x_1 & -9x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +3x_5 & = 9 \\ 2x_1 & -6x_2 & +x_3 & +2x_4 & +4x_5 & = 8 \end{cases}$$

同次連立一次方程式

定義(同次連立一次方程式)

定数項ベクトルが零ベクトルであるような
連立一次方程式、すなわち

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を同次連立一次方程式という。

実は，一般の連立一次方程式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

は、対応する同次連立一次方程式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を利用して解くことができる。

同次連立一次方程式の自明な解

定義(自明な解)

同次連立一次方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

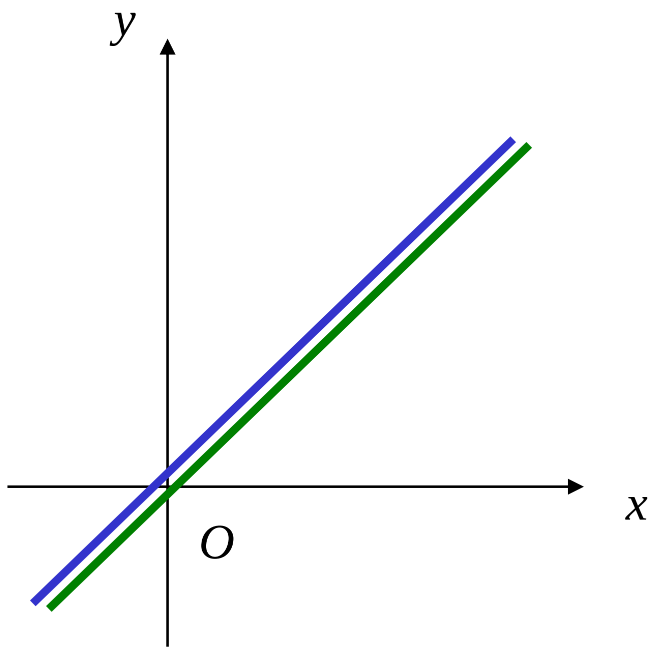
では、零ベクトル $\boldsymbol{0}$ を必ず解に持つ。
この解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 、即ち

