線形代数学

履修にあたって

2008年度１セメスタ開講
電子情報システム学科　必修
時間割：水曜3時限（12:50-14:20）
講義室：K101(AVホール）

担当

草苅良至（電子情報システム学科）
教員室：G I 511
（オフィスアワー、水曜日１時限）
内線：2095
e-mail:kusakari@akita-pu.ac.jp

質問は上記のいずれかに行なうこと。
注意　計算用のノートを準備すること。

教科書等

教科書：
「やさしく学べる線形代数」
石村園子著　共立出版社　2000円

参考書：
「テキスト　線形代数」
小寺平治著　共立出版社　2000円
「プログラミングのための線形代数」
平岡和幸、堀玄　共著、オーム社　3000円

「線形代数とその応用」
G・ストラング著　産業図書　4200円

演習書：
「演習と応用 線形代数」
寺田文行・木村宣昭著
サイエンス社　1700円

線形代数学とは、

○線形代数学とは、簡単にいうと
「行列」や「ベクトル」
を扱う数学です。

○高校の数学Cで扱った行列を、
より一般的に拡張したものを扱います。

数学Cの復習

数学Cでは主に２×２の行列を扱っているはずです。

ここでは、復習もかねてそれらを順に振り返ります。

○慣用的な行列の表現

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

行列を表す変数には、
太大英文字を用います。

行列の相等

定義：（行列の相等）
行列$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$が同じ型で対応する成分が等しいとき、
行列$\boldsymbol{A}$と行列$\boldsymbol{B}$は「等しい」といいます。
記号では以下のように書きます。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p, & b = q \\ c = r, & d = s \end{cases}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

例題

次の等式が成り立つように、 x, y, u, v の値を定めよ。

$$\begin{pmatrix} x-y & x+y \\ u+1 & 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

解　行列の相等の定義より、

$$\begin{cases} x-y=1, & x+y=3 \\ u+1=2, & 2v=4 \end{cases}$$

が成り立つ。よって、

$$x=2, y=1, u=1, v=2$$

7

練習

次の等式が成り立つように、 x, y, u, v の値を定めよ。

（1） $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 3v \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

（2） $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ x & y \end{pmatrix}$ 　 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} u & v \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

8

行列の加法

定義：（行列の和）

同じ型の行列$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$について、対応する成分の和を成分とする行列を、
$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の和といい、

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$$

と表す。
記号では以下のように書きます。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

9

例題

次の計算をせよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

解　行列の和の定義より、

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-4) & -2+3 \\ -3+2 & 6+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

10

練習

次の計算をせよ。

（1） $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

（2） $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

11

加法逆元(ーA)

定義：（加法逆元）

行列$\boldsymbol{A}$に対して、$\boldsymbol{A}$の各成分の符号を反転させた行列を
ー$\boldsymbol{A}$
で表す。
（なお、この行列ー$\boldsymbol{A}$は、加法に関する$\boldsymbol{A}$の逆元（加法逆元）とも呼ばれる。）

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、 $-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

12

零行列

定義：（零行列）

すべての成分が0である行列を零行列といい、
$\boldsymbol{O}$
で表す。

$$\boldsymbol{O}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

13

例題

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$ に対して、次の行列を求めよ。

（1） $-\boldsymbol{A}$　（2） $-(-\boldsymbol{A})$　（3） $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})$

解

（1） $-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

（2） $-(-\boldsymbol{A})=-\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$

（3） $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$

14

練習

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & x\end{pmatrix}$$ に対して、次の行列を求めよ。

（1） $-\boldsymbol{A}$

（2） $-(-\boldsymbol{A})$

（3） $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})$

15

加法についての性質

性質：（行列加法の性質）

同じ型の行列の加法について、
次ぎのことが成り立つ。

1．交換法則　$A+B=B+A$

2．結合法則　$(A+B)+C=A+(B+C)$

3．零行列と、加法逆元の存在。

$$A+O=A,\quad O+A=A,$$
$$A+(-A)=O,\ (-A)+A=O$$

16

行列の差

定義：（行列の減法）

同じ型の行列AとBに対して
$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$
を、
AとBの差といい
$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$
と書く。記号で表すと次のようになる。

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-p & b-q\\ c-r & d-s\end{pmatrix}$$

17

練習

次の計算をせよ。

（1）
$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

（2）
$$\begin{pmatrix}6 & -5\\ 0 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 3 & 8\end{pmatrix}$$

（3）
$$\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 9\\ -4 & 0\end{pmatrix}$$

18

行列の実数倍(スカラー倍)

