

# 0章 数学基础

大学では、高校より厳密に議論を行う。そのために、議論の対象を明確にする必要がある。

## 集合

### (定義) 集合

物の集まりである集合  $X$  に対して、 $X$  を構成している物を  $X$  の要素または元という。

集合については、  
3セメスタ開講の「離散数学」で詳しく扱う。

# 集合の表現

1. 要素を明示する表現。  
(外延的表現)

中括弧で、囲う。

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

慣用的に、  
英大文字を用いる。

カンマで区切る

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

自然数の集合

類推が容易なとき、  
…で表す。

2. (必要十分)条件での表現。  
(内包的表現)

$$Y = \{x \mid P(x)\}$$

代表元、  
慣用的に英小文字

真偽が判定できる文(命題)、  
すなわち必要十分条件

$$K = \{n \mid n \geq 100, n \text{ は偶数}\}$$

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \text{ は整数, } q \neq 0 \right\}$$

# 空集合

## (定義) 空集合

要素が一つも無いようなものも集合と考え、  
それを**空集合**といい、  
 $\phi$  あるいは  $\{\}$   
と表す。

$$\phi = \{\}$$

要素が一つも無いので、  
括弧だけを記述する。

## 慣用的な集合の記号

$$\boldsymbol{N} = \{x \mid x \text{は自然数}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\boldsymbol{Z} = \{x \mid x \text{は整数}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\boldsymbol{Q} = \{x \mid x \text{は有理数}\}$$

$$\boldsymbol{R} = \{x \mid x \text{は実数}\}$$

$$\boldsymbol{C} = \{x \mid x \text{は複素数}\}$$

これらの記号は万国共通に用いられる。

# 集合の要素

## (定義) 集合の要素

集合  $X$  に対して、 $x$  が  $X$  の要素であることを、

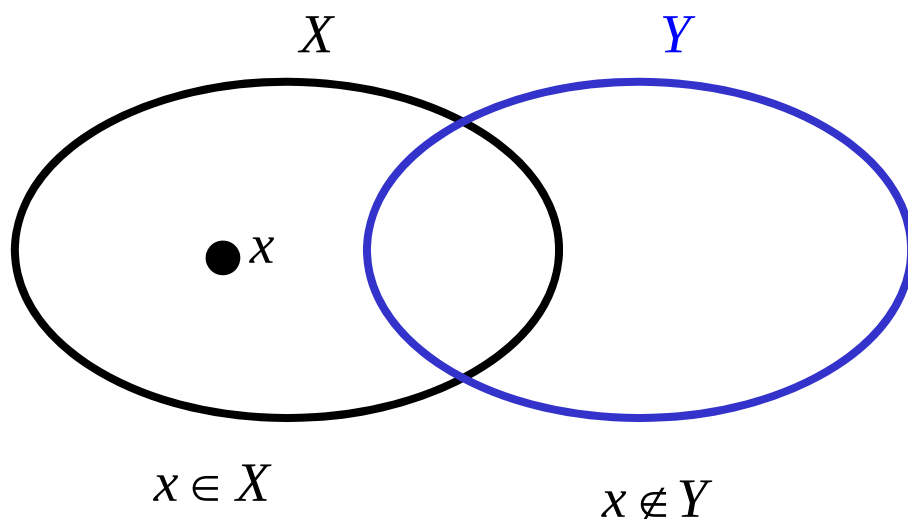
$$x \in X$$

と表し、

集合  $X$  に対して、 $x$  が  $X$  の要素で無いことを、

$$x \notin X$$

と表す。



## 例題

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを示せ。

(1)

$$1 \in A$$

(2)

$$2 \in A$$

(3)

$$3 \notin A$$

(4)

$$4 \notin A$$

(5)

$$5 \in A$$

(6)

$$6 \in A$$

解

$$(1) \bigcirc (2) \times (3) \times$$

$$(4) \bigcirc (5) \bigcirc (6) \times$$



## 練習

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$  とする。

このとき、次の式が正しいかどうかを示せ。

(1)

$$10 \in N$$

(2)

$$-1 \in N$$

(3)

$$132124 \notin N$$

(4)

$$3.4 \notin N$$

(5)

$$10 \times 4 + 3 \in N$$

(6)

$$10 \div 4 + 3 \in N$$

# 部分集合

## (定義) 部分集合

2つの集合  $X, Y$  について、

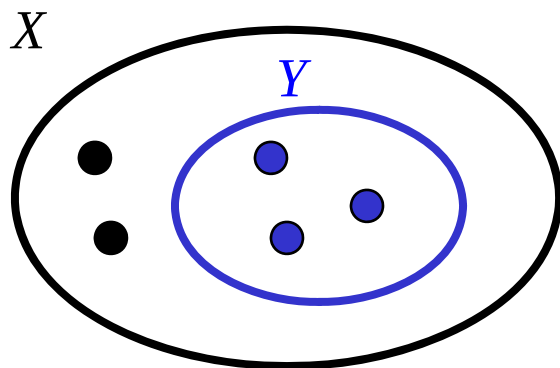
$$y \in Y \Rightarrow y \in X$$

が成り立つとき、

$Y$  は  $X$  の部分集合であるといい、

$$Y \subset X \text{ または } Y \subseteq X$$

と表す。



$$Y \subseteq X$$

$\Rightarrow$

(ならば)とよむ。  
次の論理に従う。

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| $F$ | $F$ | $T$               |
| $F$ | $T$ | $T$               |
| $T$ | $F$ | $F$               |
| $T$ | $T$ | $T$               |

$F$ : 偽

$T$ : 真

## 例題

次の集合において、  
部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{3, 5\}$$

$$D = \{2, 3, 5, 7\}$$

解

$$A \subseteq A, \quad B \subseteq A, \quad C \subseteq A$$

$$B \subseteq B, \quad C \subseteq B$$

$$C \subseteq C$$

$$C \subseteq D, \quad D \subseteq D$$

## 練習

次の集合において、  
部分集合の関係にあるものをすべて示せ。

$$N$$

$$A = \{x \mid x \text{ は } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ の解}\}$$

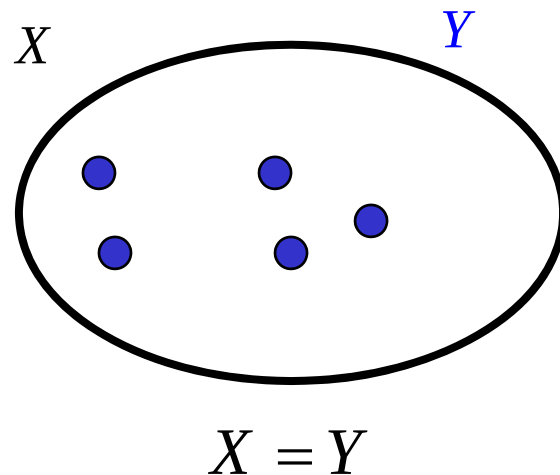
$$B = \{x \mid x \text{ は素数}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ は奇数}\}$$

# 集合の相等

## (定義) 集合の相等

2つの集合  $X, Y$  について、  
 $Y \subseteq X$  かつ  $X \subseteq Y$   
が成り立つとき、  
 $X$  と  $Y$  は「等しい」といい、  
 $X = Y$   
と表す。



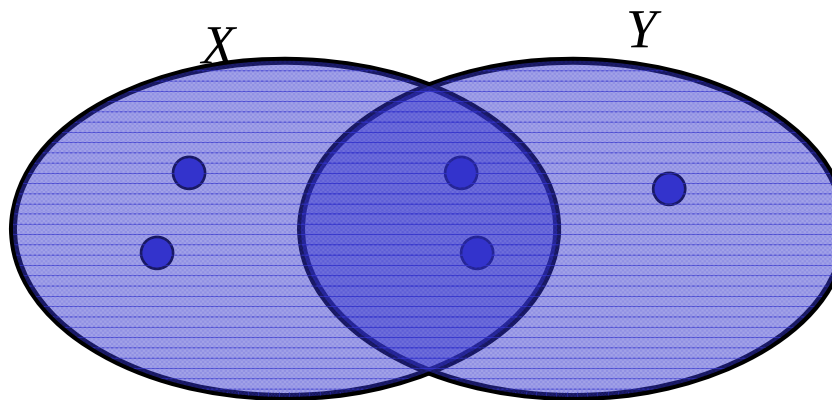
# 和集合

## (定義)和集合

2つの集合  $X, Y$  について、  
 $X$  または  $Y$  の要素全体からなる集合を  
 $X$  と  $Y$  の和集合といい、  
 $X \cup Y$   
と表す。すなわち、