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

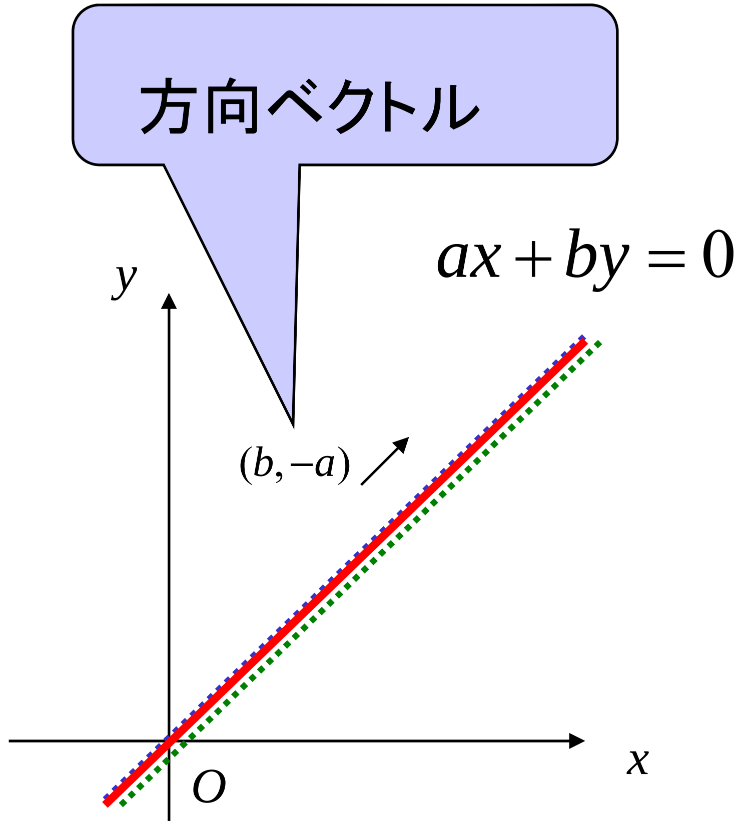
を自明な解という。

自由度のある同次方程式の解1

$$\begin{cases} ax+by &= 0 \\ 2ax+2by &= 0 \end{cases}$$



解く



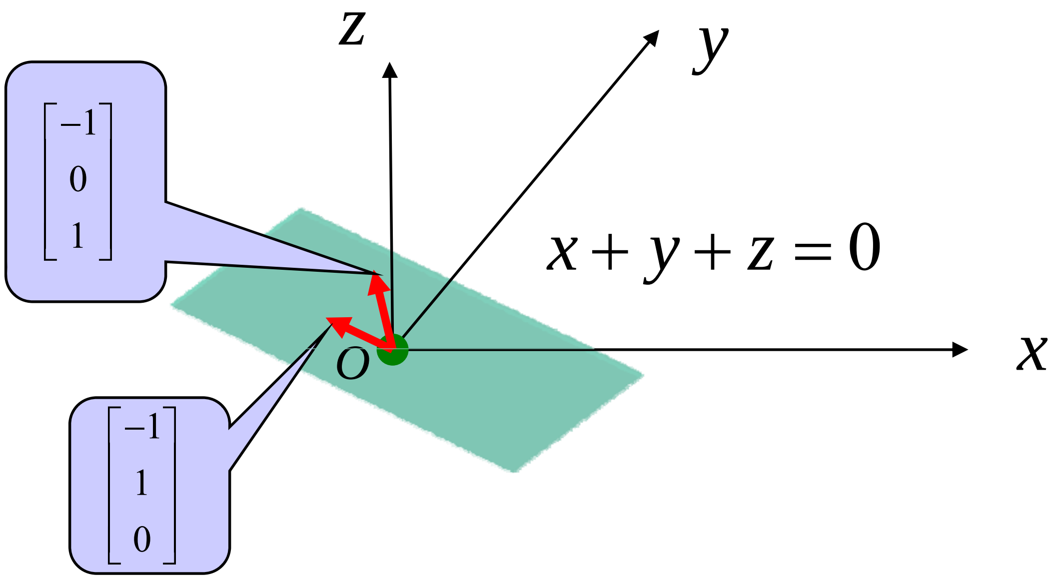
解　$\{(x,y) \mid ax+by=0\}$

k を任意のスカラーとして、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kb \\ -ka \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$$ と表せる。

自由度のある同次方程式の解2

$$\begin{cases} x+y+z & =0 \\ 2x+2y+2z & =0 \end{cases}$$



$k_1, k_2 \in \boldsymbol{R}$ を任意のスカラーとして、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 - k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ と表せる。

自明な解しかもたない条件

性質：（同次方程式と自明な解）

係数行列 $\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列とし、
未知数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $n \times 1$ の列ベクトルとする。

同次連立方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 自明な解しか持たないための必要十分条件は、係数行列の階数が n であることである。すなわち、

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解が、$\{\boldsymbol{0}\}$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = n$$

自明な解と正則行列

性質:(同次連立方程式と正則行列)

$\boldsymbol{A}$ を n 次の正方行列とし、$\boldsymbol{x}$ を n 次元ベクトルとする。
このとき、同次連立一次方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が自明な解しか持たないための必要十分条件は、
$\boldsymbol{A}$ が正則行列であることである。

証明

$n = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ が必要十分条件であるが、
これは $\boldsymbol{A}$ が正則行列であることも意味している。

QED

練習

次の同次連立一次方程式が、自明な解以外を持つかどうかを判定せよ。

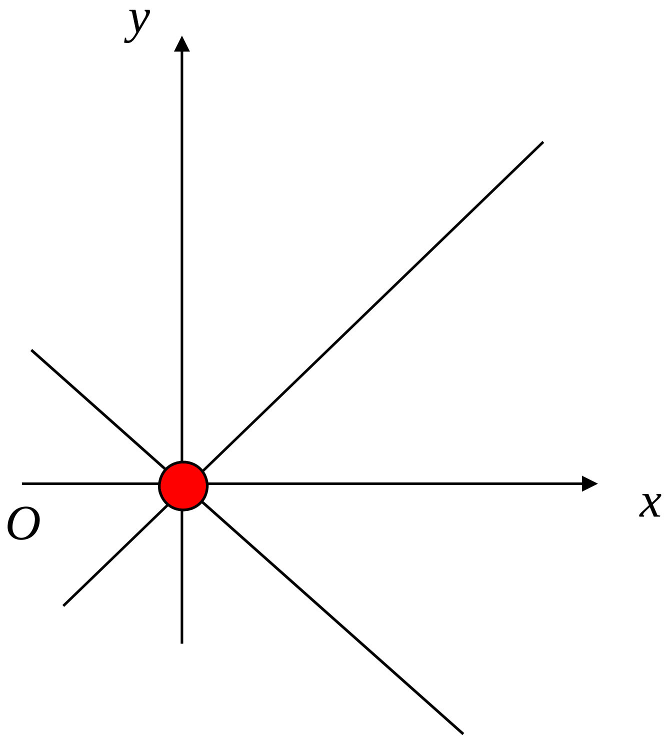
（1）
$$\begin{cases} 6x & +4y & = 0 \\ 9x & +6y & = 0 \end{cases}$$