定義：（行列のスカラー倍）

実数 k に対して、行列 $\boldsymbol{A}$ の各成分を k 倍する行列を

$k\boldsymbol{A}$

と書く。記号では次のように書く。

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

性質：（特別なスカラー倍）

また、実数倍の定義から、次ぎの性質が成り立つ。

$$1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \quad (-1)\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}, \quad 0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, \quad k\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}$$

例題

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$ に対して、次の行列を求めよ。

（1）$3\boldsymbol{A}$　　（2）$(-2)\boldsymbol{A}$

解

（1）

$$3\boldsymbol{A} = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times(-1) & 3\times 2 \\ 3\times 4 & 3\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

（2）

$$(-2)\boldsymbol{A} = (-2)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\times(-1) & (-2)\times 2 \\ (-2)\times 4 & (-2)\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}$$

練習

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad k = 2, l = -3$$

とする。

次の行列を求めよ。

（1）$k\boldsymbol{A}$　　（2）$l\boldsymbol{A}$

（3）$k\boldsymbol{B}$　　（4）$l\boldsymbol{B}$

実数倍についての性質

性質：（行列のスカラー倍）

行列の実数倍について、次ぎのことが成り立つ。
ここで、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ は同じ型の行列で、k, l は実数である。

1. $(kl)\boldsymbol{A} = k(l\boldsymbol{A})$
2. $(k+l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$
3. $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$

練習

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

次の行列を求めよ。

（1）$2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{C}$　　（2）$2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B} + 4\boldsymbol{C}$

（3）$2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{A}$　　（4）$2(3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) + 2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$

ベクトル

定義：（ベクトル）

x 成分、y 成分を並べた (x, y) のように、
複数の成分を並べたもの。
成分が n 個のベクトルは、
$1\times n$ あるいは、$n\times 1$ の行列とみなせる。
$1\times n$ のとき、行ベクトル
$n\times 1$ のとき、列ベクトルとよぶ。

$\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

行ベクトル

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

列ベクトル

ベクトルと行列の積

定義：（ベクトルと行列の積）

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$$

とする。

行列と列ベクトルの積

$$A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

行ベクトルと行列の積

$$\boldsymbol{p}A=\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \end{pmatrix}$$

25

行列と連立方程式

行列とベクトルを用いて連立方程式を表現できる。

次のような連立方程式

$$\begin{cases} ax+by &= p \\ cx+dy &= q \end{cases} \quad \cdots①$$

は、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \cdots②$$

と書く事ができる。

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおくと、

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p} \quad \cdots③$$

とも書ける。

①、②、③は、同じ連立方程式の異なる表現。

26

1次方程式と2元連立1次方程式

一次方程式

未知数

既知の値 $5x=3$ 既知の値

2元連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x+3y &= 3 \\ -x+5y &= 7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ として、

成分全て既知の値 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$ 成分全て既知の値

成分全て未知数

27

2組の式から行列の積へ

次のような2組の式を考える。

$$\begin{cases} ax+by &= s \\ cx+dy &= t \end{cases} \cdots① \qquad \begin{cases} es+ft &= u \\ gs+ht &= v \end{cases} \cdots②$$

このとき、u,v を s,t を用いずに、x,y で表す。

①の s,t を、②に代入する。

$$\begin{cases} u &= (ea+fc)x+(eb+fd)y \\ v &= (ga+hc)x+(gb+hd)y \end{cases} \cdots③$$

これを行列の表現で調べてみる。

28

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots①' \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \cdots②'$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots③'$$

と、表現できる。

ここで、①’と②’から形式的に、次のような表現を書いてみる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots③''$$

このことより、

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

と決めてあげると都合がよさそう。

29

行列積の定義

定義：（行列どうしの積）

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

とする。

行列Bと行列Aの積 BAは、

$$BA=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

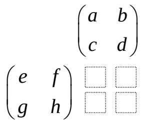
で定義される。

30

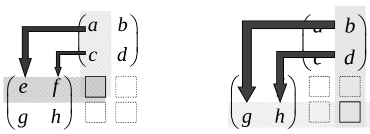
行列積の覚え方

$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の計算

(1)まず、出来上がる行列の型をきめる。



(2)個々の成分を求める。



31

練習

次の行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

32

行列積の性質

性質:(行列どうしの積の交換不可性)

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

となる行列A、行列$\boldsymbol{B}$がある。

33

例題

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

$\boldsymbol{AB}, \ \boldsymbol{BA}$ を計算することによって、

$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ を確かめよ。

解

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+0 \\ 0+6 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+4 \\ 3+0 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ なので、$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$

34

単位行列

定義:(単位行列)