$$X \cup Y \equiv \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\}$$

左辺を右辺で  
定義している。



$X \cup Y$

# 共通部分

## (定義) 共通部分

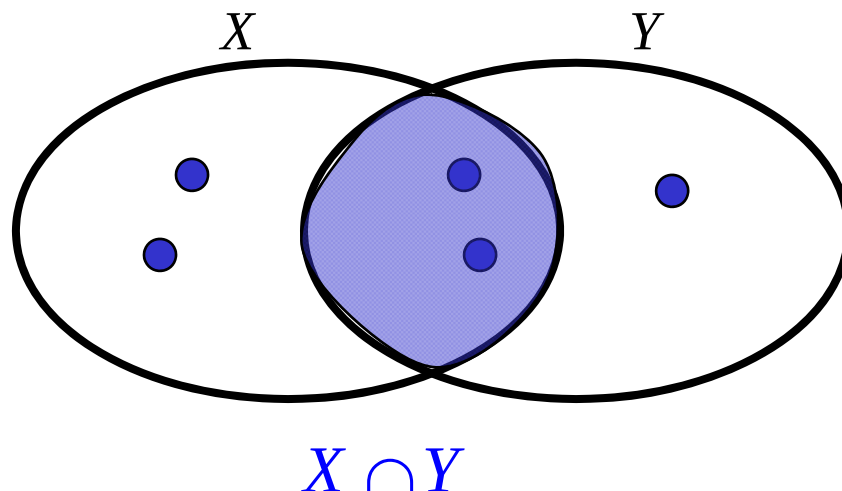
2つの集合  $X, Y$  について、

$X$  と  $Y$  のどちらにも含まれる要素全体からなる集合を

$X$  と  $Y$  の **共通部分 (積集合)** といい、

$X \cap Y$   
と表す。すなわち、

$$X \cap Y \equiv \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \in Y\}$$



## 例題

$$\begin{array}{ll} A = \{1, 2, 3, 4, 5\} & B = \{1, 3, 5\} \\ C = \{3, 5\} & D = \{2, 3, 5, 7\} \end{array}$$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

$$(1) A \cup D \quad (2) A \cap B \quad (3) B \cup D \quad (4) A \cap B \cap C$$

## 解

$$(1) A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

$$(2) A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

$$(3) B \cup D = \{1, 2, 3, 5, 7\}$$

$$(4) A \cap B \cap C = \{3, 5\}$$



## 練習

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{3, 6, 9\}$$

$$D = \{5, 7, 8, 9\}$$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

(1)  $A \cup B$

(2)  $A \cap B$

(3)  $B \cup D$

(4)  $A \cap D$

(5)  $A \cup B \cup C$

(6)  $B \cup C \cup D$

# 直積集合

## (定義) 直積

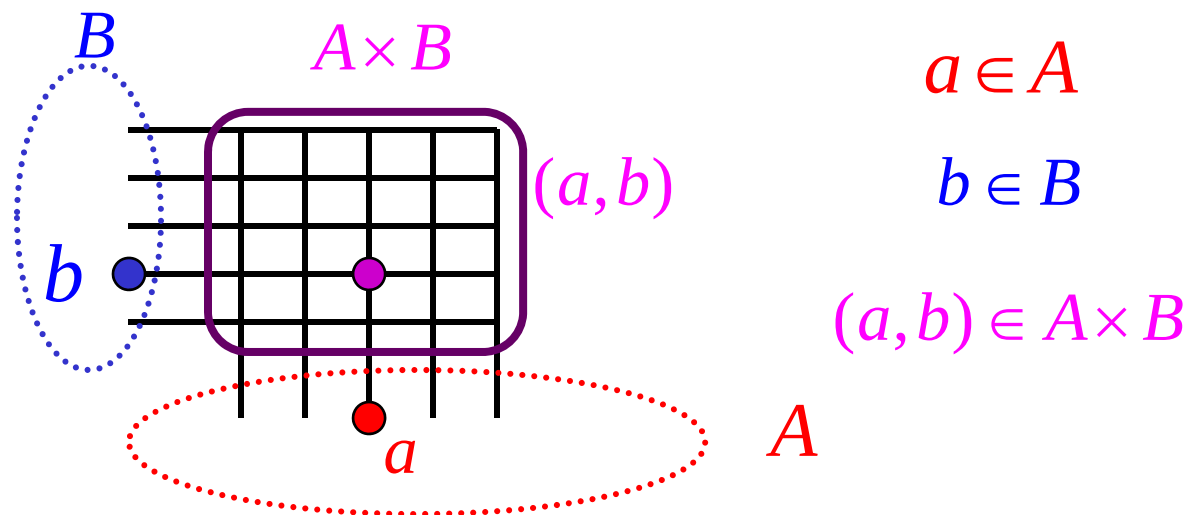
$n$  個の集合  $X_1, X_2, \dots, X_n$  に対して、  
次の集合

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i (i=1, 2, \dots, n)\}$$

を  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の **直積 (直積集合)** といい、

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

と表す。



## 例題

$$A = \{3, 4, 5\} \quad B = \{2, 3\}$$

とする。このとき、 $A \times B$  と  $B \times A$  を求めよ。

解

$$A \times B = \{(3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3)\}$$

$$B \times A = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

## 練習

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{3, 6\} \quad C = \{k, l\}$$

とする。このとき、以下の集合を求めよ。

(1)  $A \times B$

(2)  $B \times A$

(3)  $B \times C$

(4)  $A \times A$

(5)  $A \times B \times C$

(6)  $A \times C \times B$

# 写像

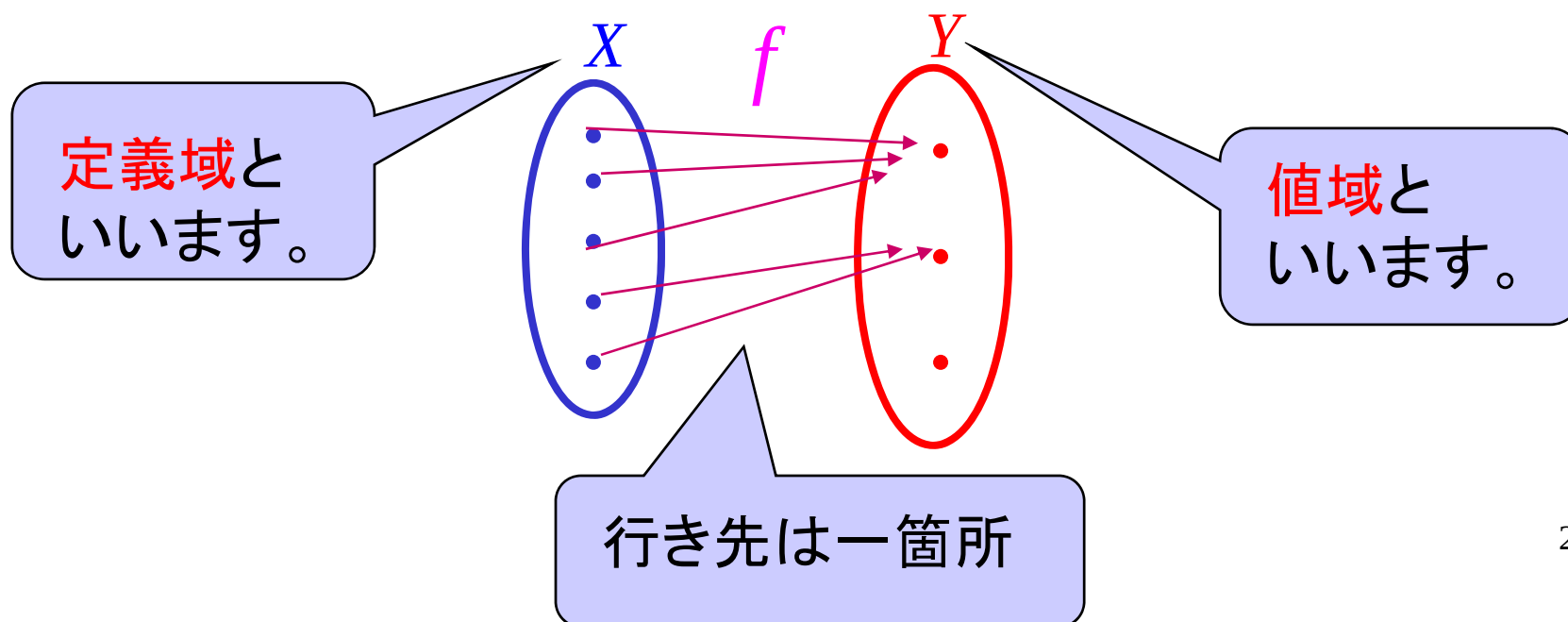
## (定義) 写像

2つの集合  $X, Y$  について、 $X$  の各要素事に  $Y$  のある要素(1つ)が対応づけられているとき、この対応づけのことを  $X$  から  $Y$  への写像(関数)という。