（2）
$$\begin{cases} x & +2y & -2z & = 0 \\ 2x & -y & +3z & = 0 \\ -x & -3y & -z & = 0 \\ x & 4y & +3z & = 0 \end{cases}$$

（3）
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

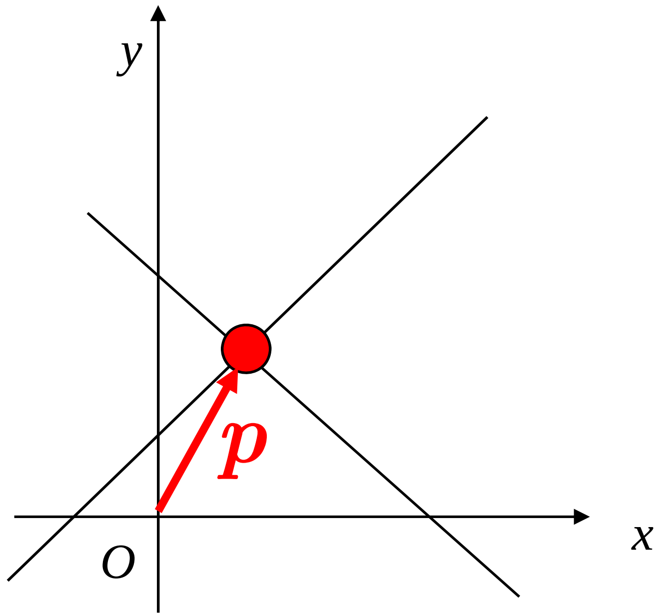
非同次連立一次方程式の解1

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$$



自明な解

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$



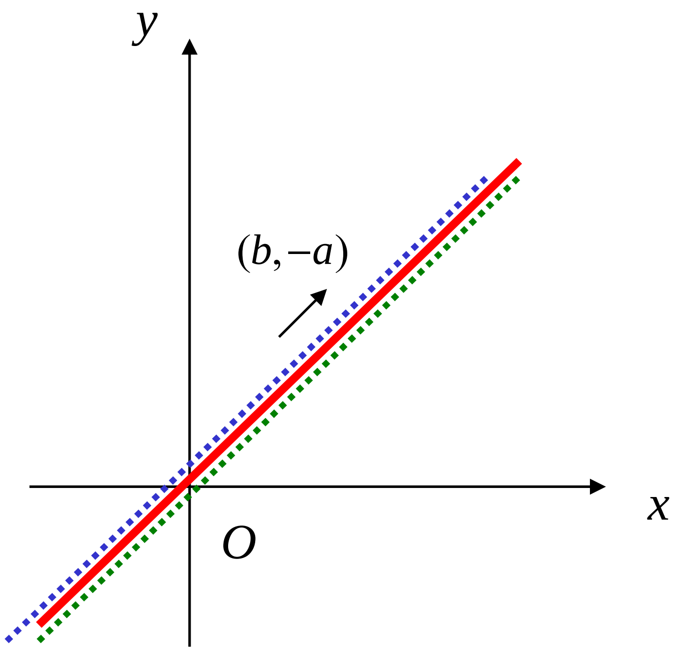
$$\boldsymbol{Ap} = \boldsymbol{b}$$

非同次連立一次方程式の解2

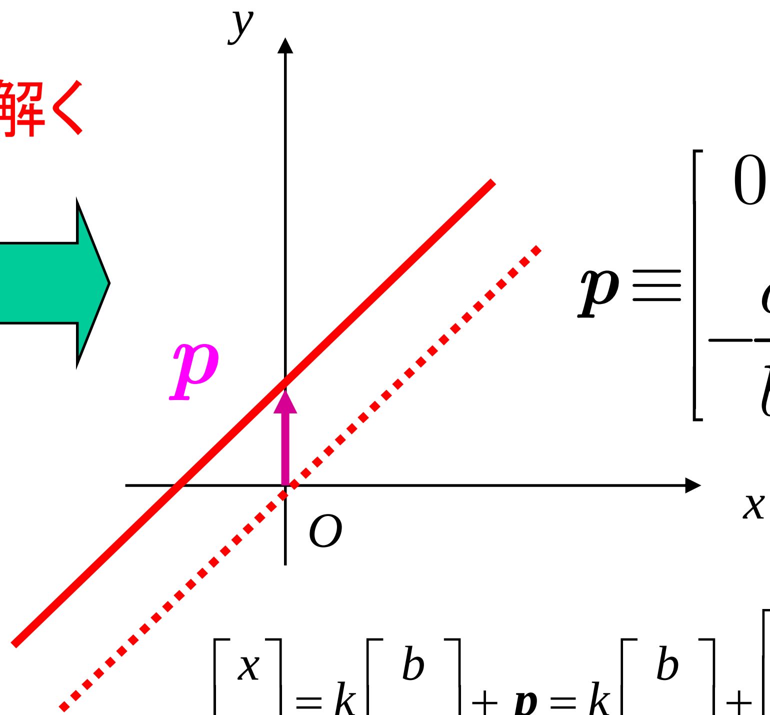
$$\begin{cases} ax+by & =0 \\ 2ax+2by & =0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+by & =c \\ 2ax+2by & =2c \end{cases}$$