対角成分が1で、他の成分が0である行列を
単位行列(unit matrix , Identity matrix)
といい、 E あるいは I で表す。

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

35

単位行列と零行列の性質

性質:(単位行列と零行列)

$\boldsymbol{A}$を任意の正方行列、 $\boldsymbol{A}$ と同じ型の単位行列を $\boldsymbol{I}$
零行列を$\boldsymbol{O}$ とする。このとき、次が成り立つ。

1. $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$
2. $\boldsymbol{AO} = \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{O}$

比較せよ。

$a \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする。このとき次が成り立つ。

1. $a \times 1 = 1 \times a = a$
2. $a \times 0 = 0 \times a = 0$

36

零因子

定義：（零因子）

行列の積では、 $A \neq O$ かつ $B \neq O$ であっても、
$AB = O$ となることがある。
このとき、 A および B を零因子という。

比較せよ。

$a, b \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする。このとき次が成り立つ。

$$a \times b = 0 \to a = 0 \vee b = 0$$

（ $a \times b = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$ と読む。）

37

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$ とする。

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2 & -4+4 \\ 4-4 & -8+8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

38

逆行列

定義：（逆行列）

正方行列 A に対して、
$AX = XA = I$
を満たす正方行列 X が存在するならば、
X を A の逆行列といい
A^{-1}
で表す。

比較せよ。

$a \neq 0$ とする。

$$a \times b = b \times a = 1$$

を満たす実数 b を a の逆数といい、 a^{-1} と表す。

$$b = a^{-1} = \frac{1}{a}$$ である。

39

連立方程式の解法から逆行列へ

次のような連立方程式を考える。

$$\begin{cases} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{cases}$$ 行列で表すと $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$ とおく。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{p}$$

$ax = b \Leftrightarrow x = a^{-1}b$

$5x = 3 \Leftrightarrow x = 5^{-1} \times 3 = \frac{3}{5}$

通常のスカラーでの規則に、
合うように逆行列 A^{-1} を
定義したい。

40

$$\begin{cases} ax + by &= p \cdots (1) \\ cx + dy &= q \cdots (2) \end{cases}$$ を解く。

$(1) \times d - (2) \times b$

$$\begin{array}{rrl} & adx + bdy & = dp \\ - & bcx + bdy & = bq \\ \hline & (ad - bc)x & = dp - bq \end{array}$$

$ad - bc \neq 0$ と仮定すると、

$$x = \frac{1}{(ad - bc)}(dp - bq)$$

$(1) \times c - (2) \times a$

$$\begin{array}{rrl} & acx + bcy & = cp \\ - & acx + ady & = aq \\ \hline & (bc - ad)y & = cp - aq \end{array}$$

$ad - bc \neq 0$ と仮定すると、

$$y = \frac{1}{(ad - bc)}(-cp + aq)$$

41

よって、 $ad - bc \neq 0$ のときには、

$$\begin{cases} ax + by &= p \cdots (1) \\ cx + dy &= q \cdots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{(ad - bc)}(dp - bq) \\ y = \dfrac{1}{(ad - bc)}(-cp + aq) \end{cases}$$

行列を用いると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$ad - bc \neq 0$ ならば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{(ad - bc)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

この部分を逆行列に
したい。

42

逆行列の存在判定

性質：（逆行列の存在する条件）

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

$(ad-bc)\neq 0$ のとき、A の逆行列 A^{-1}が存在して、

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$(ad-bc)=0$ のとき、A の逆行列は存在しない。

43

行列式

定義：（2次の行列式）

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

このとき、A の行列式 $|A|$ は次式で定義される。

$|A|=ad-bc$

行列式は、次ぎのように書かれることもある。

$\det(A)=ad-bc$

44

行列式・逆行列の求め方

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

$|A|$ の求め方

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

↘ 乗算する符号が正

↙ 乗算して符号が負

$|A|=ad-bc$

A^{-1} の求め方

$|A|\neq 0$ を確認して、

$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$

↘ 交換

乗算して符号が負

$\frac{1}{|A|}$ 倍

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

45

練習

次の行列に対して、逆行列を持つかどうかを調べ、
もし持てばそれを求めよ。

（1） $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

（2） $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

（4） $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$

46

逆行列の性質

性質：（逆行列の存在する条件）

正方行列A が逆行列 A^{-1} を持つとき、
次のことが成り立つ。

1. $AA^{-1}=A^{-1}A=E$
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

同じ型の正方行列 A 、B が共に逆行列を持つとき、
積 AB も逆行列を持ち、次のことが成り立つ。

3. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

順序に注意すること。

47