線形代数学

履修にあたって

2008年度1セメスタ開講
電子情報システム学科　必修

時間割：水曜3時限（12:50-14:20）
講義室：K101(AVホール）

担当

草苅良至（電子情報システム学科）
教員室：G I 511
（オフィスアワー、水曜日1時限）
内線：2095
e-mail:kusakari@akita-pu.ac.jp

質問は上記のいずれかに行なうこと。
注意　計算用のノートを準備すること。

教科書等

教科書:

「やさしく学べる線形代数」
石村園子著　共立出版社 2000円

参考書:

「テキスト 線形代数」
小寺平治著　共立出版社 2000円
「プログラミングのための線形代数」
平岡和幸、堀玄 共著、オーム社 3000円

「線形代数とその応用」
G･ストラング著 産業図書 4200円

演習書:

「演習と応用 線形代数」
寺田文行･木村宣昭著
サイエンス社 1700円

線形代数学とは、

○線形代数学とは、簡単にいうと
「行列」や「ベクトル」
を扱う数学です。

○高校の数学Cで扱った行列を、
より一般的に拡張したものを扱います。

数学Cの復習

数学Cでは主に2×2の行列を扱っているはずです。

ここでは、復習もかねてそれらを順に振り返ります。

○慣用的な行列の表現

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

行列を表す変数には、
太大英文字を用います。

行列の相等

定義：（行列の相等）

行列A,Bが同じ型で対応する成分が等しいとき、
行列Aと行列Bは「等しい」といいます。
記号では以下のように書きます。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p, & b = q \\ c = r, & d = s \end{cases}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

例題

次の等式が成り立つように、 x, y, u, v の値を定めよ。

$$\begin{pmatrix} x-y & x+y \\ u+1 & 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

解

行列の相等の定義より、

$$\begin{cases} x-y=1, & x+y=3 \\ u+1=2, & 2v=4 \end{cases}$$

が成り立つ。よって、

$$x=2, y=1, u=1, v=2$$

練習

次の等式が成り立つように、　x, y, u, v
の値を定めよ。

（１）　$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 3v \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

（２）　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ x & y \end{pmatrix}$　　$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} u & v \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$　とする。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

行列の加法

定義：（行列の和）

同じ型の行列$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$について、対応する成分の和を成分とする行列を、

$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の和といい、

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$$

と表す。

記号では以下のように書きます。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

例題

次の計算をせよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

解

行列の和の定義より、

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-4) & -2+3 \\ -3+2 & 6+(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

練習

次の計算をせよ。

（１）

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

（２）

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

（３）

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

加法逆元(－A)

定義：（加法逆元）

行列$\boldsymbol{A}$に対して、$\boldsymbol{A}$の各成分の符号を反転させた
行列を
$-\boldsymbol{A}$
で表す。
（なお、この行列$-\boldsymbol{A}$は、加法に関する$\boldsymbol{A}$の逆元
（加法逆元）とも呼ばれる。）

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき、} -\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

零行列

定義：（零行列）

すべての成分が0である行列を零行列といい、
$\boldsymbol{O}$
で表す。

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例題

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$ に対して、次の行列を求めよ。

（1） $-A$　　（2） $-(-A)$　　（3） $A+(-A)$

解

（1） $-A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

（2） $-(-A)=-\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=A$

（3） $A+(-A)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$

練習

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & x\end{pmatrix}$$ に対して、次の行列を求めよ。

（1） $-\boldsymbol{A}$

（2） $-(-\boldsymbol{A})$

（3） $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})$

加法についての性質

性質：（行列加法の性質）

同じ型の行列の加法について、
次ぎのことが成り立つ。

1．交換法則　$A+B=B+A$

2．結合法則　$(A+B)+C=A+(B+C)$

3．零行列と、加法逆元の存在。

$$A+O=A,\quad O+A=A,$$

$$A+(-A)=O,(-A)+A=O$$

行列の差

定義：（行列の減法）

同じ型の行列$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$に対して

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

を、

AとBの差といい

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$$

と書く。記号で表すと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{pmatrix}$$

練習

次の計算をせよ。

（１）

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

（２）

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

（３）

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の実数倍(スカラー倍)

定義: (行列のスカラー倍)

実数 k に対して、行列 $\boldsymbol{A}$ の各成分を k 倍する行列を

$k\boldsymbol{A}$

と書く。記号では次のように書く。

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

性質: (特別なスカラー倍)

また、実数倍の定義から、次ぎの性質が成り立つ。

$$1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \quad (-1)\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}, \quad 0\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, \quad k\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}$$

例題

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$ に対して、次の行列を求めよ。

（1） $3A$　　　（2） $(-2)A$

解

（1）

$$3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times(-1) & 3\times 2 \\ 3\times 4 & 3\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

（2）

$$(-2)A = (-2)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\times(-1) & (-2)\times 2 \\ (-2)\times 4 & (-2)\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -8 & -10 \end{pmatrix}$$