$f$  が  $X$  から  $Y$  への写像を

$$f : X \rightarrow Y$$

と表す。

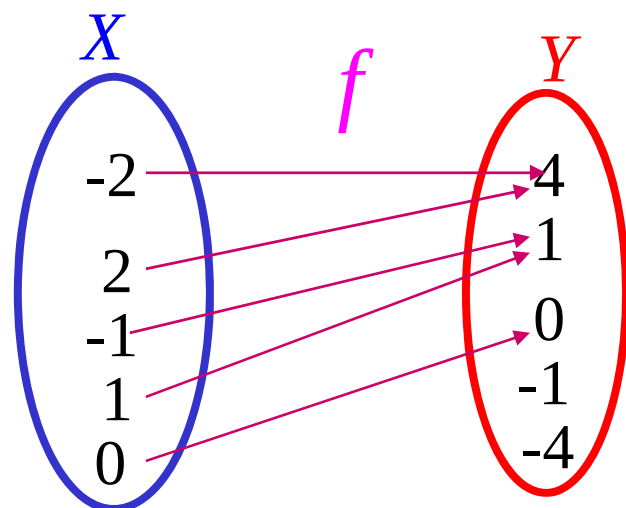


## (定義) 要素の像

2つの集合  $X, Y$  に対する写像を  $f : X \rightarrow Y$  とする。このとき、 $X$  の要素  $x$  ( $x \in X$ ) に対応する  $Y$  の要素を

$f(x)$

と表す。(このときは、もちろん  $f(x) \in Y$  である。)



$$f(-1) = 1$$

対応関係を式で定めることもあるが、式でなくても写像は定義できる。

$$x \in X \text{ に対して、 } f(x) = x^2 \in Y$$

代表元といいます。

# 像

## (定義) 定義域の像

写像  $f: X \rightarrow Y$  の定義域  $X$  の部分集合  $A (A \subseteq X)$  に対して、  
値域  $Y$  の部分集合

$$\{f(x) \mid x \in A\}$$

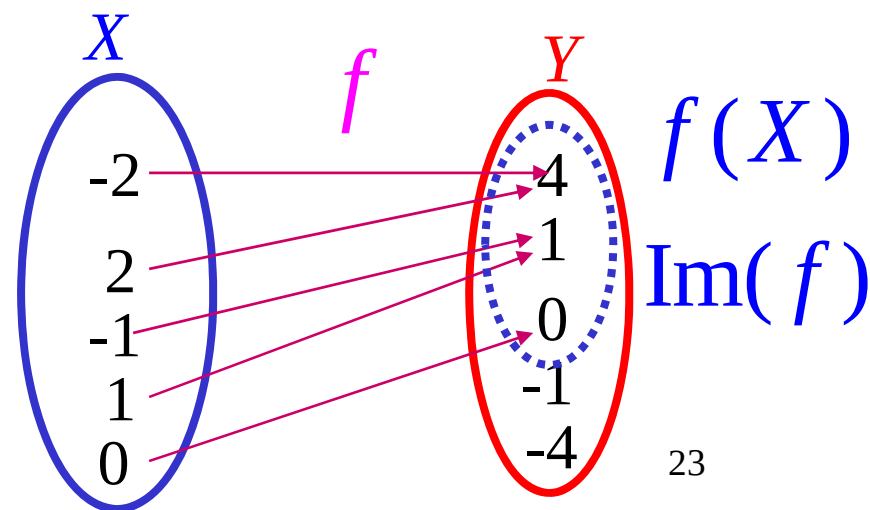
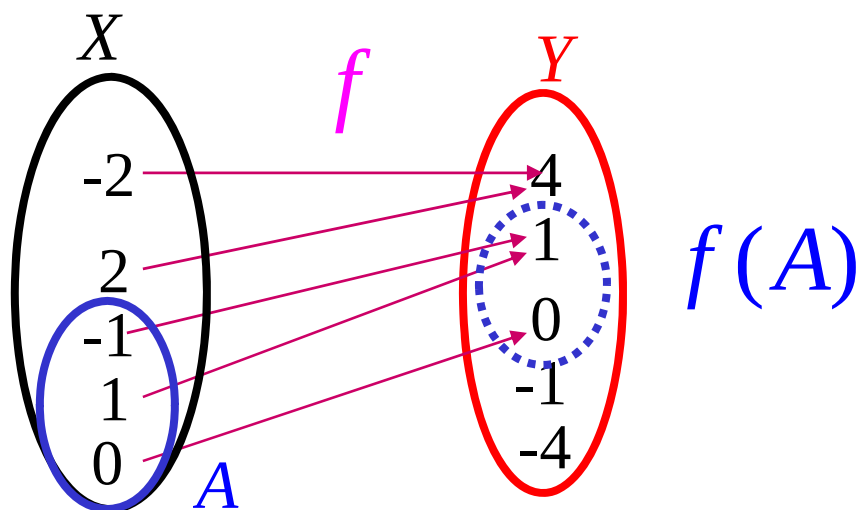
を写像  $f$  による  $A$  の像 (Image) といい、

$$f(A)$$

と表す。また、 $A = X$  のとき、 $f(X)$  を

$$\text{Im}(f)$$

とも表す。



# 写像の相等

## (定義) 写像の相等

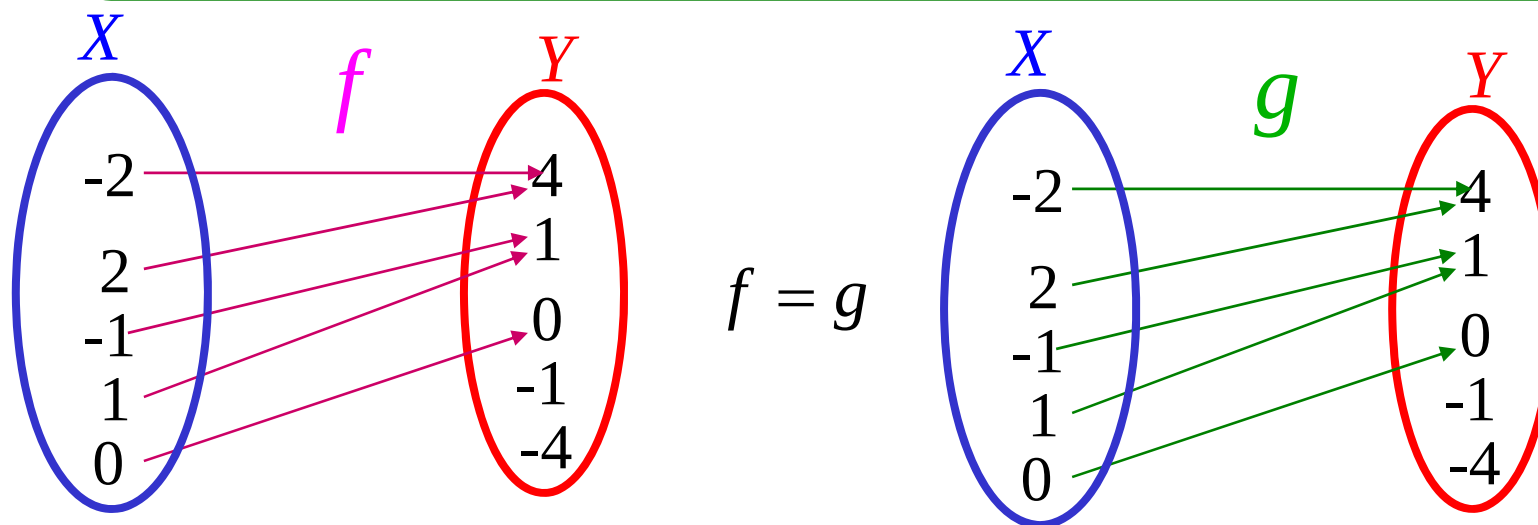
集合  $X$  から  $Y$  への2つの写像  $f, g$  は、  
( $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$ )

