

第4回 線形代数学レポート課題(行列式とその応用)解答例

1. 次の行列式を求めよ。

(1) サラスの公式で求める。

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
 = \{2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-1)\} - \{2 \cdot 5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) \cdot 3 + (-1) \cdot 4 \cdot 1\} \\
 = (24 + 5 - 3) - (-10 - 9 - 4) \\
 = 26 + 23 \\
 = 49$$

(2) 行列式の性質で求める。

$$\begin{vmatrix} a+b & a & b \\ c & b+c & b \\ c & a & c+a \end{vmatrix} \quad (1 \text{列から} 2 \text{列と} 3 \text{列を引く}) \\
 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -2b & b+c & b \\ -2a & a & c+a \end{vmatrix} \quad (1 \text{列から} -2 \text{をくくり出す}) \\
 = -2 \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ b & b+c & b \\ a & a & c+a \end{vmatrix} \quad (2 \text{列と} 3 \text{列から} 1 \text{列を引く}) \\
 = -2 \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ b & c & 0 \\ a & 0 & c \end{vmatrix} \quad (\text{サラスの公式}) \\
 = -2(-abc - abc) \\
 = 4abc$$

(3) 積に分解して求める。

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

よって、

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} = 1$$

なお、行列 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ は z 軸を中心に角度 θ だけ回転する行列を表し、行列

$\begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$ は y 軸を中心に角度 φ だけ回転する行列を表す。

(4) 0 の多い行あるいは列で展開を繰り返す。

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (4\text{行で展開})$$

$$= (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad (2\text{行で展開})$$

$$= (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \quad (\text{サラスの公式})$$

$$= -2 \cdot \{ -18 - 15 \} - \{ 0 \}$$

$$= 2 \cdot 33$$

$$= 66$$

(5)行列の性質を利用する。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & u \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & u-x \\ 0 & y^2-xy & z^2-xz & u^2-xu \\ 0 & y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & u^3-xu^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (y-x) & (z-x) & (u-x) \\ y(y-x) & z(z-x) & u(u-x) \\ y^2(y-x) & z^2(z-x) & u^2(u-x) \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & u \\ y^2 & z^2 & u^2 \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & u-y \\ 0 & z^2-zy & u^2-uy \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x)(z-y)(u-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & u \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x)(z-y)(u-y)(u-z)$$

なお、最後の形の行列式はファンデルモンドの行列式として知られている。ファンデルモンドの行列式の一般形は次の式で与えられる。一般式は帰納法で証明できる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

2. 次の問いに答えよ。

(1) 次の2つのベクトルに直交する長さ1のベクトルを示せ。

$$\mathbf{a} = (-2, 1, 3), \mathbf{b} = (1, -3, 2)$$

直交するベクトル $\mathbf{c}$ は外積で求められる。

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2+9)\mathbf{i} + (3+4)\mathbf{j} + (6-1)\mathbf{k}$$

$$= 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

長さ1のベクトルは、 $\frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}$ で求められる。

$$\|\mathbf{c}\| = \sqrt{11^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{121 + 49 + 25} = \sqrt{195}$$

$$\therefore \pm \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{195}}(11, 7, 5)$$

(2) 次の3点からなる3角形の面積を求めよ。

$$A(3, -1, 2), B(-1, 3, -1), C(2, -2, 1)$$

点 A を始点とするベクトルを求め、外積を利用する。すなわち、三角形の面積を S とする

と次式が成り立つ。

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 4, -3), \overrightarrow{AC} = (-1, -1, -1)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-4-3)\mathbf{i} + (3-4)\mathbf{j} + (4+4)\mathbf{k} \\ &= -7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{49+1+64} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{114}\end{aligned}$$

(3) 次の3つのベクトルで構成される平行6面体の体積を求めよ。

$$\mathbf{a} = (1, 1, 2), \mathbf{b} = (-2, 1, 2), \mathbf{c} = (3, 1, -1)$$

体積を V とすると、次式が成り立つ。

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

よって、スカラー三重積 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ を求める。

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1+6-4) - (2+2+6) \\ &= 1-10 \\ &= -9\end{aligned}$$

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = 9$$

3.次の行列に関して問に答えよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ。

サラスの公式より求める。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (24 + 24 + 3) - (4 + 16 + 27) \\ &= 51 - 47 \\ &= 4 \end{aligned}$$

(2) 行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} \widetilde{a_{11}} & \widetilde{a_{12}} & \widetilde{a_{13}} \\ \widetilde{a_{21}} & \widetilde{a_{22}} & \widetilde{a_{23}} \\ \widetilde{a_{31}} & \widetilde{a_{32}} & \widetilde{a_{33}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 2 & -8 \\ -13 & -1 & 10 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -13 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -8 & 10 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

転置や、符号を忘れないこと。

(3) 行列 A の逆行列 A^{-1} を余因子行列 $\tilde{A}$ を用いて求めよ。

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \tilde{A} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 10 & -13 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -8 & 10 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

実際、

$$\begin{aligned}
 A^{-1}A &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 10 & -13 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -8 & 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$