練習

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 2 & -5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix},\quad k=2, l=-3$$

とする。

次の行列を求めよ。

（1） $k\boldsymbol{A}$

（2） $l\boldsymbol{A}$

（3） $k\boldsymbol{B}$

（4） $l\boldsymbol{B}$

実数倍についての性質

性質：（行列のスカラー倍）

行列の実数倍について、次ぎのことが成り立つ。
ここで、$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ は同じ型の行列で、k,l は実数である。

1. $(kl)\boldsymbol{A} = k(l\boldsymbol{A})$
2. $(k+l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$
3. $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$

練習

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。

次の行列を求めよ。

（1）$2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{C}$

（2）$2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B} + 4\boldsymbol{C}$

（3）$2(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{A}$

（4）$2(3\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) + 2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$

ベクトル

定義：（ベクトル）

x 成分、y 成分を並べた (x, y) のように、
複数の成分を並べたもの。
成分が n 個のベクトルは、
$1\times n$ あるいは、$n\times 1$ の行列とみなせる。
$1\times n$ のとき、行ベクトル
$n\times 1$ のとき、列ベクトルとよぶ。

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

行ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

列ベクトル

ベクトルと行列の積

定義：（ベクトルと行列の積）

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$$

とする。

行列と列ベクトルの積

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

行ベクトルと行列の積

$$\boldsymbol{pA} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \end{pmatrix}$$

行列と連立方程式

行列とベクトルを用いて連立方程式を表現できる。

次のような連立方程式

$$\begin{cases} ax+by & = p \\ cx+dy & = q \end{cases} \qquad \cdots ①$$

は、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \cdots ②$$

と書く事ができる。

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{p} \qquad \cdots ③$$

とも書ける。

①、②、③は、同じ連立方程式の異なる表現。

1次方程式と2元連立1次方程式

一次方程式

既知の値

未知数

$$5x = 3$$

既知の値

2元連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 3 \\ -x + 5y & = 7 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ として、

成分全て既知の値

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$$

成分全て既知の値

成分全て未知数

2組の式から行列の積へ

次のような2組の式を考える。

$$\begin{cases} ax + by &= s \\ cx + dy &= t \end{cases} \quad \cdots ① \qquad \begin{cases} es + ft &= u \\ gs + ht &= v \end{cases} \quad \cdots ②$$

このとき、u,v を s,t を用いずに、x,y で表す。

①の s,t を、②に代入する。

$$\begin{cases} u &= (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ v &= (ga + hc)x + (gb + hd)y \end{cases} \quad \cdots ③$$

これを行列の表現で調べてみる。

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots ①'$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad \cdots ②'$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots ③'$$

と、表現できる。
ここで、①’と②’から形式的に、次のような表現を書いてみる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots ③''$$

このことより、

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

と決めてあげると都合がよさそう。

行列積の定義

定義：（行列どうしの積）

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$ とする。

行列$\boldsymbol{B}$と行列$\boldsymbol{A}$の積　$\boldsymbol{BA}$は、

$$BA=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

で定義される。

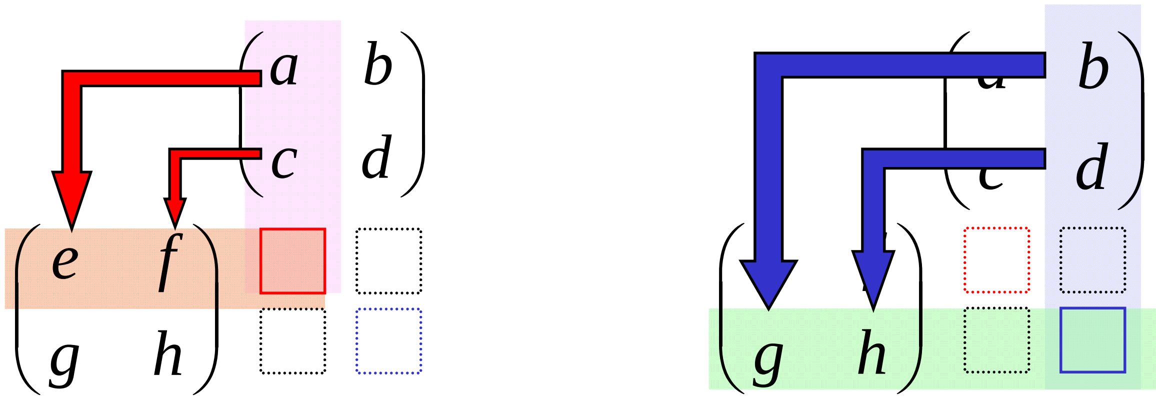
行列積の覚え方

$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の計算

（1）まず、出来上がる行列の型をきめる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & \begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix} \end{array}$$