任意の  $x \in X$  に対して、  $f(x) = g(x)$

が成り立つときに「等しい」といい、

$$f = g$$

と表す。





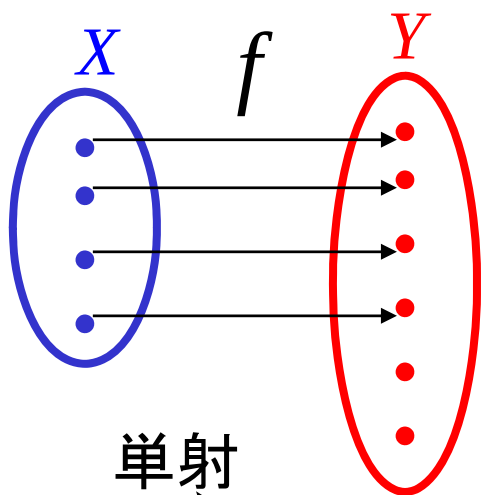
# 単射

## (定義) 単射

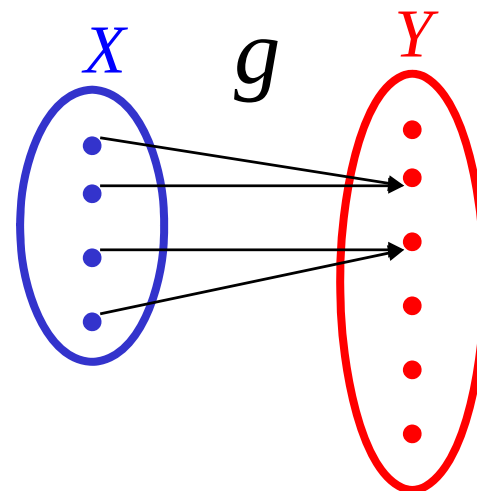
集合  $X$  から  $Y$  への写像  $f: X \rightarrow Y$  が、

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

を満たすとき、 $f$  は**単射(写像)**であるという。



対応元が1つ



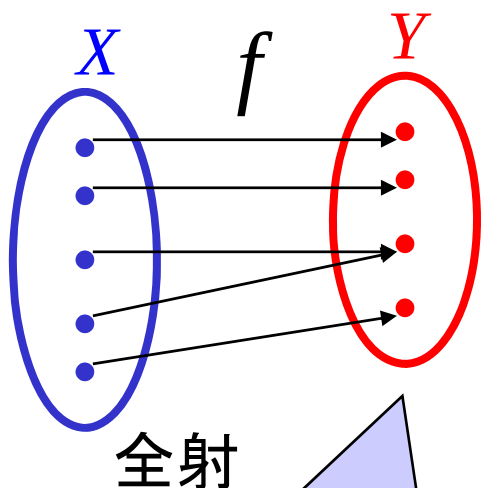
# 全射

## (定義) 全射

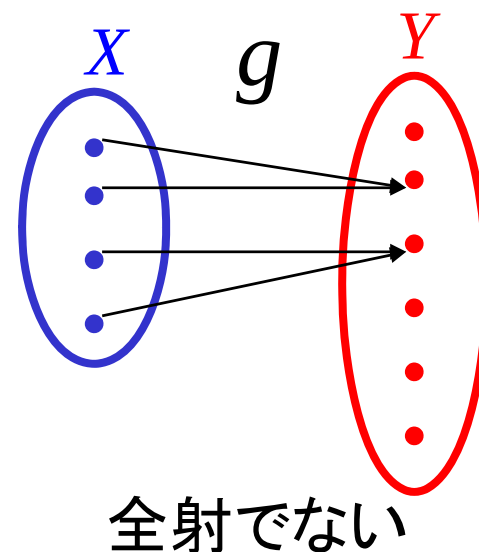
集合  $X$  から  $Y$  への写像  $f: X \rightarrow Y$  が、

$$f(X) = Y$$

を満たすとき、 $f$  は**全射(写像)**であるという。  
または、**上への写像**ともいう。



値域に“余り”がない。



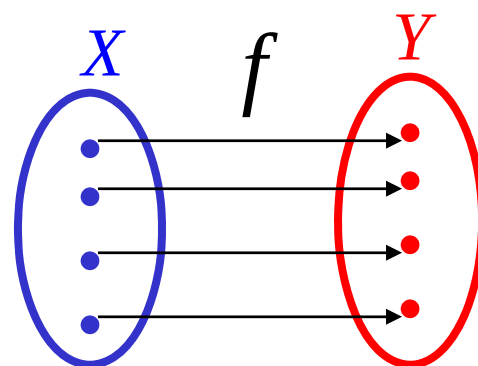
# 全単射

## (定義) 全単射

単射かつ全射であるような写像を、

**全単射(写像)**という。

また、全単射は、**1対1上への写像**ともいう。



全単射

値域に“余り”がなく、  
値域の各元がちょうどひとつの  
定義域の元に対応している。

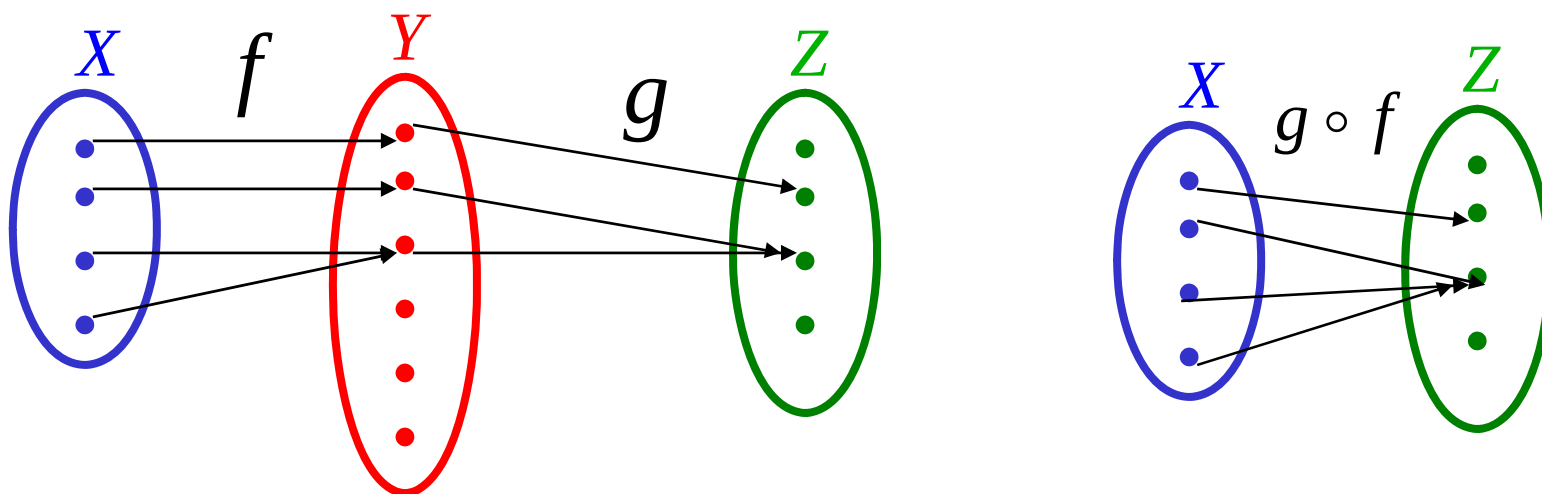
# 合成写像 (定義) 合成写像

集合  $X, Y, Z$  に対して、2つの写像

$$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$$

があるとき、 $X$  の各要素  $x$  を  $Z$  の要素  $g(f(x))$  に対応させることにより  $X$  から  $Z$  への写像ができる。これを、 $f, g$  の合成写像といい、

$g \circ f$   
と表す。すなわち、  
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$   
である。



