第５回　線形代数学レポート課題解答例

1.次のベクトルの集合が一次独立か一次従属かを調べよ。また、一次従属である場合には、一つのベクトルを残りのベクトルの一次結合で表せ。

（１）$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$。ただし、$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

（解法１　定義に基づく方法）

３本のベクトルなので、３つの係数$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$を用意して次のように線形関係式を作る。

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$

$$\therefore k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここで、係数行列の行列式を求める。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\bullet(-3)\bullet5 + 1\bullet(-1)\bullet(-3) + 2\bullet2\bullet2 - \{1\bullet(-1)\bullet2 + 1\bullet2\bullet5 + 2\bullet(-3)\bullet(-3)\}$$

$$= -15 + 3 + 8 - (-2 + 5 + 18)$$

$$= -4 - 21$$

$$= -25$$

$$\neq 0$$

よって、

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり、自明な線形関係式しか持たない。

よって、$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$は一次独立である。

（2）$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$。ただし、$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

（解法２　ベクトルから行列を作り、その行列を行基本変形で階段行列にする方法）

$$\boldsymbol{X} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

行基本変形で階段行列化する。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-1\times(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2列目の掃きだし}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{3列目の掃きだし}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$rank\boldsymbol{X} = 3 < 4$ となり、ベクトルの本数分の階数がないので一次従属である。
$k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ とし、線形関係式　$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3 + k_4\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{0}$　を作る。
このとき、行列 $\boldsymbol{X}$ が係数行列になることに注意する。階段行列の形より、次の解が存在することがわかる。

$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} \\ l \end{bmatrix}$ ただし、$l \in \mathbb{R}$ は任意定数。

線形関係式に代入して、$\boldsymbol{x}_4$ を残りのベクトル $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ の線形結合で表す。

$$-\frac{l}{2}\boldsymbol{x}_1 - \frac{l}{2}\boldsymbol{x}_2 - \frac{l}{2}\boldsymbol{x}_3 + l\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{0}$$
$$\therefore \boldsymbol{x}_4 = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_3$$

（3） $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$。ただし、 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{X} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ とおく。

行基本変形で階段行列にする。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-1\times(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4)-1\times(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)-1\times(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$rank\boldsymbol{X} = 3 < 4$ となり、ベクトルの本数分の階数がないので一次従属である。

$k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ とし、線形関係式　$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3 + k_4\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{0}$　を作る。

このとき、行列 $\boldsymbol{X}$ が係数行列になることに注意する。階段行列の形より、次の解が存在することがわかる。

$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2l \\ -l \\ -2l \\ l \end{bmatrix}$ ただし、$l \in \mathbb{R}$ は任意定数。

$-2l\boldsymbol{x}_1 - l\boldsymbol{x}_2 - 2l\boldsymbol{x}_3 + l\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{0}$

$\therefore \boldsymbol{x}_4 = 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3$

実際、次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

２．次のベクトルの集合$\left\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\right\}$に対して、生成する部分空間$L\left\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\right\}$を求めよ。

また、部分空間$L\left\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\right\}$の次元$\dim L\left\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\right\}$と基底を求めよ。

（１）$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

ベクトルを並べて行列を作り、行基本変形で階段行列にする。

$$\boldsymbol{X} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}\times(2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、$\dim L\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = 3$であり、次元は３。

また、階段行列の形より、$\left\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\right\}$が部分空間$L\left[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\right]$の基底になる。

よって、

$$L\left[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\right] = \left\{k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + k_3\boldsymbol{x}_3 \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{ k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| \, k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

これは、３次元空間内の（原点を通る）平面を表す。なお、

$$\begin{cases} x &= k_1 + k_2 \\ y &= -k_1 + 3k_2 \\ z &= -k_2 \end{cases}$$

とおいて、k_1, k_2を消去することにより、$x + y + 4z = 0$という平面の式得られる。

（２） $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_4=\begin{bmatrix}2\\2\\3\\3\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{X}\equiv\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&0&1&2\\1&1&0&3\\0&1&1&3\end{bmatrix}$とおく。

行基本変形で階段行列にする。

$$\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&0&1&2\\1&1&0&3\\0&1&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{(3)-1\times(1)}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&0&1&2\\0&1&0&1\\0&1&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&1&1&3\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{(4)-1\times(2)}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{(4)-1\times(3)}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

よって、$\dim L\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4\end{bmatrix}=3$であり、次元は３。

また、階段行列の形より、$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\}$が部分空間$L\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4\end{bmatrix}$の基底になる。よって、次のように部分空間が求められる。

$$L\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4\end{bmatrix}=\{k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3+k_4\boldsymbol{x}_4 \mid k_1,k_2,k_3,k_4\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3 \mid k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}\}$$
$$=\left\{k_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\middle| k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}\right\}$$

これは、４次元空間中の３次元の部分空間を表している。このように元のn次元空間中の$n-1$次元の部分空間を“超平面”と呼ぶ。よって、$L\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4\end{bmatrix}$は３次元超平面である。

（３） $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_4=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_5=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{X}\equiv\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 & \boldsymbol{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1 & 0 & 1\\1 & -1 & 1 & -2 & 1\\2 & 1 & -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$ とおき、行基本変形で階段行列にする。

$$\begin{bmatrix}3 & -2 & 1 & 0 & 1\\1 & -1 & 1 & -2 & 1\\2 & 1 & -3 & 1 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\3 & -2 & 1 & 0 & 1\\2 & 1 & -3 & 1 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{1列目の掃き出し}}$$
$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\0 & 1 & -2 & 6 & -2\\0 & 3 & -5 & 5 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{2列目の掃き出し}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 4 & -1\\0 & 1 & -2 & 6 & -2\\0 & 0 & 1 & -13 & 7\end{bmatrix}$$

よって、$\dim L\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 & \boldsymbol{x}_5\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 & \boldsymbol{x}_5\end{bmatrix}=3$ であり、次元は３。

また、階段行列の形より、$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\}$ が部分空間 $L\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 & \boldsymbol{x}_5\end{bmatrix}$ の基底になる。

よって、次のように部分空間が求められる。

$$\begin{aligned}
&L\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 & \boldsymbol{x}_5\end{bmatrix}=\{k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3+k_4\boldsymbol{x}_4+k_5\boldsymbol{x}_5 \mid k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\in\mathbb{R}\}\\
&=\{k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3\boldsymbol{x}_3 \mid k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}\}\\
&=\left\{k_1\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}\,\middle|\, k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}\right\}\\
&=\mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

これは、$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\}=\left\{\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}\right\}$ は３次元空間 $\mathbb{R}^3$ の基底にもなっていることを意味する。