（2）個々の成分を求める。



練習

次の行列を求めよ。

（1）

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

（2）

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（3）

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

（4）

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列積の性質

性質：（行列どうしの積の交換不可性）

$$AB \neq BA$$

となる行列A、行列$\boldsymbol{B}$がある。

例題

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$ とする。

$\boldsymbol{AB},\quad \boldsymbol{BA}$ を計算することによって、

$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ を確かめよ。

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & 2+0\\ 0+6 & 0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 1+4\\ 3+0 & 3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$ なので、$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$

単位行列

定義：（単位行列）

対角成分が1で、他の成分が0である行列を
単位行列(unit matrix , Identity matrix)
といい、 $\boldsymbol{E}$ あるいは $\boldsymbol{I}$ で表す。

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

単位行列と零行列の性質

性質：（単位行列と零行列）

$\boldsymbol{A}$を任意の正方行列、 $\boldsymbol{A}$ と同じ型の単位行列を $\boldsymbol{I}$
零行列を$\boldsymbol{O}$ とする。このとき、次が成り立つ。

1. $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$

2. $\boldsymbol{AO} = \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{O}$

比較せよ。

$a \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする。このとき次が成り立つ。

1. $a \times 1 = 1 \times a = a$

2. $a \times 0 = 0 \times a = 0$

零因子

定義：（零因子）

行列の積では、 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$ かつ $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$ であっても、
$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ となることがある。
このとき、 $\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}$ を零因子という。

比較せよ。

$a,b \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする。このとき次が成り立つ。

$$a \times b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

（ $a \times b = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$ と読む。）

例

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$ とする。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-2 & -4+4 \\ 4-4 & -8+8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

逆行列

定義：（逆行列）

正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{I}$$

を満たす正方行列 $\boldsymbol{X}$ が存在するならば、

$\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{A}$ の逆行列といい

$\boldsymbol{A}^{-1}$

で表す。

比較せよ。

$a \neq 0$ とする。

$$a \times b = b \times a = 1$$

を満たす実数 b を a の逆数といい、 a^{-1} と表す。

$$b = a^{-1} = \frac{1}{a}$$ である。

連立方程式の解法から逆行列へ

次のような連立方程式を考える。

$$\begin{cases} ax + by & = p \\ cx + dy & = q \end{cases}$$

行列で表すと $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

とおく。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}$$

$$ax = b \Leftrightarrow x = a^{-1}b$$

$$5x = 3 \Leftrightarrow x = 5^{-1} \times 3 = \frac{3}{5}$$

通常のスカラーでの規則に、
合うように逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を
定義したい。

$$\begin{cases} ax+by &= p\cdots(1) \\ cx+dy &= q\cdots(2) \end{cases}$$ を解く。

$(1)\times d-(2)\times b$

$$\begin{array}{rll} & adx+bdy & =dp \\ - & bcx+bdy & =bq \\ \hline & (ad-bc)x & =dp-bq \end{array}$$

$ad-bc\neq 0$ と仮定すると、

$$x=\frac{1}{(ad-bc)}\left(dp-bq\right)$$

$(1)\times c-(2)\times a$

$$\begin{array}{rll} & acx+bcy & =cp \\ - & acx+ady & =aq \\ \hline & (bc-ad)y & =cp-aq \end{array}$$

$ad-bc\neq 0$ と仮定すると、

$$y=\frac{1}{(ad-bc)}\left(-cp+aq\right)$$

よって、$ad-bc\neq 0$ のときには、

$$\begin{cases} ax+by &= p\cdots(1) \\ cx+dy &= q\cdots(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{(ad-bc)}\left(dp-bq\right) \\ y=\dfrac{1}{(ad-bc)}\left(-cp+aq\right) \end{cases}$$

行列を用いると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$ad-bc\neq 0$ ならば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{(ad-bc)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

この部分を逆行列にしたい。

逆行列の存在判定

性質：（逆行列の存在する条件）

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

$(ad - bc) \neq 0$ のとき、$\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$が存在して、

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$(ad - bc) = 0$ のとき、$\boldsymbol{A}$ の逆行列は存在しない。

行列式

定義：（2次の行列式）

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

このとき、A の行列式 $|A|$ は次式で定義される。

$$|A| = ad - bc$$

行列式は、次ぎのように書かれることもある。

$$\det(A) = ad - bc$$

行列式・逆行列の求め方

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

$|A|$ の求め方

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\searrow$ 乗算する符号が正

$\swarrow$ 乗算して符号が負

$$|A| = ad - bc$$

A^{-1} の求め方

$|A| \neq 0$ を確認して、

$$\boxed{} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\nwarrow\!\!\!\searrow$ 交換

$\bigcirc$ 乗算して符号が負

$\boxed{}$ $\dfrac{1}{|A|}$ 倍

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

練習

次の行列に対して、逆行列を持つかどうかを調べ、
もし持てばそれを求めよ。

（1）
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

逆行列の性質

性質：（逆行列の存在する条件）

正方行列 A が逆行列 A^{-1} を持つとき、
次のことが成り立つ。

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

同じ型の正方行列 A 、B が共に逆行列を持つとき、
積 AB も逆行列を持ち、次のことが成り立つ。

3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

順序に注意すること。