# 逆像

## (定義) 逆像

写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して、 $Y$  の部分集合  $B$  をとると、

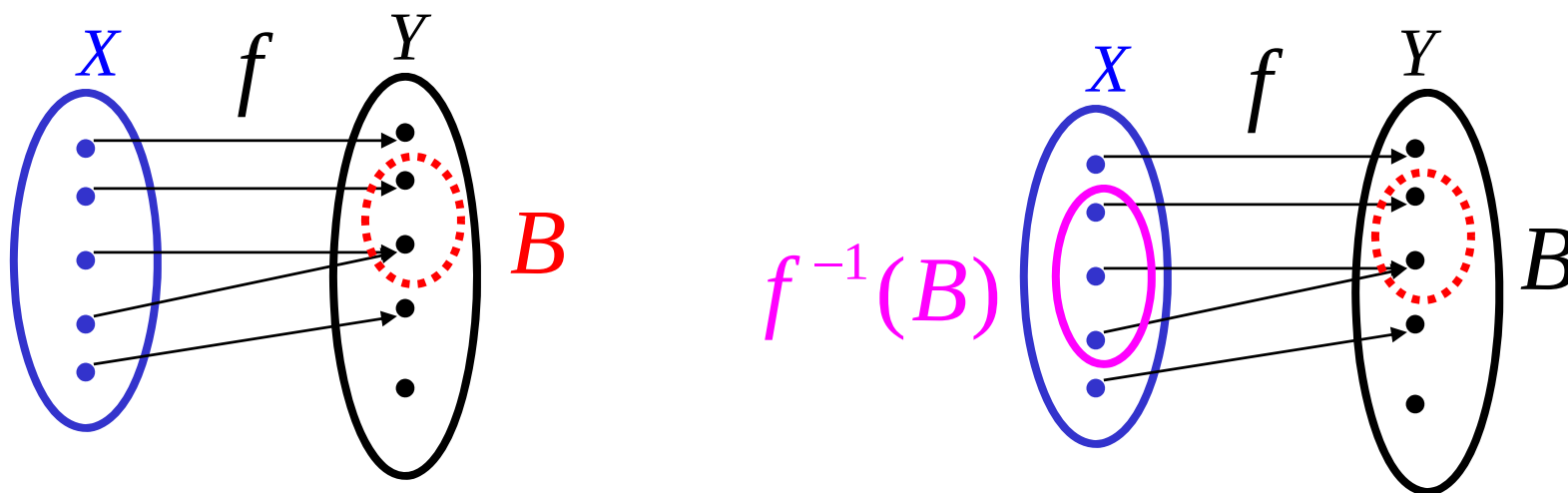
$$\{x \mid f(x) \in B\}$$

は  $X$  の部分集合である。これを、 $f$  による  $B$  の逆像といい

$$f^{-1}(B)$$

と表す。すなわち、

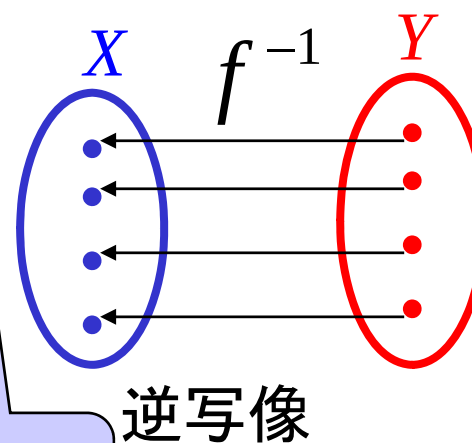
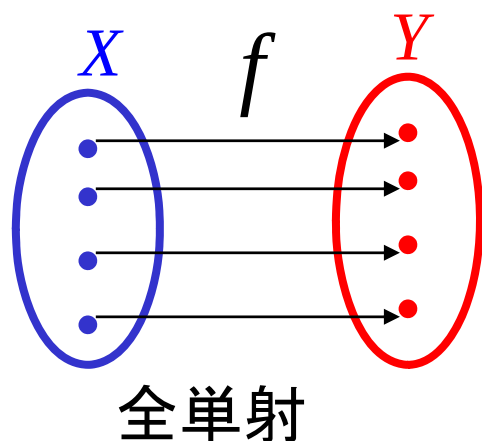
$$f^{-1}(B) \equiv \{x \mid f(x) \in B\}$$



# 逆写像

## (定義) 逆写像

写像  $f: X \rightarrow Y$  が全単射ならば、 $Y$  の各要素  $y$  に対して、 $X$  の要素  $f^{-1}(y)$  を対応させる写像を定義できる。これを、 $f$  の逆写像といい、 $f^{-1}$  と表す。



矢印を反対にする。

# 1章 行列と行列式

# 行列の定義

## (定義) 行列

数(実数)を縦横をそろえて並べたもの。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

縦が  $m$  行、横が  $n$  列あるとき、  
 $m \times n$  行列という。



# 行列の型(大きさ)

## (定義) 行列の型

行数  $\times$  列数を行列の型あるいは大きさという。

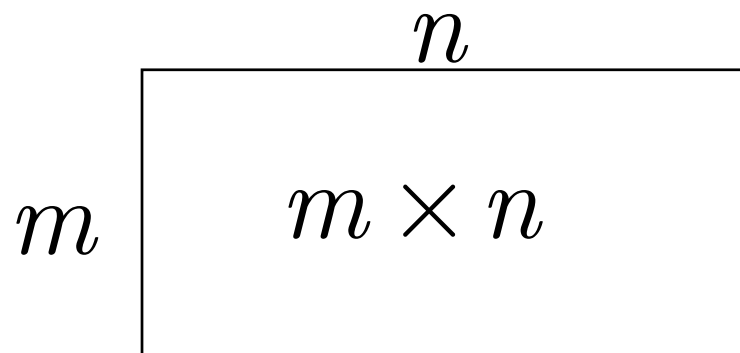
$m$  行  $n$  列の行列を、

$m \times n$  行列

あるいは

$(m, n)$  型行列

という。



# 例

2行3列の行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(3, 3) 型行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$4 \times 3$  行列

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

## 練習

次の行列の型を答えよ。

$$(1) \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3) [4]$$

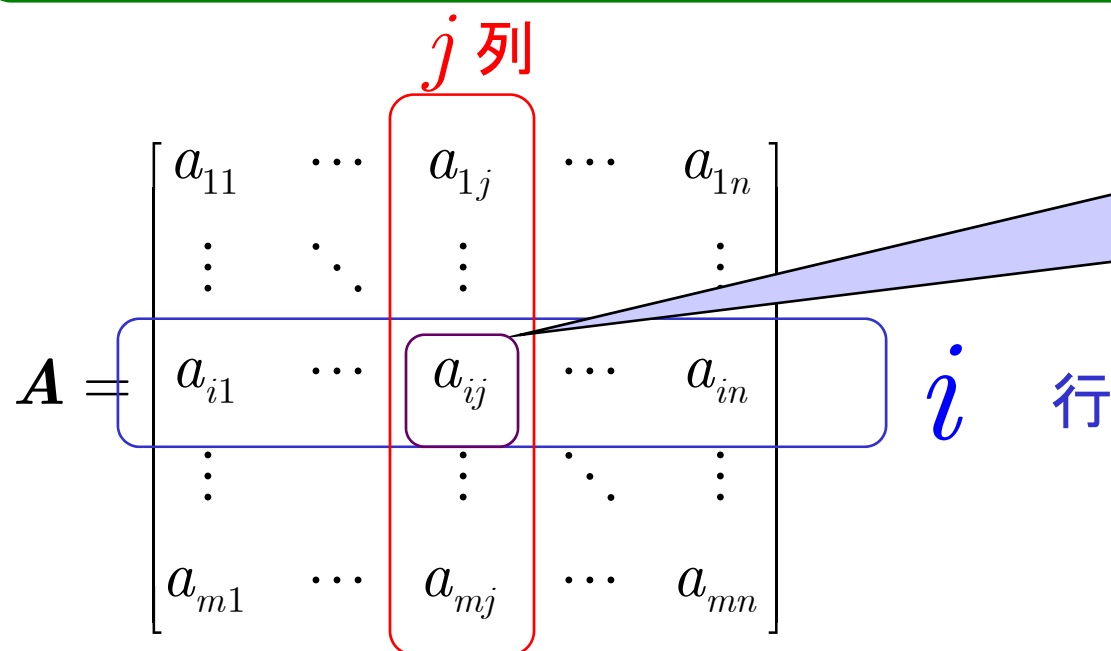
$$(4) \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ -2 & 11 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

# 行列の成分

## (定義) 行列の成分

$i$  行  $j$  列の要素  $a_{ij}$  を  $(i, j)$  要素 ( $(i, j)$  成分) という。


$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$i$  行

$j$  列

添字は、  
行が先で、  
列が後。

行列を  $(i, j)$  成分だけに注目して、

$$A = [a_{ij}]$$

のように表すこともある。

# ベクトル

## (定義)ベクトル

大きさが、 $1 \times n$  あるいは、 $m \times 1$  の行列をベクトルという。

$1 \times n$  のベクトルを行ベクトル (row vector) という。

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

$m \times 1$  のベクトルを列ベクトル (column vector) という。

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

# 行列と行ベクトル

$m \times n$  行列は、 $m$  個の  $n$  次元行ベクトルで表現可能。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix}$$

ただし、 $1 \leq i \leq m$  に対して、 $\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$

例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \end{bmatrix} \text{ とする。}$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = (3, 2, 5)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (4, 1, -1)$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (2, 1, 0)$$

$$\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = (7, -3, -2)$$

# 行列と列ベクトル

$m \times n$  行列は、 $n$  個の  $m$  次元列ベクトルで表現可能。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{array} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$$

ただし、 $1 \leq j \leq n$  に対して、 $\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$



例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3] \quad \text{とする。}$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

例

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

このとき、

$$a_{11} = 3$$

$$a_{23} = -1$$

$$a_{41} = 7$$

例

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$  を  $3 \times 4$  行列とし、 $a_{ij} = i + j$  とする。