解く



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$$

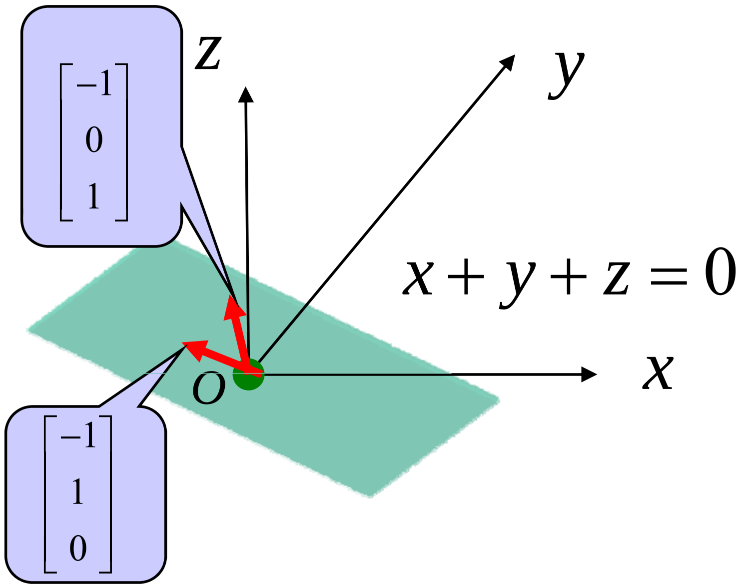


$$\boldsymbol{p} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{c}{b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} + \boldsymbol{p} = k\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{c}{b} \end{bmatrix}$$

自由度のある同次方程式の解3

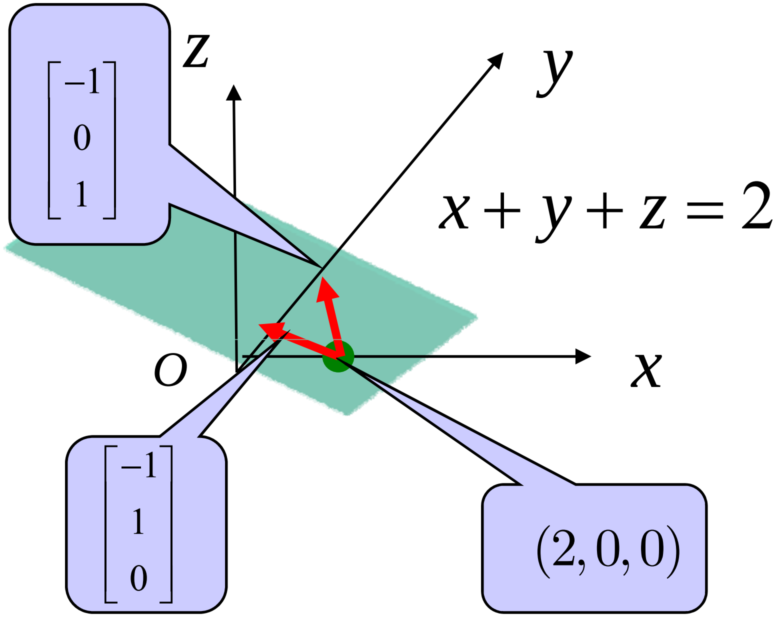
$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2x+2y+2z &= 0 \end{cases}$$



$k_1, k_2 \in \boldsymbol{R}$を任意のスカラーとして、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 - k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ と表せる。

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+2y+2z &= 4 \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 - k_2 + 2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

練習

次の同じ係数を持つ同次方程式と非同次方程式を解け。

（1）

$$\begin{cases} x & -y & +z & =0 \\ 2x & -3y & +z & =0 \\ -x & +4y & +2z & =0 \end{cases}$$

（2）

$$\begin{cases} x & -y & +z & =3 \\ 2x & -3y & +z & =3 \\ -x & +4y & +2z & =6 \end{cases}$$