このとき、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

## 練習

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ -2 & 11 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 1 & -7 \end{bmatrix} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

次に答えよ。

(1) (1, 1)成分、(2, 3)成分、(5, 2)成分

(2) 値が11である成分、値が9である成分、  
値が3である成分の集合

(3)  $a_{34}, a_{53}, a_{44}$

(4)  $r_2, r_5$

(5)  $c_3$

## 練習

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_3 = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{r}_4 &= \begin{bmatrix} 9 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{とする。} \end{aligned}$$

このとき、
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_4 \end{bmatrix}$$
を求めよ。

## 練習

$A = [a_{ij}]$  を  $4 \times 3$  行列とし、 $a_{ij} = 10i + j$  とする。

このとき、 $A$  を求めよ。

# 行列の相等

## (定義) 行列の相等

2つの行列  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$  が次の (1)、(2) を満たすとき、  
「等しい」といい、

$$A = B$$

と書く。

(1)  $A$  と  $B$  の大きさが等しい。

(2) すべての  $(i, j)$  成分について  $a_{ij} = b_{ij}$  である。

例

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$



## 練習

次の行列の集合から、等しい行列の組をすべて求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

# 行列の演算

## 行列の加法

### (定義) 行列の加法

同じ型 ( $m \times n$ ) の行列  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$  に対し  
て、その和  $A + B$  を

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき、 $A + B$  も  $m \times n$  の型になることに注意する。

例

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

## 和が計算できない行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq ?$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \neq ?$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq ?$$

# 行列の性質1

## (性質) 行列の和に関する性質

$A, B, C$  を全て同じ型の行列とする。このとき、次が成り立つ。

$$(1) \quad (A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{結合法則})$$

$$(2) \quad A + B = B + A \quad (\text{交換法則})$$

$$(3) \quad A + O = O + A = A \quad (\text{加法単位元})$$

$$(4) \quad A + (-A) = (-A) + A = O \quad (\text{加法逆元})$$

# 零行列

## (定義) 零行列

すべての成分が0である行列を**零行列**といい、

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

で表す。特に、型にも注意する際には、

$$O_{mn}$$

と書いて、 $m \times n$  型の零行列を表す。

例

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 加法逆元

## (定義) 加法逆元

$m \times n$  行列  $A = [a_{ij}]$  に対して、  
 $m \times n$  行列

$$-A = [-a_{ij}]$$

を**加法逆元**という。このとき、

$$A + (-A) = (-A) + A = O_{mn}$$

が成り立つ。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$



# 行列のスカラー倍

## (定義) 行列のスカラー倍

スカラー  $k \in R$  に対して、 $m \times n$  行列  $A = [a_{ij}]$  の  $k$  倍を

$$kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき、 $kA$  の大きさも  $m \times n$  になることに注意する。

例

$$2 \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 12 \\ 2 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 12 & -3 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

## 行列の性質2

### (性質) 行列のスカラー倍に関する性質

$A, B$  を同じ型の行列とし、 $k, l \in \mathbf{R}$  とする。  
このとき、次が成り立つ。

$$(1) \quad (k + l)A = kA + lA \quad (\text{行列のスカラーへの分配法則})$$

$$(2) \quad k(A + B) = kA + kB \quad (\text{スカラーの行列への分配法則})$$

$$(3) \quad (kl)A = k(lA) \quad (\text{結合法則})$$

$$(4) \quad 1A = A \quad (\text{公等法則})$$

$$(5) \quad 0A = O \quad (\text{零倍})$$

## 練習

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、行列演算の法則を用いることにより、次を計算せよ。

$$(1) \quad 2\mathbf{A} + \mathbf{B} - 2(\mathbf{B} + \mathbf{A})$$

$$(2) \quad 5\mathbf{A} + \mathbf{B} - 3(2\mathbf{B} + 2\mathbf{C}) + 6\mathbf{C}$$

$$(3) \quad 3((\mathbf{A} - \mathbf{B}) + (\mathbf{B} - \mathbf{C}) + (\mathbf{C} - \mathbf{A}))$$

# 行列の積

## (定義) 行列の積

$l \times m$  行列  $A = [a_{ij}]$  と  $m \times n$  行列  $B = [b_{ij}]$  に対して、  
その積である  $C = AB = [c_{ij}]$  を

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$
$$(1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n)$$

となる行列とする。

ここで、 $C = AB$  の型は

$$l \times n$$

になる。

# 行列積の覚え方

$$\boxed{l \times m} \times \boxed{m \times n} = \boxed{l \times n}$$

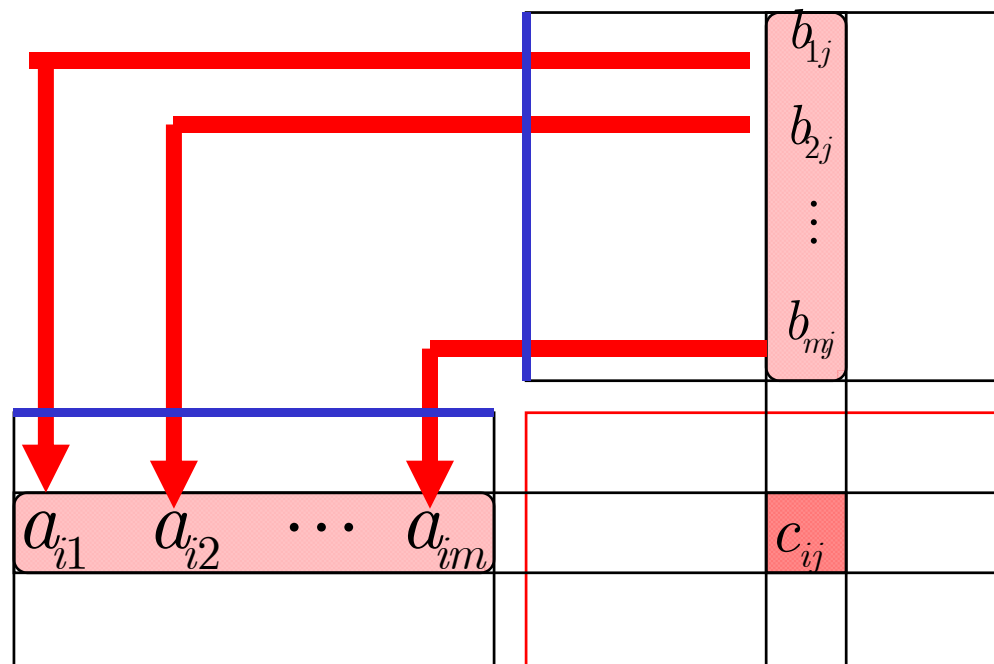
ここが同じでないと乗算できない。

(1)まず、出来上がる行列の型をきめる。

ここが同じでないと乗算できない。

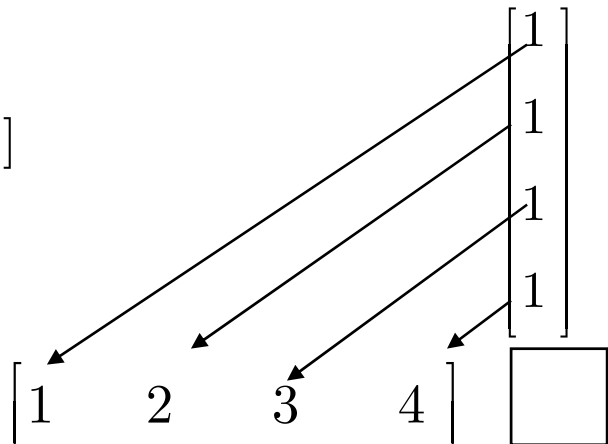
$$\boxed{l \times m} \quad \boxed{m \times n} \quad \boxed{l \times n}$$

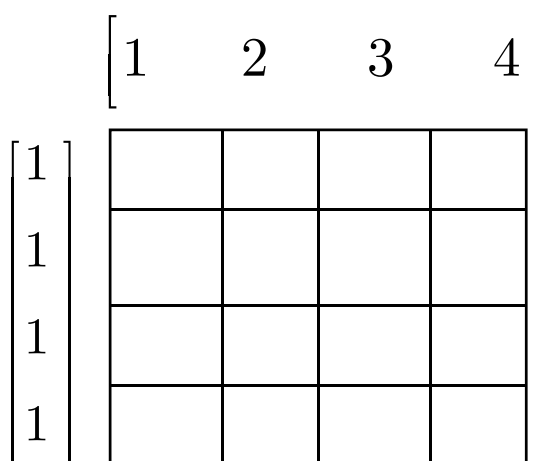
(2) 個々の成分を求める。



例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

$$A B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$


$$B A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$




## 練習

次の行列の中から、積が定義できるものに対して、積を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

# 行列の性質

## (性質) 行列の積に関する性質1

積が定義できる行列に関して、次が成り立つ。

$$(1) \quad (AB)C = A(BC) \quad (\text{結合法則})$$

$$(2) \quad A(B + C) = AB + AC \quad (\text{左分配法則})$$

$$(3) \quad (A + B)C = AC + BC \quad (\text{右分配法則})$$

$$(4) \quad k(AB) = (kA)B = A(kB) \quad (\text{スカラーの移動})$$

このような移動ができるのは、  
スカラーに対してだけであることに、  
注意すること。

## 例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 2,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \quad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$(2) \quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

$$(3) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

$$(4) \quad k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

解) (1)  $(AB)C = A(BC)$

左辺:  $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$\therefore (AB)C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

右辺:  $BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

$$\therefore A(BC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

よって、左辺＝右辺

これより、 $(AB)C = A(BC) = ABC$

と書いても誤解が無い。

$$(2) \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

左辺:  $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

右辺:  $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

よって、左辺=右辺

$$(3) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}$$

左辺:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

右辺:

$$\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

よって、左辺=右辺

$$(4) \ k(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 2,$$

$$k(\mathbf{A}\mathbf{B}) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$k\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$k\mathbf{B} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

よって、成り立つ。

## 練習

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = -1, \quad l = 3,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \quad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$(2) \quad k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$(3) \quad l(\mathbf{BC}) = (l\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{B}(l\mathbf{C})$$



## 練習

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix},$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}$$

$$(2) \boldsymbol{B}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$$

$$(3) (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$$

$$(4) (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$$

# 行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質2

$$AB \neq BA$$

となる行列 $A$ 、行列 $B$ がある。

行列の積では、**交換法則は成り立たない。**

## 例題

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{とする。}$$

$AB \neq BA$  を確かめよ。

解)

$$\text{左辺} = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 24 \\ -3 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\text{右辺} = BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 25 & 5 \\ -3 & 3 & 1 \\ -6 & 12 & -2 \end{bmatrix}$$

よって、左辺  $\neq$  右辺

# 行列の性質

(性質) 行列の積に関する性質3

$AB = O$  でも、

$$A = O \text{ または } B = O$$

とは限らない。すなわち、

$$A \neq O \text{ かつ } B \neq O$$

でも、

$$AB = O$$

となることがある。

## 例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{とする。}$$

$\mathbf{AB} = \mathbf{O}$  を確かめよ。

解)

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

# 転置行列

## (定義) 転置行列

$m \times n$  行列  $A = [a_{ij}]$  に対して、 $n \times m$  行列  $B = [b_{ij}]$  を

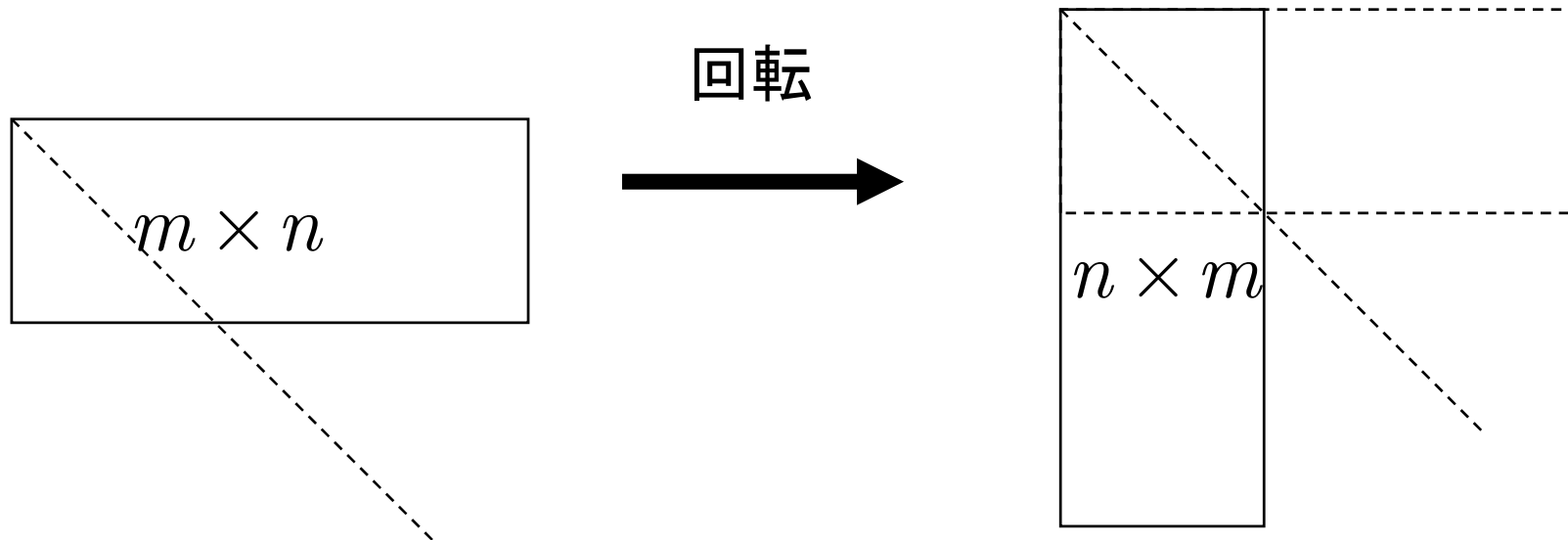
$b_{ij} = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$   
と定める。このとき、 $B$  を  $A$  の転置行列といい、  
 ${}^t A$

と表す。すなわち、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{のとき} \quad {}^t A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

# 転置行列のイメージ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{転置}} {}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$



例

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow {}^t\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$



## 練習

次の行列の転置行列を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

# 転置行列の性質

## (性質) 転置行列の性質

$A, B$  を  $l \times m$  行列とし、 $C$  を  $m \times n$  行列とし、 $k \in R$  とする。このとき、次が成り立つ。

$$(1) \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad (\text{和と転置の交換})$$

$$(2) \quad {}^t(kA) = k({}^tA) \quad (\text{スカラー倍と転置の交換})$$

$$(3) \quad {}^t(AC) = ({}^tC)({}^tA) \quad (\text{積と転置の交換})$$

$$(4) \quad {}^t({}^t(A)) = A \quad (\text{転置の交代性})$$

## 証明

$\mathbf{A} = [a_{ij}], \mathbf{B} = [b_{ij}]$  を  $l \times m$  行列とする。

$$(1) \quad {}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$$

$$\text{左辺} = {}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

$$= {}^t([a_{ij}] + [b_{ij}])$$

$$= {}^t([a_{ij} + b_{ij}])$$

$$= [a_{ji} + b_{ji}]$$

$$\text{右辺} = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$$

$$= {}^t[a_{ij}] + {}^t[b_{ij}]$$

$$= [a_{ji}] + [b_{ji}]$$

$$= [a_{ji} + b_{ji}]$$

よって、左辺＝右辺

$$(2) \quad {}^t(k\mathbf{A}) = k({}^t\mathbf{A})$$

$$\text{左辺} = {}^t(k\mathbf{A})$$

$$= {}^t\left(k[a_{ij}]\right)$$

$$= {}^t([ka_{ij}])$$

$$= [ka_{ji}]$$

$$\text{右辺} = k({}^t\mathbf{A})$$

$$= k({}^t[a_{ij}])$$

$$= k[a_{ji}]$$

$$= [ka_{ji}]$$

よって、左辺＝右辺

$\mathbf{C} = [c_{ij}]$  を  $m \times n$  行列とする。

$$(3) \quad {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C}) = ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$$

$D = [d_{ij}] = \mathbf{A}\mathbf{C}$  とする。すなわち、

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} c_{kj}$$

$$\text{左辺} = {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C})$$

$$= {}^t([d_{ij}])$$

$$= [d_{ji}]$$

$$= \left[ \sum_{k=1}^m a_{jk} c_{ki} \right]$$

$$\text{右辺} = ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$$

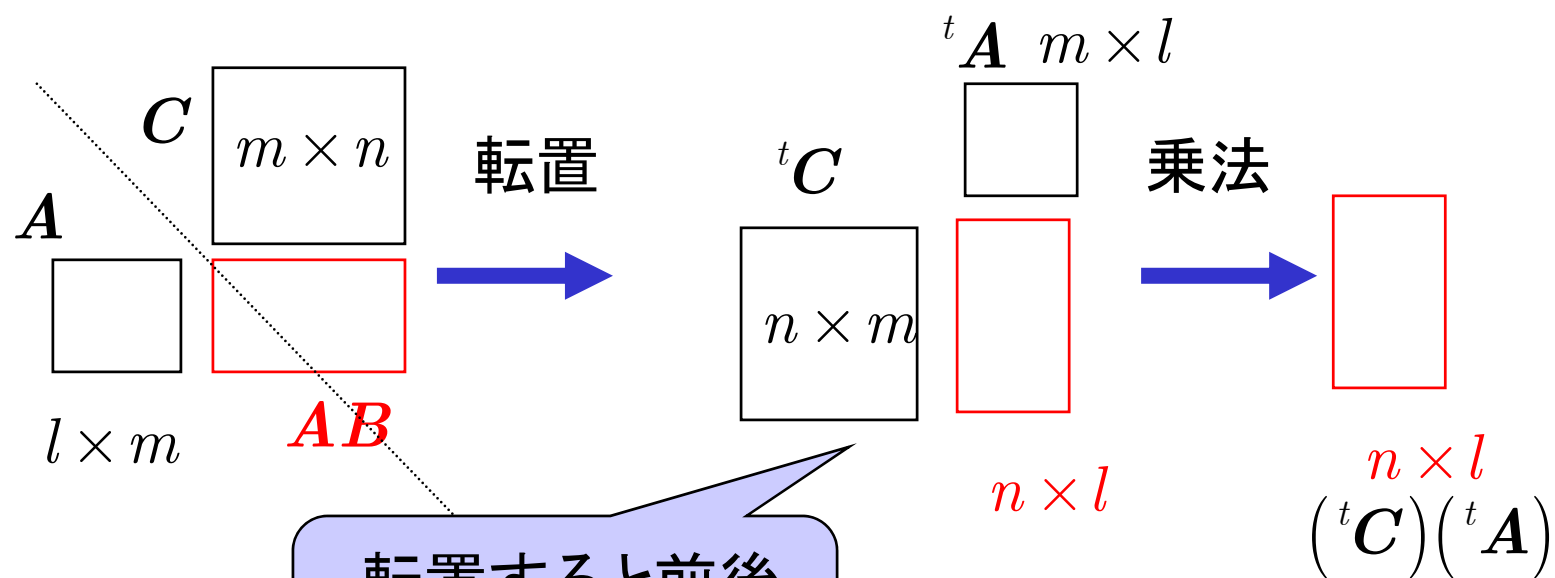
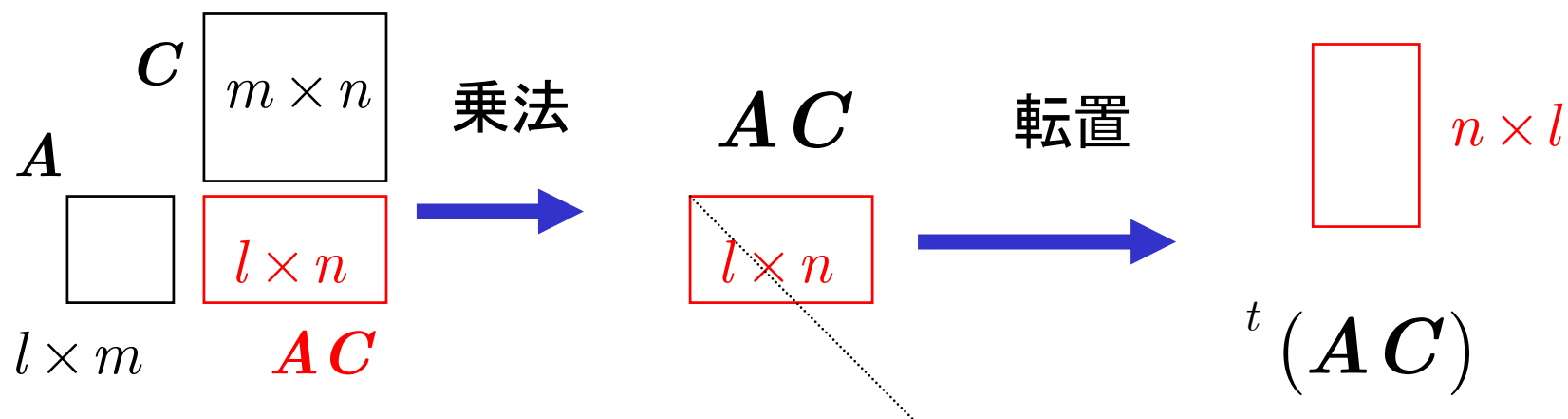
$$= {}^t[c_{kj}] {}^t[a_{ik}]$$

$$= [c_{jk}] [a_{ki}]$$

$$= \left[ \sum_{k=1}^m c_{jk} a_{ki} \right]$$

よって、左辺＝右辺

### (3) のイメージ

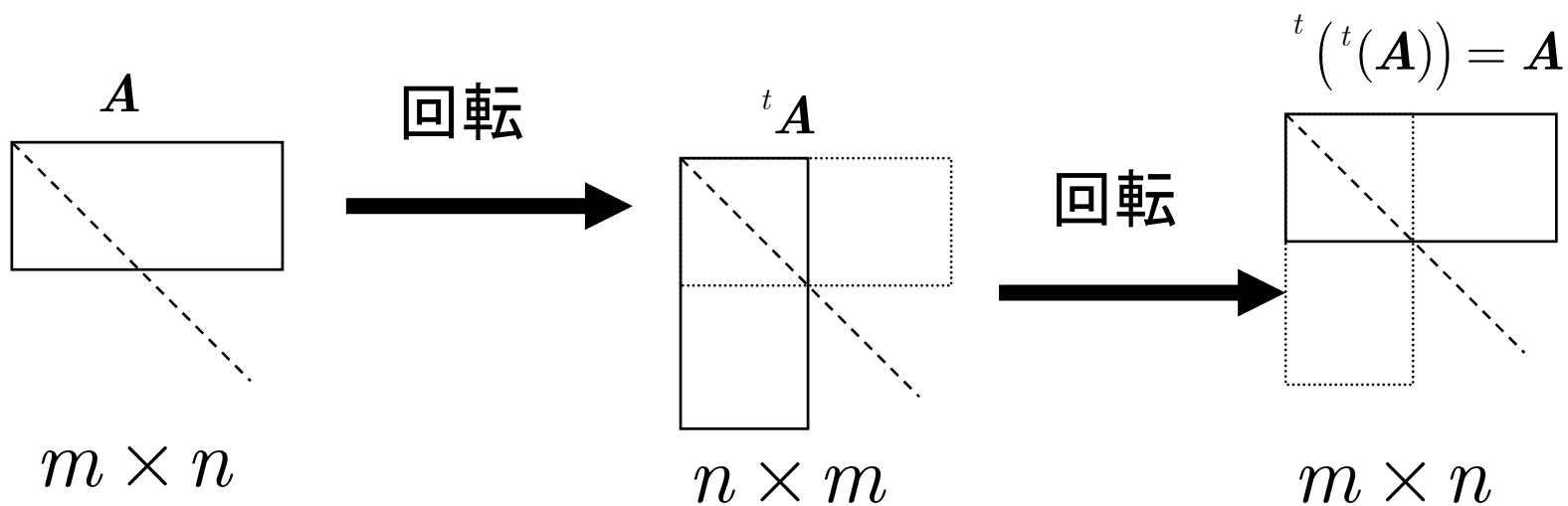


転置すると前後  
が入れ替わる

(4)  ${}^t({}^t(A)) = A$

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= {}^t({}^t A) \\
 &= {}^t({}^t[a_{ij}]) \\
 &= {}^t[a_{ji}] \\
 &= [a_{ij}] \\
 &= \text{右辺}
 \end{aligned}$$

*QED*



## 例題

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 3,$$

とする。次式が成り立つかどうかを調べよ。

$$(1) \quad {}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$$

$$(2) \quad {}^t(k\mathbf{A}) = k({}^t\mathbf{A})$$

$$(3) \quad {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C}) = ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$$

$$(4) \quad {}^t({}^t(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$$



解) (1)  ${}^t(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$

$$\text{左边} = {}^t\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{右边} = {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + {}^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$  左边 = 右边

(2)  ${}^t(k\mathbf{A}) = k({}^t\mathbf{A})$

$$\text{左边} = {}^t\left(3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{右边} = 3\left({}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$  左边 = 右边

$$(3) \quad {}^t(\mathbf{A}\mathbf{C}) = ({}^t\mathbf{C})({}^t\mathbf{A})$$

$$\text{左边} = {}^t\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{右边} = {}^t\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times {}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \text{左边} = \text{右边}$

$$(4) \quad {}^t\left({}^t(\mathbf{A})\right) = \mathbf{A}$$

$$\text{左边} = {}^t\left({}^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{右边}$$